

Санкт - Петербургский государственный университет

Бондаренко Сергей Олегович

Выпускная квалификационная работа

Применение теории обобщённой задачи Чебышёва для решения задач о
гашении колебаний некоторых механических систем

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.03 “Механика и математическое моделирование”

Основная образовательная программа ВМ.5506.2021 “Механика и
математическое моделирование”

Профиль “Математическое моделирование в механике”

Научный руководитель:

Профессор кафедры теоретической и прикладной механики,

д. ф.-м. н. Юшков М. П.

Рецензент:

проф., д. ф.-м. н. Самсонов В.А.

Санкт - Петербург

2023

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Bondarenko Sergei Olegovich

Final qualifying work

Application of the theory of the generalized Chebyshev problem for solving
problems of damping vibrations of some mechanical systems

Level of education: magistracy

Field of education 01.04.03 “Mechanics and mathematical modeling”

Main educational program BM.5506.2021 “Mechanics and mathematical
modeling”

Area of specialization “Mathematical modelling in mechanics”

Scientific supervisor:

Professor of the Theoretical and Applied Mechanics Department,
Yushkov M. P.

Reviewer:

Prof., Samsonov V. A.

Saint - Petersburg

2023

Содержание

Введение	2
Обзор литературы	4
Система с тройным математическим маятником	8
Вывод уравнений движения	9
Переход к уравнениям в главных координатах	10
Применение принципа максимума Понтрягина	13
Применение обобщённого принципа Гаусса	15
Применение обобщённого принципа Гаусса с расширенной краевой задачей	16
Численный расчет	17
Система с тройным стержневым маятником	20
Использование метода теории управления	24
Использование неголономной механики	25
Заключение	30
Список литературы	31

Введение

Гашение колебаний механических систем одна из ключевых задач в различных технических приложениях, включающих в себя робототехническую, производственную и авиакосмическую промышленность. Например, в робототехнике управление роботизированными руками имеет решающее значение для точного и эффективного манипулирования объектами[1]. Точно так же и в аэрокосмической технике гашение колебаний необходимо для обеспечения устойчивости и безопасности летательных аппаратов во время полета. Проблема актуальна и на производстве, где управление станками имеет решающее значение для достижения высокой точности и аккуратности.

В данной работе основное внимание уделяется проблеме гашения колебаний тележки с тройным маятником как обобщенной задаче Чебышева. Мы рассмотрим 2 системы: с тройным математическим маятником и тройным стержневым. Данные системы объединяет то, что у них 4 степени свободы. Так как мы будем учитывать движение тележки вдоль одной оси и повороты прикреплённых к ней маятников в одной плоскости, то колебания возникают вследствие движения системы из начального состояния покоя и требования покоя в конечный момент времени (см. рис. 1). При этом будет задаваться расстояние, на которое должна переместиться тележка, и время перехода.

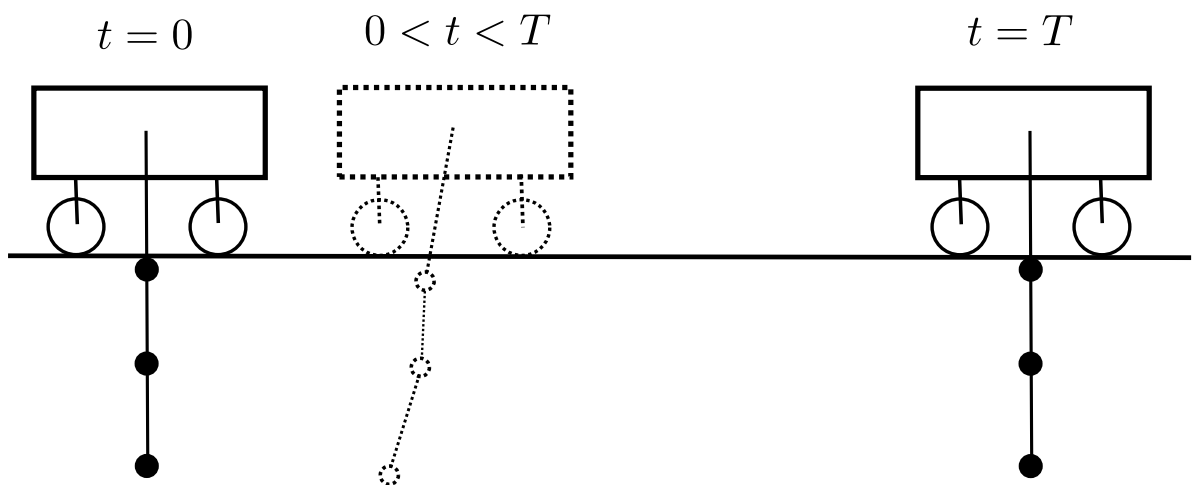


Рис. 1: Постановка задачи

Обобщённая задача Чебышёва возникает при рассмотрении задач, в которых, кроме дифференциальных уравнений движения, необходимо учесть

дополнительные дифференциальные уравнения высокого порядка [2]. Оригинальная задача Чебышёва возникла из теории синтеза механизмов. В них ставилась задача движения звеньев механизмов по заданной траектории, или описания движения желаемой конечной точки звена.

Вначале мы решим поставленную проблему как задачу управления с использованием принципа максимума Понтрягина. В дальнейшем сможем обнаружить неголономную связь высокого порядка, выполняющуюся во всё время движения для полученной управляющей силы. Затем, с помощью метода неголономной механики, опирающегося на применение обобщённого принципа Гаусса, получим второе решение. Данные решения будут сравнены графически для обеих систем. Из-за недостатков обоих методов при кратковременном движении мы расширим краевую задачу для второго метода.

Нужно отметить, что все способы управления, использованные в данной работе, не имеют обратной связи. Из этого вытекают соответствующие плюсы и минусы данных управлений. Построение управления без обратной связью может быть более простым для определённых систем, так как нам не нужно снимать данные с сенсоров и после их обрабатывать. Это делает производство систем с таким управлением дешёвым, в сравнении с имеющими обратную связь. При этом преимуществе нужно выделить и недостаток. Система становится менее надёжной и гибкой по отношению к внешним изменениям и не имеет возможности саморегулироваться.

Обзор литературы

В области управления крановыми конструкциями применяются стратегии, которые позволяют достичь требуемой точности и надежности их работы. Существует значительное количество исследований, посвященных различным аспектам управления кранами, и важно иметь обзор существующих работ для формирования более полного понимания этой области. В этом контексте статьи [3, 4, 5], представляющие обзор многолетних исследований по управлению крановыми конструкциями, являются ценным источником информации. В этих статьях были описаны разнообразные методы, применяемые для управления кранами, проведена классификация как методов, так и различных крановых конструкций. Эти обзорные работы предоставляют важную основу для разработки новых методов управления, учитывающих сложности и особенности крановых систем.

Большинство методов управления, разработанных для класса козловых кранов, предполагают использование плоскостных моделей и предполагают, что траектория движения крана, внешние силы и усилия управления находятся в одной плоскости. Эти методы обычно учитывают только силы инерции, вызванные ускорением и замедлением тележки, а управляющие усилия рассматриваются в виде силы или крутящего момента, приводящего в движение тележку[3].

Такой подход делает кран уязвимым к возмущениям, выходящим за пределы плоскости, а также к нелинейным связям между движениями в плоскости и вне плоскости. Стратегии управления, учитывающие вклад факторов, выходящих за плоскость, или нелинейности в модели, являются исключением, а не правилом[3].

В статье [6] была предложена первая стратегия управления для автоматизации работы крана. Автор использовал аналоговый компьютер для моделирования динамики крана и создания оптимальных скоростей для движения тележки и троса с целью минимизации времени движения и избегания препятствий на пути. Однако эта стратегия управления не учитывала колебания нагрузки.

В статье [7] было предложено оптимальное по времени ускорение с использованием принципа максимума Понтрягина. В этом методе три точки перехода ускорений и общее время оценивались только как функции рас-

стояния движения, предполагая постоянную длину троса. Однако эти оптимальные решения были не практичными и служили лишь ориентиром для оценки других методов управлений.

В статье [8] был предложен метод гашения остаточных колебаний для заданного времени и расстояния с использованием принципа максимума Понтрягина. Управляющая сила была получена в виде суммы линейной функции и гармоник, коэффициенты при которых выражались через заданное время перемещения и массы системы.

В статье [9] был использован принцип максимума Понтрягина для минимизации времени перехода козлового крана, перемещающегося и поднимающего груз с постоянной скоростью, при условии ограничений на максимальную скорость перемещения тележки и подъема троса. Эта методика позволила получить управляющую силу, необходимую для создания требуемого движения. Однако оптимальная траектория, сгенерированная этим методом, не всегда превосходила характеристики неоптимальных кранов, используемых в реальных условиях. Авторы отметили, что, хотя полезный груз был свободен от остаточных колебаний, в некоторых случаях значительные колебания могли возникать во время движения.

Обобщенная задача Чебышёва является расширением задачи Чебышёва из теории синтеза механизмов[2]. В этой задаче требуется построить устройство, в котором определенные звенья должны с заданной точностью выполнять требуемые движения. Примерами таких устройств являются механизмы Чебышёва с остановками звеньев в определенных положениях.

Под обобщенной задачей Чебышёва понимается задача, в которой решение системы уравнений движения должно одновременно удовлетворять дополнительной системе дифференциальных уравнений высокого порядка, где порядок $n \geq 3$. Данная теория может применяться к изучению движения спутника Земли (космического аппарата) с фиксированным значением ускорения [2].

В статье [10] предлагается использование теории из [2], основанной на применении обобщенного принципа Гаусса. Эта теория применяется для решения одной из важных задач теории управления — нахождение оптимальной управляющей силы, которая переводит механическую систему с конечным числом степеней свободы из одного фазового состояния в другое

за указанное время.

Применение этой теории иллюстрируется решением модельной задачи управления горизонтальным движением тележки, перемещающей оси s математических маятников. Сначала задача решается с использованием принципа максимума Понтрягина, который минимизирует функционал от квадрата искомой горизонтальной управляющей силы, переводящей механическую систему из состояния покоя в новое состояние покоя при горизонтальном перемещении тележки на S . При этом непрерывно выполняется линейная неголономная связь порядка $2s + 4$ для полученного решения под действием управляющей силы. Это позволяет рассматривать изначальную задачу теории управления как задачу неголономной механики.

Система с последовательно соединёнными маятниками представляет собой удобный и эффективный инструмент для моделирования различных физических явлений. Эта система состоит из ряда маятников, связанных между собой, где каждый маятник представляет собой точечную массу, подвешенную на нерастяжимой нити. Такая система позволяет исследовать различные аспекты колебаний и переноса энергии в цепочке маятников. Одним из практических применений этой системы является моделирование троса, который можно рассматривать как систему с сосредоточенной массой. Это позволяет анализировать и прогнозировать поведение троса при различных условиях и воздействиях, что имеет большое значение в инженерных и физических приложениях.

В статье [11] представлен обзор применения модели сосредоточенной массы в гибких тросах. В ней подчеркивается важность математической модели для точного описания динамических характеристик гибких тросов в различных приложениях, таких как системы подводной буксировки и швартовных линий. Обзор охватывает математические принципы модели сосредоточенной массы, реакции троса при различных граничных условиях, численные решения и возможные направления исследований. Авторы видят будущее применение таких систем в обеспечении взаимодействия человека и работа с помощью гибких тросов.

В данной работе акцент сделан на использовании теории неголономной механики для решения поставленной задачи. Ключевым методом, который будет применен, является обобщенный принцип Гаусса. Этот метод,

предложенный в статье [12], позволяет решать системы с неголономными связями высокого порядка.

Применение этой теории для поиска управления, с помощью которого можно погасить колебания тележки с маятниками, можно найти в работе [13]. Данный принцип был применен к задаче управления для гашения колебаний тележки с s маятниками. Были найдены управления с использованием принципа максимума Понтрягина и обобщенного принципа Гаусса. Был рассмотрен частный случай $s = 2$. При кратковременном движении полученные решения были близки. Однако при длительном движении решение, полученное с использованием первого метода, стремилось ввести систему в резонанс, так как управление строилось в виде гармоник с собственными частотами системы. Второй метод, напротив, давал более гладкое решение без скачков в управляющих силах.

В работе [13] также было проведено расширение краевой задачи с последующим решением с помощью обобщенного принципа Гаусса. Это позволило избежать скачков в управляющей силе в начальный и конечный моменты времени. Аналогичные результаты были получены в монографии [14], где задача была решена для двойного математического маятника.

В данной работе будет проведено расширение задачи и рассмотрены системы с тройными маятниками.

Система с тройным математическим маятником

Имеется тележка массы m_0 с укреплённым на ней тройным математическим маятником, имеющим массы m_1, m_2, m_3 и длины нитей l_1, l_2, l_3 . Тележка перемещается вдоль оси Ox . Необходимо найти управление, перемещающее тележку на расстояние S за время T . Будем считать, что система в начальном и конечном положениях находится в покое. Тогда наша цель — найти управление, которое кроме перемещения на заданное расстояние за заданное время также погасит колебания в конечный момент времени.

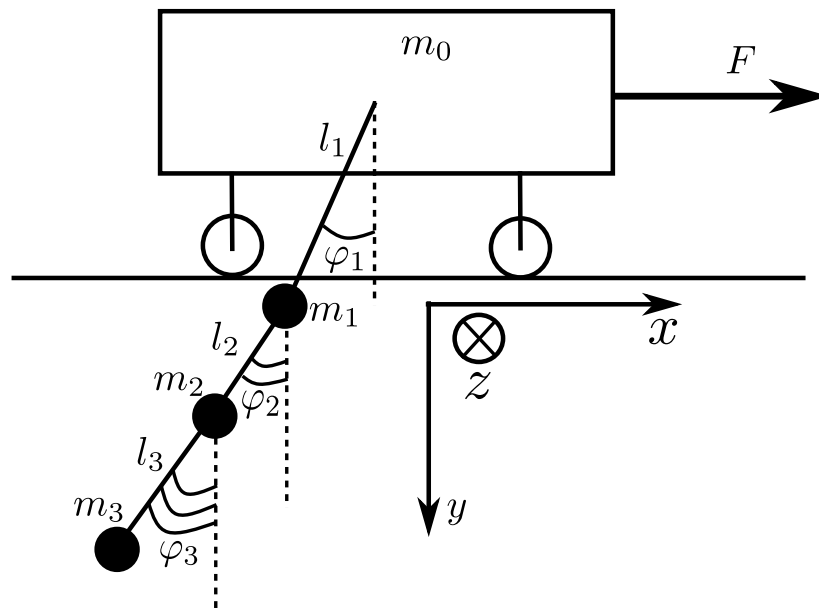


Рис. 2: Тележка с тройным маятником

В качестве обобщённых координат возьмём: $x(t)$ — горизонтальное смещение тележки; $\varphi_i(t)$ — углы поворотов маятников ($i = 1, 2, 3$). Начальная краевая задача в этих координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= 0, & \varphi_1(0) &= 0, & \dot{\varphi}_1(0) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \dot{\varphi}_2(0) &= 0, & \varphi_3(0) &= 0, & \dot{\varphi}_3(0) &= 0, \\ x(T) &= S, & \dot{x}(T) &= 0, & \varphi_1(T) &= 0, & \dot{\varphi}_1(T) &= 0, \\ \varphi_2(T) &= 0, & \dot{\varphi}_2(T) &= 0, & \varphi_3(T) &= 0, & \dot{\varphi}_3(T) &= 0. \end{aligned}$$

Вывод уравнений движения

Введём следующую систему координат. Ось Ox — ось, вдоль которой перемещается тележка. Ось Oy направим вниз, а ось Oz будет направлена от нас. В таком случае положительным направлением поворота для углов φ_i ($i = \overline{1, 3}$) будет поворот по часовой стрелке.

В данной системе координаты центров масс тележки и трёх маятников будут иметь следующий вид:

Координаты	Ox	Oy
Тележка	x	0
I маятник	$x - l_1 \sin \varphi_1$	$l_1 \cos \varphi_1$
II маятник	$x - l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2$	$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$
III маятник	$x - l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3$	$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3$

После записи координат рассматриваемой системы мы можем получить кинетическую и потенциальную энергии. Упрощая их выражения, получаем их в нелинейном виде:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \left((m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \dot{x}^2 + l_1^2 (m_1 + m_2 + m_3) \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 (m_2 + m_3) \dot{\varphi}_2^2 + l_3^2 m_3 \dot{\varphi}_3^2 \right) \\
 &\quad - l_1 (m_1 + m_2 + m_3) \dot{x} \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - l_2 (m_2 + m_3) \dot{x} \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - l_3 m_3 \dot{x} \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 \\
 &\quad + l_1 l_2 (m_2 + m_3) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_1 l_3 m_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \\
 &\quad + l_2 l_3 m_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3); \\
 \Pi &= - \left((m_1 + m_2 + m_3) g l_1 \cos \varphi_1 + (m_2 + m_3) g l_2 \cos \varphi_2 + m_3 g l_3 \cos \varphi_3 \right),
 \end{aligned}$$

или с учётом малости углов φ_i , ($i = \overline{1, 3}$):

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \left((m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \dot{x}^2 + l_1^2 (m_1 + m_2 + m_3) \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 (m_2 + m_3) \dot{\varphi}_2^2 + l_3^2 m_3 \dot{\varphi}_3^2 \right) \\
 &\quad - l_1 (m_1 + m_2 + m_3) \dot{x} \dot{\varphi}_1 - l_2 (m_2 + m_3) \dot{x} \dot{\varphi}_2 - l_3 m_3 \dot{x} \dot{\varphi}_3 \\
 &\quad + l_1 l_2 (m_2 + m_3) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_1 l_3 m_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + l_2 l_3 m_3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3; \\
 \Pi &= \frac{1}{2} \left((m_1 + m_2 + m_3) g l_1 \varphi_1^2 + (m_2 + m_3) g l_2 \varphi_2^2 + m_3 g l_3 \varphi_3^2 \right).
 \end{aligned}$$

При полученных кинетической и потенциальной энергиях мы можем записать следующие уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned}
 M \ddot{x} - l_1 (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{\varphi}_1 - l_2 (m_2 + m_3) \ddot{\varphi}_2 - l_3 m_3 \ddot{\varphi}_3 &= F; \\
 l_1 (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{\varphi}_1 + l_2 (m_2 + m_3) \ddot{\varphi}_2 + l_3 m_3 \ddot{\varphi}_3 - (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} \\
 + g (m_1 + m_2 + m_3) \varphi_1 &= 0; \\
 l_1 (m_2 + m_3) \ddot{\varphi}_1 + l_2 (m_2 + m_3) \ddot{\varphi}_2 + l_3 m_3 \ddot{\varphi}_3 - (m_2 + m_3) \ddot{x} + g (m_2 + m_3) \varphi_2 &= 0; \\
 l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_3 \ddot{\varphi}_3 - \ddot{x} + g \varphi_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь F — введённая управляющая сила, $M = \sum_{i=0}^3 m_i$ — масса всей системы.

Переход к уравнениям движения в главных координатах

Первое уравнение системы (1) можно переписать через абсциссу центра масс системы:

$$x_c = \frac{Mx - l_1(m_1 + m_2 + m_3)\varphi_1 - l_2(m_2 + m_3)\varphi_2 - l_3m_3\varphi_3}{M}.$$

Тогда оно будет иметь вид:

$$M\ddot{x}_c = F$$

Далее выразим \ddot{x} из первого уравнения системы (1) и подставим в остальные уравнения этой системы, чтобы в них появилась зависимость от управляющей силы F и исчезло горизонтальное ускорение тележки \ddot{x} :

$$\begin{aligned} \mu_0\ddot{\varphi}_1 + \alpha_2\frac{\mu_0(1 - \mu_0 - \mu_1)}{1 - \mu_0}\ddot{\varphi}_2 + \alpha_3\frac{\mu_0\mu_3}{1 - \mu_0}\ddot{\varphi}_3 + k^2\varphi_1 &= \frac{F}{Ml_1}; \\ \mu_0\ddot{\varphi}_1 + \alpha_2(\mu_0 + \mu_1)\ddot{\varphi}_2 + \alpha_3\frac{\mu_3(\mu_0 + \mu_1)}{1 - \mu_0 - \mu_1}\ddot{\varphi}_3 + k^2\varphi_2 &= \frac{F}{Ml_1}; \\ \mu_0\ddot{\varphi}_1 + \alpha_2(\mu_0 + \mu_1)\ddot{\varphi}_2 + \alpha_3(1 - \mu_3)\ddot{\varphi}_3 + k^2\varphi_3 &= \frac{F}{Ml_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\mu_i = \frac{m_i}{M}, \quad i = \overline{0, 3}; \quad k^2 = \frac{g}{l_1}; \quad \alpha_i = \frac{l_i}{l_1}, \quad i = 2, 3.$$

Для перехода к главным координатам найдём собственные частоты системы. Подставим в систему (2) φ_i ($i = \overline{1, 3}$) в виде:

$$\varphi_i = A_i \sin(\Omega t + \delta), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Тогда, приравнивая F нулю, получаем однородную систему относительно A_1, A_2, A_3 и Ω . Полученная система имеет вид:

$$\begin{aligned} (k^2 - \mu_0\Omega^2)A_1 - \frac{\alpha_2\mu_0(1 - \mu_0 - \mu_1)\Omega^2}{1 - \mu_0}A_2 - \frac{\alpha_3(\mu_0 + \mu_1)\Omega^2}{1 - \mu_0}A_3 &= 0 \\ -\mu_0\Omega^2A_1 + (k^2 - \alpha_2(\mu_0 + \mu_1)\Omega^2)A_2 - \frac{\alpha_3(\mu_0 + \mu_1)\mu_3\Omega^2}{1 - \mu_0 - \mu_1}A_3 &= 0 \\ -\mu_0\Omega^2A_1 - \alpha_2(\mu_0 + \mu_1)\Omega^2A_2 + (k^2 - \alpha_3(1 - \mu_3)\Omega^2)A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Найдём допустимые ненулевые значения Ω_i ($i = \overline{1, 3}$) из равенства опре-

делителя полученной системы нулю, и сделаем замену $\Omega^2 = k^2\lambda^2$:

$$1 + \gamma_1\lambda^2 + \gamma_2\lambda^4 + \gamma_3\lambda^6 = 0$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -(\alpha_3 + \mu_0 + \alpha_2\mu_0 + \alpha_2\mu_1 - \alpha_3\mu_3); \\ \gamma_2 &= \frac{\alpha_3(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)\mu_0 - \alpha_2 \left[\mu_1^2(\mu_2+\mu_3) - \mu_1(\mu_0+\mu_1)(\mu_2+\alpha_3\mu_2+\mu_3) + \alpha_3\mu_2(\mu_2^2 + (\mu_3-1)\mu_3 + \mu_2(2\mu_3-1)) \right]}{(\mu_2+\mu_3)(1-\mu_0)}; \\ \gamma_3 &= -\frac{\alpha_2\alpha_3\mu_0\mu_1\mu_2}{(\mu_2+\mu_3)(1-\mu_0)}.\end{aligned}$$

При этом нулевая частота системы, соответствующая координате x_c , $\Omega_0 = 0$. После этого можем записать переход к главным координатам в виде:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^3 \Delta_{ij}\theta_j, \quad i = \overline{1,3}, \quad (4)$$

где $\Delta_{ij} = \Delta_i(\Omega_j)$ — алгебраическое дополнение i элемента последней строки системы уравнений (3).

Теперь подставим (4) в (2):

$$\sum_{j=i}^3 B_{ij}(\ddot{\theta}_i + \Omega_i^2\theta_i) = \frac{F}{Ml_1}, \quad j = \overline{1,3}, \quad (5)$$

где B_{ij} — коэффициенты, стоящие перед $\ddot{\theta}_i$ в j уравнении:

$$B_{1j} = \frac{k^4\alpha_3\mu_0\mu_3}{1-\mu_0};$$

$$B_{2j} = \frac{k^4\alpha_3\mu_3(\mu_0^2 - \mu_0 - \mu_1 + \mu_0\mu_1(1 + \lambda_j^2))}{(\mu_0 - 1)(\mu_2 + \mu_3)};$$

$$\begin{aligned}B_{3j} &= \frac{k^4\alpha_3}{1-\mu_0} \left[\left(1 + (1 + \alpha_2)\lambda_j^2\mu_0^2 - \alpha_2\lambda_j^2\mu_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_0[\lambda_j^2(\alpha_2(\mu_1 - 1) - 1) - 1] \right) (1 - \mu_3) + \lambda_j^2\mu_0^2\mu_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_2\lambda_j^2\mu_3(\mu_0 + \mu_1)[\mu_0^2 - \mu_1 + \mu_0(\mu_1(1 + \lambda_j^2) - 1)]}{\mu_2 + \mu_3} \right], \quad j = \overline{1,3}.\end{aligned}$$

Мы можем посмотреть на систему (5), как на линейную неоднородную алгебраическую систему относительно $(\ddot{\theta}_i + \Omega_i^2 \theta_i)$, $i = \overline{1, 3}$. Тогда разрешив её, получим:

$$\ddot{\theta}_i + \Omega_i^2 \theta_i = \beta_i \frac{F}{Ml_1}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

где

$$\beta_1 = \frac{(1 - \mu_0)(\mu_0 + \mu_1 - (1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)\mu_0\mu_1 + \mu_0^2(\lambda_2^2\lambda_3^2\mu_1 - 1))}{k^4\alpha_3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)\mu_0^3\mu_1\mu_3};$$

$$\beta_2 = \frac{(1 - \mu_0)(\mu_0 + \mu_1 - (1 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2)\mu_0\mu_1 + \mu_0^2(\lambda_1^2\lambda_3^2\mu_1 - 1))}{k^4\alpha_3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\mu_0^3\mu_1\mu_3};$$

$$\beta_3 = \frac{(1 - \mu_0)(\mu_0 + \mu_1 - (1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)\mu_0\mu_1 + \mu_0^2(\lambda_1^2\lambda_2^2\mu_1 - 1))}{k^4\alpha_3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\mu_0^3\mu_1\mu_3}.$$

Для того, чтобы управляющая сила в правых частях уравнений входила одинаковым образом, перейдём к следующим координатам, с помощью изменения масштабов:

$$\theta_i = \beta_i \xi_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Таким образом мы получили главные координаты, в которых уравнения движения имеют следующую запись:

$$\ddot{x}_c = \frac{F}{Ml_1}, \quad \ddot{\xi}_i + \Omega_i^2 \xi_i = \frac{F}{Ml_1}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Для перехода к безразмерным уравнениям сделаем замены $x_c = l_1 \xi_0$, $\tau = \Omega_1 t$, и получим систему:

$$\xi_0'' = u, \quad \xi_i'' + \omega_i^2 \xi_i = u, \quad i = \overline{1, 3},$$

где

$$\omega_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_1}, \quad u = \frac{F}{Mg\lambda_1^2}.$$

Штрихи здесь и далее обозначают производные по безразмерному времени τ . Граничные условия для безразмерных координат, учитывая на-

чальные граничные условия:

$$\begin{aligned}\xi_i(0) = 0; \quad \xi'_i(0) = 0, \quad i = \overline{0, 3}; \\ \xi_0(\mathbb{T}) = a, \quad \xi'_0(\mathbb{T}) = 0; \quad \xi_i(\mathbb{T}) = 0, \quad \xi'_i(\mathbb{T}) = 0, \quad i = \overline{1, 3}.\end{aligned}$$

Здесь и далее $\mathbb{T} = \Omega_1 T$ — безразмерное время, за которое происходит перемещение тележки на безразмерное расстояние $a = S/l_1$.

Применение принципа максимума Понтрягина

Для разрешения задачи нам необходимо наложить дополнительное условие. В качестве такого условия можно потребовать минимальности функционала:

$$J[u] = \int_0^{\mathbb{T}} u^2 d\tau. \quad (6)$$

Данное условие позволит нам получить оптимальную управляющую силу. Этот приём используется в теории управления, и одним из способов решения таких задач является принцип максимума Понтрягина.

Для начала перепишем имеющуюся систему 4 дифференциальных уравнений второго порядка в виде системы 8 дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}q'_1 = q_2, \quad q'_2 = u, \quad q'_3 = q_4, \quad q'_4 = u - \omega_1^2 q_3, \\ q'_5 = q_6, \quad q'_6 = u - \omega_2^2 q_5, \quad q'_7 = q_8, \quad q'_8 = u - \omega_3^2 q_7.\end{aligned}$$

Мы можем записать функцию Гамильтона–Понтрягина, соответствующую нашей механической системе, вводя множители Лагранжа:

$$\begin{aligned}H = -u^2 + \lambda_1(\tau)q_2 + \lambda_2(\tau)u + \lambda_3(\tau)q_4 + \lambda_4(\tau)(u - \omega_1^2 q_3) + \\ \lambda_5(\tau)q_6 + \lambda_6(\tau)(u - \omega_2^2 q_5) + \lambda_7(\tau)q_8 + \lambda_8(\tau)(u - \omega_3^2 q_7)\end{aligned}$$

С помощью этой функции можно переписать имеющуюся систему с до-

полнительными уравнениями по неизвестным λ_i и u :

$$\begin{cases} q'_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}; \\ \lambda'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, i = \overline{1, 8}; \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В итоге, мы получили 17 уравнений для нахождения $q_i, \lambda_i, u (i = \overline{1, 8})$, которые дают необходимое условие минимальности функционала (6) и позволяет выразить u через λ_i :

$$u(\tau) = -\frac{1}{2}(\lambda_2(\tau) + \lambda_4(\tau) + \lambda_6(\tau) + \lambda_8(\tau)) \quad (8)$$

Теперь рассмотрим систему с λ_i , которая задаётся второй группой уравнений в (7). Её можно разрешить отдельно, при этом получим 8 неизвестных постоянных интегрирования. Конечное выражение для u с 8 произвольными постоянными имеет вид:

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + \sum_{i=1}^3 (C_{2i+1} \sin(\omega_i\tau) + C_{2i+2} \cos(\omega_i\tau)) \quad (9)$$

Подставим u в виде (9) в интегралы Дюамеля для нахождения $\xi_i (i = \overline{0, 3})$:

$$\begin{aligned} \xi_0(\tau) &= \int_0^\tau u(\tau_0)(\tau - \tau_0)d\tau_0; \\ \xi_i(\tau) &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^\tau u(\tau_0) \sin[\omega_i(\tau - \tau_0)]d\tau_0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

В начальный момент времени интегралы Дюамеля полностью удовлетворяют состоянию покоя системы. Произвольные постоянные мы сможем найти из граничных условий в конечный момент времени.

Таким образом, мы нашли управление с помощью принципа максимума Понтрягина. Изменение безразмерных координат мы можем получить из интегралов Дюамеля (10).

Применение обобщённого принципа Гаусса

В монографии [14] было указано, что управляющая сила, полученная предыдущим способом, удовлетворяет дифференциальному соотношению:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_2^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_3^2 \right) F = 0. \quad (11)$$

Подставляя выражения для F из первого уравнения (1) в (11), мы получаем линейную неголономную связь 10 порядка в явном виде:

$$\sum_{i=2}^5 \left(a_{2i,x} \frac{d^{2i}x}{dt^{2i}} + a_{2i,\varphi_1} \frac{d^{2i}\varphi_1}{dt^{2i}} + a_{2i,\varphi_2} \frac{d^{2i}\varphi_2}{dt^{2i}} + a_{2i,\varphi_3} \frac{d^{2i}\varphi_3}{dt^{2i}} \right) = 0.$$

Здесь множители при производных являются известными константами, зависящими от параметров системы. После обнаружения подобной связи в монографии [14] было предложено использовать обобщённый принцип Гаусса для нахождения управления как задачи, в которой непрерывно выполняется неголономная связь высокого порядка. Применив его, получаем:

$$\delta^{(10)} \left(R_{(8)} \right)^2 = 0. \quad (12)$$

где $\delta^{(10)}$ означает, что варьруются только 10-ые производные от обобщённых координат, $R_{(8)}$ — 8 производная по времени от реакции связи. Согласно (12) линейная связь 10-ого порядка будет идеальной, если её реакция будет минимальной. В результате приходим к уравнению:

$$\frac{d^8 u}{d\tau^8} = 0,$$

откуда и находим управляющую силу в виде полинома:

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^8 C_i \tau^{i-1}.$$

Произвольные постоянные находятся таким же способом, как и при решении первым методом. Координаты ξ_i ($i = \overline{0, 3}$) получаем аналогично через интегралы Дюамеля.

Применение обобщённого принципа Гаусса с расширенной краевой задачей

Как далее будет показано на графиках, решение данной задачи обоими методами имеет недостаток в виде скачков управляющей силы в начальный и конечный моменты времени. При большем времени движения при решении вторым методом эти скачки отсутствуют, но при меньшем времени движения этот недостаток остаётся.

Для построения управляющей силы без скачков в монографии [14] было предложено расширение краевой задачи. Для этого нужно добавить условия на вторые производные в начальный и конечный моменты времени для горизонтального перемещения тележки:

$$\ddot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(T) = 0.$$

Для записи этого условия в безразмерных координатах учтём 3 уравнения Лагранжа второго рода в начальный момент времени:

$$\begin{aligned} l_1(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{\varphi}_1(0) + l_2(m_2 + m_3)\ddot{\varphi}_2(0) + l_3m_3\ddot{\varphi}_3(0) &= 0 \\ l_1(m_2 + m_3)\ddot{\varphi}_1(0) + l_2(m_2 + m_3)\ddot{\varphi}_2(0) + l_3m_3\ddot{\varphi}_3(0) &= 0; \\ l_1\ddot{\varphi}_1(0) + l_2\ddot{\varphi}_2(0) + l_3\ddot{\varphi}_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Посмотрим на эту систему, как на линейную однородную алгебраическую систему относительно $\ddot{\varphi}_1(0)$, $\ddot{\varphi}_2(0)$, $\ddot{\varphi}_3(0)$. Её определитель равен произведению $l_1l_2l_3m_1m_2$, следовательно, он не обращается в ноль и эта система не имеет нетривиальных решений и:

$$\ddot{\varphi}_1(0) = 0; \quad \ddot{\varphi}_2(0) = 0; \quad \ddot{\varphi}_3(0) = 0.$$

Следовательно в безразмерных координатах расширенная краевая задача переписывается следующим образом:

$$\xi_0''(0) = 0, \quad \xi_0''(T) = 0.$$

Тогда из обобщённого принципа Гаусса следует, что

$$\delta^{(12)}\left(R_{(10)}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{10}u}{d\tau^{10}} = 0. \quad (13)$$

И мы можем найти безразмерную управляющую силу в виде многочлена 9 степени:

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^{10} C_i \tau^{i-1}.$$

после чего находим произвольные постоянные и безразмерные координаты, также как и ранее.

Численный расчет

Теперь посмотрим на систему с параметрами:

$$\mu_0 = 10/19, \mu_1 = 2/19, \mu_2 = 3/19, \mu_3 = 4/19, \alpha_2 = 3/2, \alpha_3 = 3/4, a = 5/8.$$

Время \mathbb{T} , за которое тележка перемещается на расстояние a , будем увеличивать для сравнения полученных решений. На графиках решения, полученные разными методами, отмечены следующим образом: 1 — принцип максимума Понтрягина; 2 — обобщённый принцип Гаусса; 3 — обобщённый принцип Гаусса с расширенной краевой задачей.

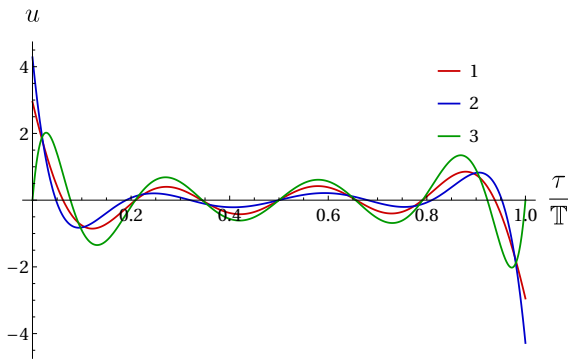


Рис. 3: Управляющая сила при $\mathbb{T} = 3\pi/2$

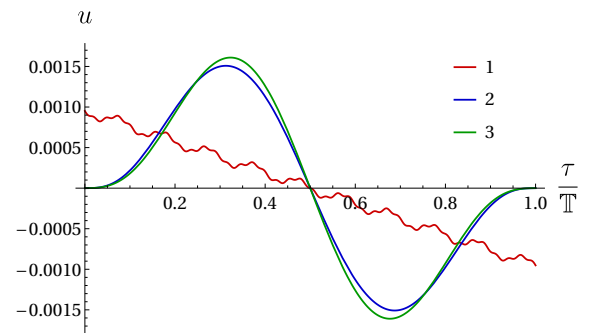


Рис. 4: Управляющая сила при $\mathbb{T} = 20\pi$

На графиках можно заметить, что первые два метода дают близкие управляющие силы в случае кратковременного движения. При длительном движении более близкими оказываются силы, полученные последними двумя решениями. Как указывалось ранее, расширение краевой задачи

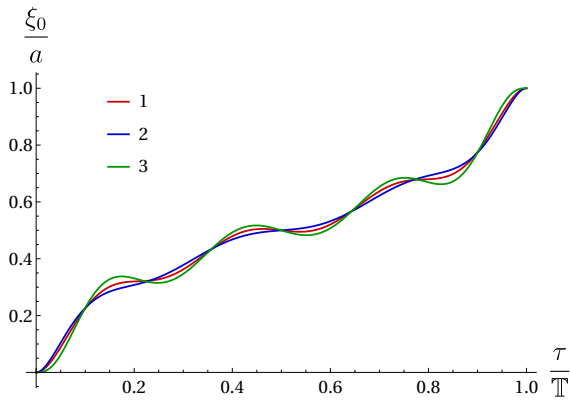


Рис. 5: ξ_0 при $\mathbb{T} = 3\pi/2$

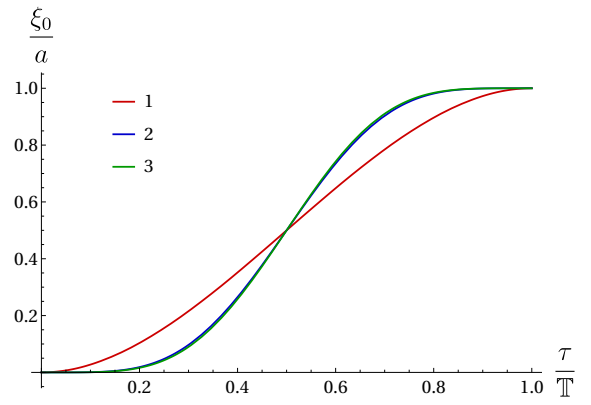


Рис. 6: ξ_0 при $\mathbb{T} = 20\pi$

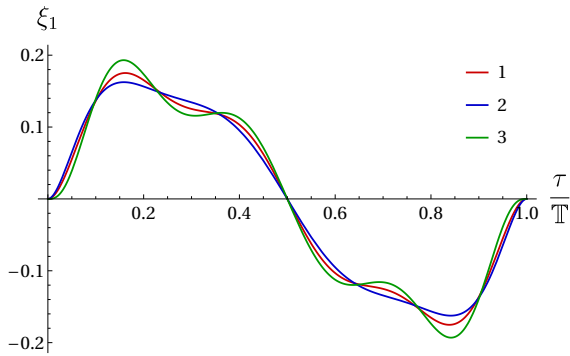


Рис. 7: ξ_1 при $\mathbb{T} = 3\pi/2$

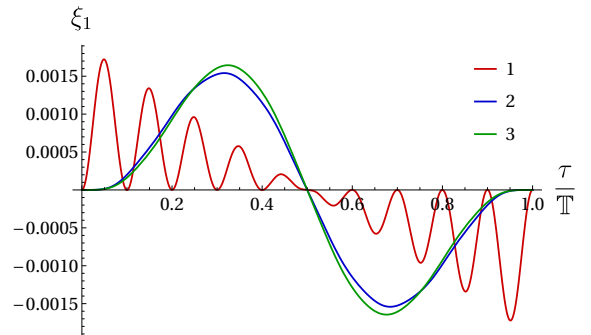


Рис. 8: ξ_1 при $\mathbb{T} = 20\pi$

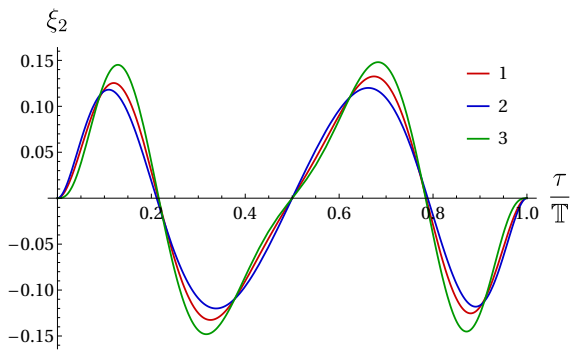


Рис. 9: ξ_2 при $\mathbb{T} = 3\pi/2$

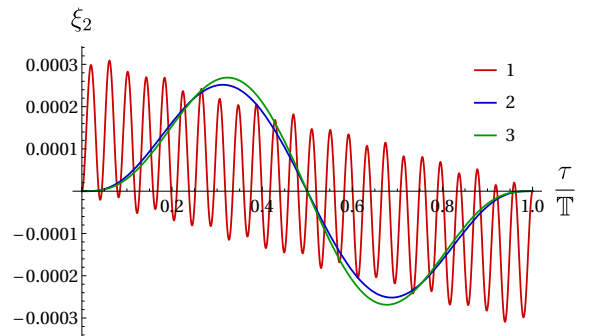


Рис. 10: ξ_2 при $\mathbb{T} = 20\pi$

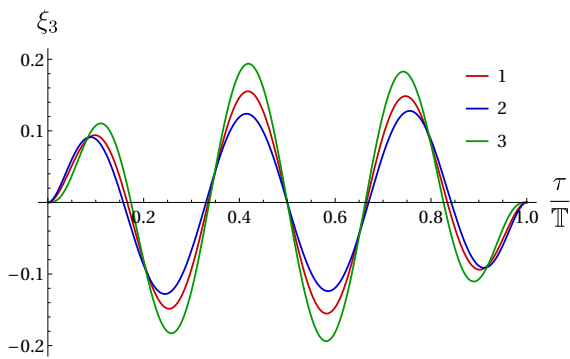


Рис. 11: x_3 при $\mathbb{T} = 3\pi/2$

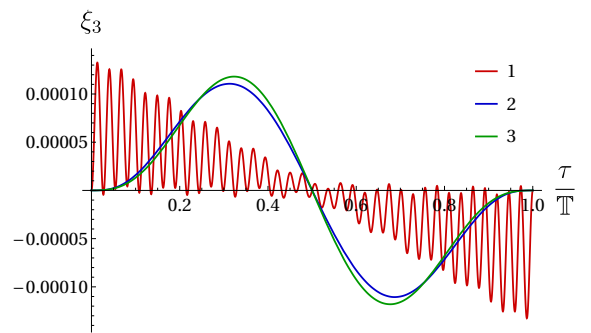


Рис. 12: ξ_3 при $\mathbb{T} = 20\pi$

позволяет нам избавиться от скачков управляющей силы в начальный и конечный моменты времени при кратковременном движении. Безразмерные пространственные координаты довольно близки для всех трёх методов в случае кратковременного движения. Значительное изменение поведения мы можем пронаблюдать при увеличении длительности движения. Первый метод, по которому управление получено в виде гармоник с собственными частотами, даёт управление, которое раскачивает маятники во всё время движения. Хотя амплитуды колебаний и малы, но данное управление стремится ввести систему в резонанс.

Ранее мы рассматривали различные значения масс и длин маятников. Более практическое значение имеет задача, где данные значения равны, кроме массы последнего маятника, представляющей собой переносимый груз. Переходя таким образом к системе с сосредоточенными массами, рассмотрим систему со следующими размерными параметрами:

$$m_0 = 20 \text{ кг}, m_1 = m_2 = 2 \text{ кг}, l_1 = l_2 = l_3 = 8 \text{ м}, S = 30 \text{ м}, T = 10 \text{ с}.$$

При длительном движении амплитуды колебаний маятников довольно малы. Отличия в значениях углов отклонений можно пронаблюдать в случае кратковременного движения. Интерес в этом случае представляет то, насколько сильно масса груза влияет на амплитуды колебаний.

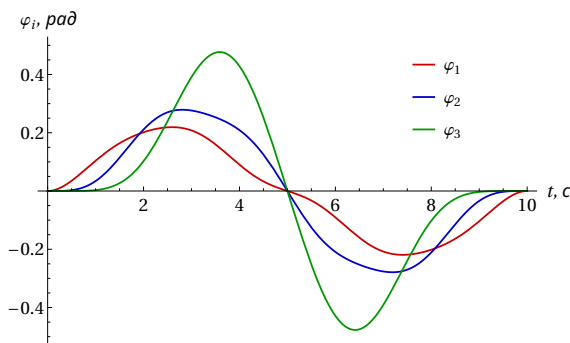


Рис. 13: Углы φ_i при $m_3 = 2$ кг, второе решение

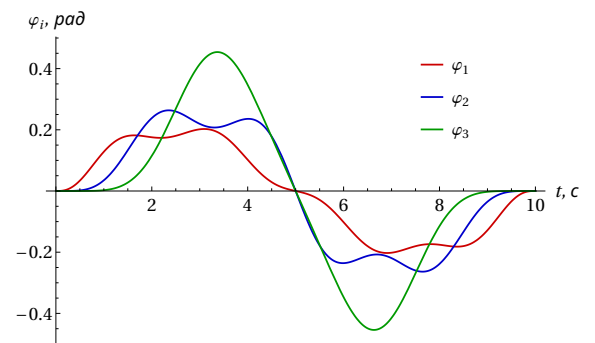


Рис. 14: Углы φ_i при $m_3 = 2$ кг, третье решение

На графиках можно заметить, как при увеличении массы груза углы отклонений маятников становятся ближе друг к другу, что и следовало ожидать. Но при малых массах переносимого груза маятники последовательно раскачивают друг друга и максимальное отклонение приобретает последний маятник.

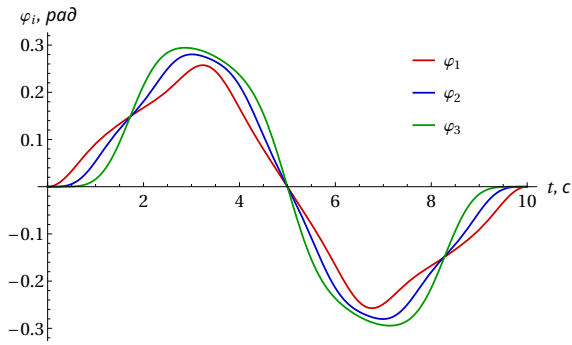


Рис. 15: Углы φ_i при $m_3 = 10$ кг, второе решение

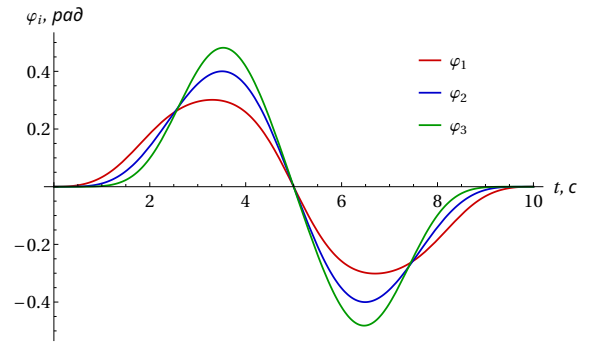


Рис. 16: Углы φ_i при $m_3 = 10$ кг, третье решение

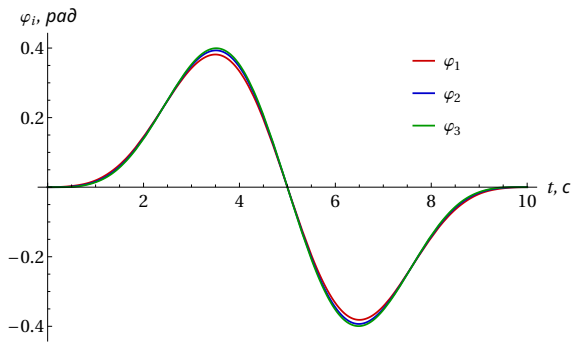


Рис. 17: Углы φ_i при $m_3 = 100$ кг, второе решение

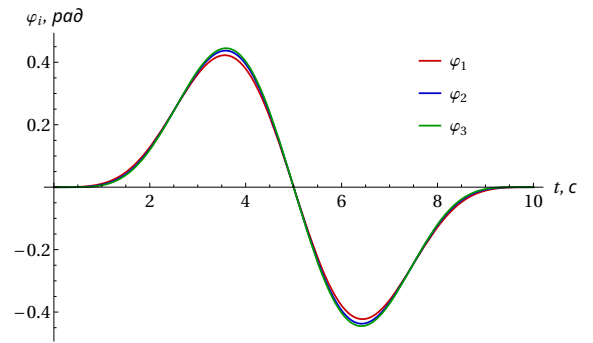


Рис. 18: Углы φ_i при $m_3 = 100$ кг, третье решение

Система с тройным стержневым маятником

Пусть имеется тележка массы m_0 (см. рис. 19) с укрепленным на ней тройным стержневым маятником, имеющим массы m_i и длины стержней L_i , ($i = \overline{1,3}$). Тележка будет перемещаться вдоль оси Ox , направленной вправо, ось Oy направим вниз. На конце тройного маятника укреплен груз массы m_4 . Задача состоит в нахождении управления, переводящего тележку из начального положения покоя на расстояние S за время T таким образом, чтобы в конечный момент времени система находилась в покое. Тогда наша цель — найти управление, которое, кроме перемещения на заданное расстояние за заданное время, также погасит колебания в конечный момент времени у тройного маятника. При такой постановке задачи нас не интересуют колебания маятника во время движения, мы сможем только гарантировать покой в конечный момент времени.

В качестве обобщенных координат возьмём: $x(t)$ — горизонтальное смещение тележки; $\varphi_i(t)$ — углы поворотов стержней маятника ($i = \overline{1,3}$).

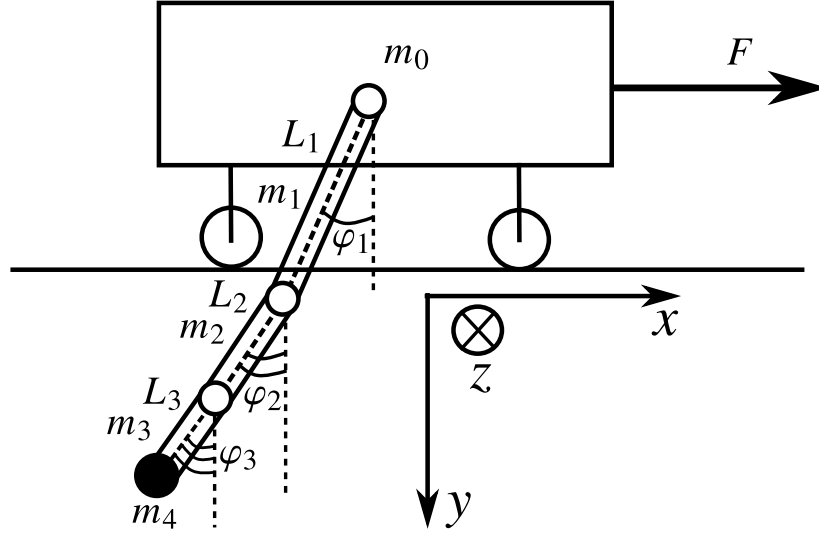


Рис. 19: Тележка с тройным стержневым маятником в плоскости Oxy

Граничная задача в этих координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad x(T) = S; \quad \dot{x}(T) = 0; \\ \varphi_i(0) = 0; \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad \varphi_i(T) = 0; \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (14)$$

При введенных ранее осях Ox, Oy ось Oz будет направлена от нас. В таком случае положительным направлением поворота для углов $\varphi_i (i = \overline{1,3})$ будет поворот по часовой стрелке. В данной системе координаты центров масс тележки, трёх стержней и груза будут иметь следующий вид:

Координаты	x_i	y_i
Тележка, $i = 0$	x	0
I стержень, $i = 1$	$x - \frac{L_1}{2} \sin \varphi_1$	$\frac{L_1}{2} \cos \varphi_1$
II стержень, $i = 2$	$x - L_1 \sin \varphi_1 - \frac{L_2}{2} \sin \varphi_2$	$L_1 \cos \varphi_1 + \frac{L_2}{2} \cos \varphi_2$
III стержень, $i = 3$	$x - L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin \varphi_2 - \frac{L_3}{2} \sin \varphi_3$	$L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2 + \frac{L_3}{2} \cos \varphi_3$
Груз, $i = 4$	$x - L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin \varphi_2 - L_3 \sin \varphi_3$	$L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2 + L_3 \cos \varphi_3$

После записи координат рассматриваемой системы мы можем получить кинетическую и потенциальную энергии. Для более простой записи введём обозначения для абсцисс и ординат центров масс тележки, стержней и груза x_i и $y_i (i = \overline{0,4})$, соответственно. Также будем считать углы отклонения стержней $\varphi_i, (i = \overline{1,3})$ малыми. Это позволяет нам записать энергии

системы в виде:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^4 \left(\frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} J_{zi} \dot{\varphi}_i^2, \quad J_{zi} = \frac{L_i^2 m_i}{12}, \quad i = \overline{1, 3}; \\ \Pi &= \frac{g}{2} ((m_1 + m_2 + m_3) L_1 \varphi_1^2 + (m_2 + m_3) L_2 \varphi_2^2 + m_3 L_3 \varphi_3^2). \end{aligned}$$

При полученных кинетической и потенциальной энергиях мы можем записать следующие уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} M \ddot{x} - \sum_{i=1}^3 L_i D_{0,i} \ddot{\varphi}_i &= F; \\ D_{i,0} (g \varphi_i - \ddot{x}) + \sum_{j=1}^3 D_{i,j} L_j \ddot{\varphi}_j &= 0, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$M = \sum_{i=0}^4 m_i, \quad D_{i,j} = \frac{m_i}{2 + \delta_{i,j}} + \sum_{k=i+1}^4 m_k, \quad i \geq j; \quad i, j = \overline{0, 3}.$$

Здесь F — введённая управляющая сила, M — масса всей системы, $D_{i,j}$ — симметричная матрица, элементы которой зависят от масс системы. На данном этапе исследования рассматриваемой механической системы мы имеем 4 уравнения и 5 неизвестных. Кроме обобщённых координат, искомой является и управляющая сила, явным образом входящая в первое уравнение системы (15). Но перед тем как искать силу, мы перейдём к главным координатам, в которых неизвестные пространственные переменные в уравнениях будут разделены.

Первую из главных координат можно явным образом выделить из первого уравнения — это абсцисса центра масс всей системы. Обозначим её через x_c . Обратим внимание на вторую группу из 3 уравнений системы (15). В них участвуют 4 неизвестные. Выразим из первого уравнения (15) \ddot{x} и подставим в следующие. У нас также останутся 4 неизвестные, но вместо горизонтального ускорения тележки в них войдёт управляющая сила, на которую мы пока не обращаем внимания. Промежуточным результатом преобразования уравнений движения являются:

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_c &= F, \quad D_{i,0} \varphi_j + \sum_{j=1}^3 L_j \tilde{D}_{i,j} \ddot{\varphi}_j = D_{i,0} F, \quad i = \overline{1, 3}. \\ \tilde{D}_{i,j} &= D_{i,j} - D_{0,i} D_{0,j}, \quad i \geq j; \quad i, j = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для разделения переменных во второй группе уравнений (16) будем искать собственные частоты и формы механической системы. Найдя собственные частоты Ω_i , ($i = \overline{1, 3}$), можно записать переход от обобщённых координат φ_i к главным координатам θ_i . Этот переход будет линейным, а коэффициенты для матрицы перехода находятся из собственных форм системы. Дополнительно отметим, что у рассматриваемой механической системы имеется и нулевая собственная частота, из-за чего в первом уравнении (16) из пространственных неизвестных присутствует только \ddot{x}_c . Подставляя в три последних уравнения (16) θ_i вместо φ_i , получаем систему 3 неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, в которой средствами линейной алгебры мы можем разделить переменные. Но в них неоднородности будут различными. Поэтому сделаем дополнительный переход от θ_i к ξ_i , ($i = \overline{1, 3}$) с помощью изменения масштабов, тем самым добьемся одинаковых правых частей во всех уравнениях. На этом переход к главным координатам закончен, но дополнительно можно перейти к безразмерным уравнениям движения с помощью замен:

$$\tau = \Omega_1 t, \quad \omega_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_1}, \quad \mathbb{T} = T\Omega_1, \quad \xi_0 = \frac{x_c}{L_1}, \quad a = \frac{S}{L_1}, \quad u = \frac{F}{ML_1\Omega_1^2}.$$

Теперь задача запишется следующим образом:

$$\xi_0'' = u, \quad \xi_i'' + \omega_i^2 \xi_i = u, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \xi_i(0) = 0; \quad \xi_i'(0) = 0, \quad i = \overline{0, 3}; \\ \xi_0(\mathbb{T}) = a; \quad \xi_0'(\mathbb{T}) = 0; \quad \xi_i(\mathbb{T}) = 0; \quad \xi_i'(\mathbb{T}) = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь и далее штрихи обозначают дифференцирование по безразмерному времени τ . Система уравнений (17) представляет собой безразмерные уравнения движения в главных координатах с безразмерной управляющей силой u . Размерные граничные условия (14) имеют в безразмерном виде запись (18). Вспомним, что уравнений у нас на одно меньше, чем нужно для однозначного разрешения системы. Следовательно, нам необходимо дополнительное условие, которое, например, можно наложить на управляющую силу.

Использование метода теории управления

Одним из распространенных методов решения задач управления является метод, основанный на применении принципа максимума Понтрягина [15]. Применим его, минимизируя согласно монографии [16] функционал от квадрата управляющей силы:

$$J[u] = \int_0^T u^2 d\tau. \quad (19)$$

Минимизация функционала (19) с учётом системы (17) даёт нам управление:

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + \sum_{i=1}^3 (C_{2i+1} \sin(\omega_i\tau) + C_{2i+2} \cos(\omega_i\tau))$$

в виде суммы линейной функции и гармоник с безразмерными собственными частотами механической системы. При нулевых начальных условиях решение для пространственных координат можно записать через интегралы Дюамеля (10). Произвольные постоянные мы сможем найти из условий в конечный момент времени. Для анализа решения можно построить графики безразмерных величин (рис. 20–23), отличающихся от управляющей силы и горизонтального перемещения центра масс системы множителями. Рассмотрим две длительности движения системы. Для кратковременного движения возьмём $T = \pi$, а для длительного движения $T = 20\pi$.

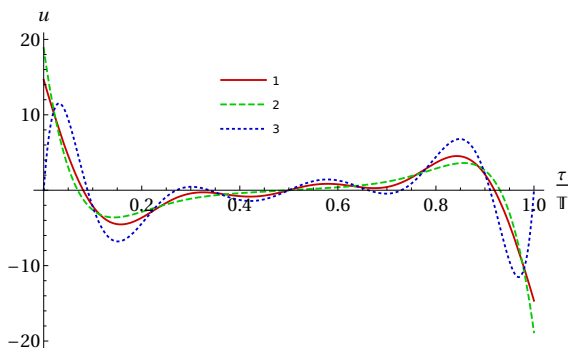


Рис. 20: Управляющая сила при $T = \pi$

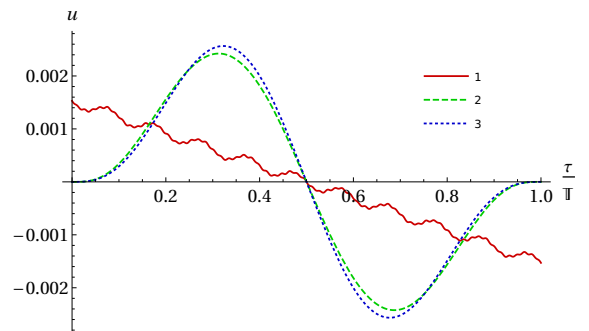


Рис. 21: Управляющая сила при $T = 20\pi$

Решения, полученные с помощью принципа максимума Понтрягина, на графиках отмечены красной сплошной линией. При построении графиков

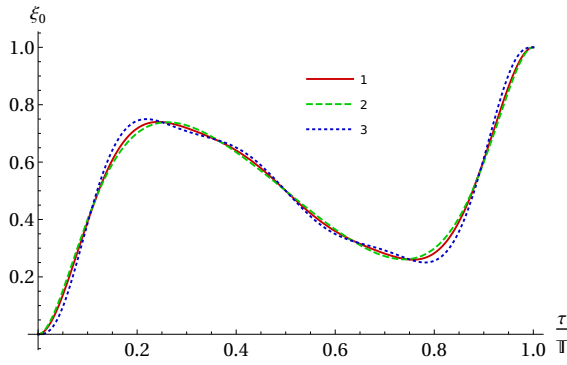


Рис. 22: ξ_0 при $T = \pi$

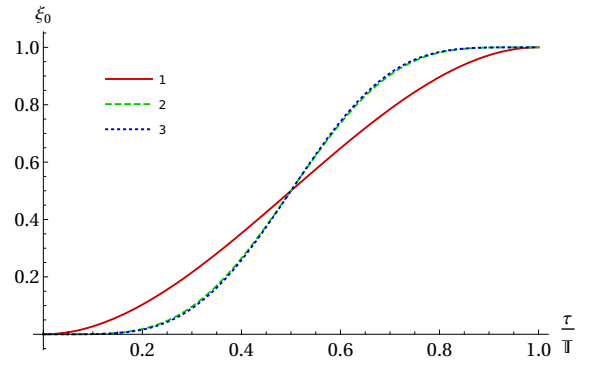


Рис. 23: ξ_0 при $T = 20\pi$

были использованы следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 10/19, \mu_1 = 2/19, \mu_2 = 1/19, \mu_3 = 2/19, \mu_4 = 1/19, \\ \alpha_2 &= 3/2, \alpha_3 = 3/4, a = 8. \end{aligned}$$

На рис. 20 – 21 можно заметить, что управляющая сила имеет ненулевые значения в начальный и конечный моменты времени и при кратковременном и при длительном движениях системы. При длительном движении управляющая сила имеет заметные колебания, так как решение получено в виде гармоник. При увеличении времени движения полученное управление стремится ввести систему в резонанс из-за наличия собственных частот системы в прикладываемой к системе силе. Далее будут представлены графики для ξ_i , $i = \overline{1, 3}$ (см. рис. 24–29), на которых можно пронаблюдать увеличение числа колебаний при увеличении времени движения.

Использование неголономной механики

В монографии [14] было показано, что при получении решения задачи о гашении колебаний тележки с маятниками с помощью принципа максимума Понтрягина непрерывно выполняется неголономная связь высокого порядка. В нашем случае управляющая сила удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_2^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_3^2 \right) F = 0, \quad (20)$$

Уравнение связи в явном виде получим, подставляя выражения для F из первого уравнения (15) в (20):

$$\sum_{i=2}^5 \left(a_{2i,x} \frac{d^{2i}x}{dt^{2i}} + a_{2i,\varphi_1} \frac{d^{2i}\varphi_1}{dt^{2i}} + a_{2i,\varphi_2} \frac{d^{2i}\varphi_2}{dt^{2i}} + a_{2i,\varphi_3} \frac{d^{2i}\varphi_3}{dt^{2i}} \right) = 0. \quad (21)$$

При обнаружении подобной связи в монографии [14] и статье [13] было предложено использовать обобщённый принцип Гаусса для решения задачи как задачи, в которой непрерывно выполняется линейная неголономная связь 10 порядка. Обобщенный принцип Гаусс был предложен в [12]. Обобщенный принцип Гаусса для связи (21) запишется в виде

$$\delta^{(10)} \left(R_{(8)} \right)^2 = 0. \quad (22)$$

Здесь $\delta^{(10)}$ означает, что варьируются только 10-ые производные от обобщённых координат, $R_{(8)}$ — восьмая производная по времени от реакции связи (21).

Согласно (22) линейная связь 10-ого порядка будет идеальной, если квадрат восьмой производной от реакции связи будет минимальным (в нашем случае равным нулю). При использовании теории движения неголономных систем со связью высокого порядка для решения задачи теории управления реакция связи играет роль искомой силы управления. Поэтому в результате приходим к уравнению

$$\frac{d^8 u}{d\tau^8} = 0,$$

откуда и получаем представление силы управления в виде полинома:

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^8 C_i \tau^{i-1}.$$

Произвольные постоянные находятся таким же способом, как и при использовании принципа максимума Понтрягина.

На графиках полученные решения отмечены зелёной пунктирной линией. При кратковременном движении решение данной задачи данным методом также имеет недостаток в виде скачков управляющей силы в начальный и конечный моменты времени. Интересно, что при большем времени движения обобщённый принцип Гаусса устраняет эти скачки, но при мень-

шем времени движения этот недостаток остаётся. Отметим, что решения полученные обоими методами, почти совпадают при кратковременном движении системы.

Для построения управляющей силы без скачков в монографии [14] и статье [13] было предложено расширение краевой задачи. Для этого нужно добавить условия на вторые производные в начальный и конечный моменты времени для горизонтального перемещения тележки:

$$\ddot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(T) = 0.$$

Для записи этого условия в безразмерных координатах учтём 3 уравнения Лагранжа второго рода в начальный момент времени:

$$\sum_{j=1}^3 L_j D_{i,j} \ddot{\varphi}_j(0) = 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Посмотрим на эту систему как на линейную однородную алгебраическую систему относительно $\ddot{\varphi}_1(0), \ddot{\varphi}_2(0), \ddot{\varphi}_3(0)$. Её определитель не обращается в нуль, поэтому эта система не имеет нетривиальных решений, отсюда $\ddot{\varphi}_i(0) = 0, i = \overline{1,3}$. Поэтому в безразмерных координатах дополнительные дифференциальные уравнения расширенной краевой задачи переписываются следующим образом:

$$\xi_0''(0) = 0, \quad \xi_0''(T) = 0.$$

Теперь согласно обобщенному принципу Гаусса получаем:

$$\delta^{(12)} \left(R_{(10)} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^{10}u}{d\tau^{10}} = 0.$$

Итак, безразмерную управляющую силу можем записать в виде многочлена 9 степени

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^{10} C_i \tau^{i-1},$$

после чего находим произвольные постоянные с помощью интегралов Дюамеля.

На графиках данные решения отмечены синей пунктирной линией. С

помощью расширения краевой задачи мы смогли убрать скачки управляющей силы при кратковременном движении, при этом данное решение является более гладким по сравнению с полученными ранее.

Построим графики безразмерных координат $\xi_i, i = \overline{1,3}$. Они отличаются от θ_i на множители, и с помощью их линейных комбинаций можно получить изначально введённые обобщённые координаты φ_i .

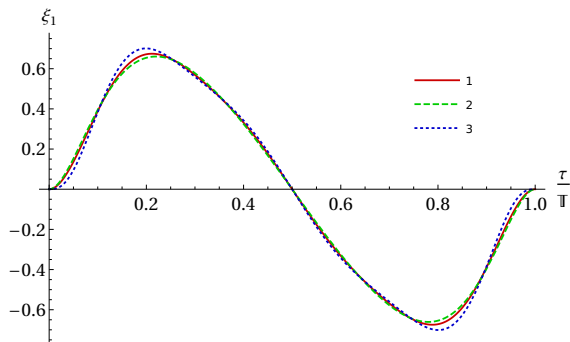


Рис. 24: ξ_1 при $\mathbb{T} = \pi$

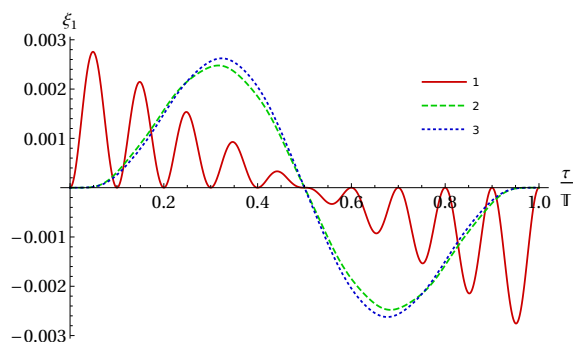


Рис. 25: ξ_1 при $\mathbb{T} = 20\pi$

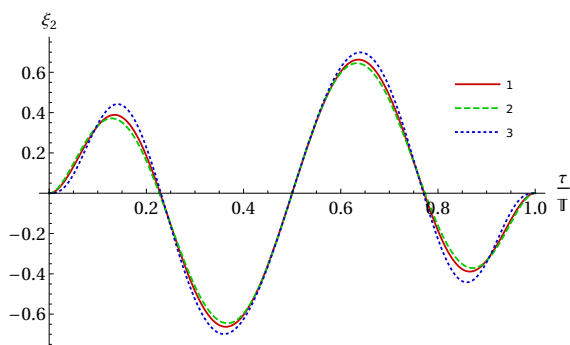


Рис. 26: ξ_2 при $\mathbb{T} = \pi$

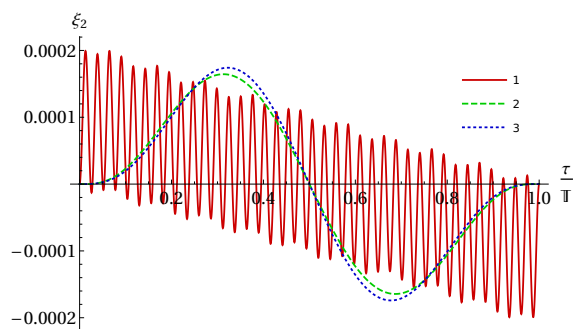


Рис. 27: ξ_2 при $\mathbb{T} = 20\pi$

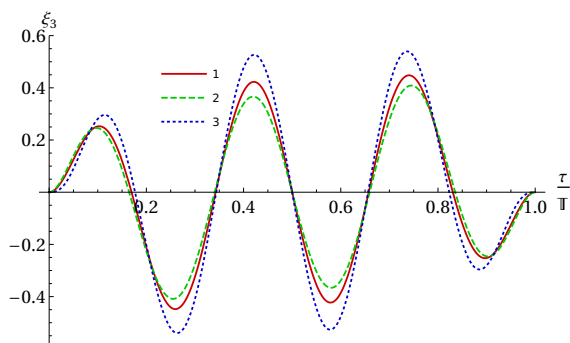


Рис. 28: ξ_3 при $\mathbb{T} = \pi$

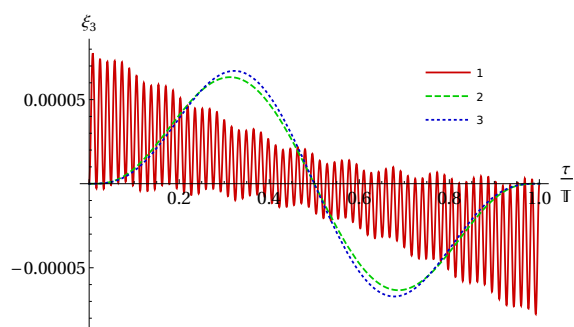


Рис. 29: ξ_3 при $\mathbb{T} = 20\pi$

На графиках особенно заметно, что решения для $\xi_i, i = \overline{1,3}$, полученные первыми двумя методами, почти совпадают при кратковременном движении. При увеличении времени движения увеличивается и частота колебаний для первого решения, но одновременно происходит уменьшение

амплитуд. Решения, полученные последними двумя методами, значительно отличаются поведением от полученного первым при более длительном движении. Это можно объяснить тем, что управляющая сила, найденная методами неголономной механики, представлена полиномами, в то время как эта же сила найденная методом теории управления, содержит гармоники с собственными частотами системы, что при длительном движении раскачивает систему.

Заключение

Данная работа продолжает исследование применений методов неголономной механики в задачах управления, описанных в [13, 14]. Расширение задачи до тележки с тройными маятниками показывает схожий результат. Увеличение числа звеньев может помочь учесть динамику троса, с помощью которого переносится некоторый груз. Как было видно из графиков, при массе троса сравнимой с массой переносимого тела дискретизация уточняет его поведение. При увеличении длительности движения логичнее рассматривать данную систему как тележку с одиночным маятником. Так как в данном случае амплитуды колебаний будут уменьшаться.

Обобщая полученные результаты, можно сказать следующее. Первое решение, полученное классическим методом теории управления, дало нам управляющую силу в виде тригонометрических функций с собственными частотами системы. Как указывалось в работе, такое решение имеет скачки управляющей силы и стремится ввести систему в резонанс при длительном времени движения. Решение вторым методом позволило избавиться от этих недостатков при длительном движении, так как решение было найдено в виде полинома. Расширение краевой задачи позволило сгладить полученные решения и избавиться от скачков управляющей силы при кратковременном движении. Данные утверждения истины для обоих случаев, как тройного математического маятника, так и тройного стержневого. Это объясняется отсутствием качественных изменений при переходе от математических маятников к стержневым.

Список литературы

- [1] Yushkov M. P., Bondarenko S. O. Suppression of Oscillations of a Loaded Flexible Robotic “ARM” as a Generalized Chebyshev Problem //Advances in Solid and Fracture Mechanics: A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of Nikita Morozov. – Cham : Springer International Publishing, 2022. – С. 249-258. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_16
- [2] Юшков М. П. Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I //Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6. – №. 4. – С. 680-701. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.413>
- [3] Abdel-Rahman E. M., Nayfeh A. H., Masoud Z. N. Dynamics and control of cranes: A review //Journal of Vibration and control. – 2003. – Т. 9. – №. 7. – С. 863-908.
- [4] Hyla P. The crane control systems: A survey //2012 17th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR). – IEEE, 2012. – С. 505-509.
- [5] Ramli L. et al. Control strategies for crane systems: A comprehensive review //Mechanical Systems and Signal Processing. – 2017. – Т. 95. – С. 1-23., <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.03.015>
- [6] Field J. A. The optimization of the performance of an ore bridge //Transactions of the Engineering Institute of Canada. – 1961. – Т. 5. – №. 3. – С. 163-169.
- [7] Manson G. A. Time-optimal control of an overhead crane model //Optimal Control Applications and Methods. – 1982. – Т. 3. – №. 2. – С. 115-120.
- [8] Karihaloo B. L., Parbery R. D. Optimal control of a dynamical system representing a gantry crane //Journal of optimization theory and applications. – 1982. – Т. 36. – С. 409-417.
- [9] Auernig J. W., Troger H. Time optimal control of overhead cranes with hoisting of the load //Automatica. – 1987. – Т. 23. – №. 4. – С. 437-447.

- [10] Юшков М. П. Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2020. – Т. 7. – №. 4. – С. 714-733.
- [11] Chen X. et al. Lumped Mass Model for Flexible Cable: A Review // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2021. – Т. 1995. – №. 1. – С. 12-29.
- [12] Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Доклады АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328-1330.
- [13] Zegzhda S. et al. A novel approach to suppression of oscillations // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2018. – Т. 98. – №. 5. – С. 781-788.
- [14] Зегжда С.А., Юшков М.П., Солтаханов Ш.Х., Шатров Е.А. Неголономная механика и теория управления. М.; Физматлит, 2018.
- [15] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
- [16] Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями М.: Наука, 1980.