Санкт–Петербургский государственный университет

Кафедра теории управления

БЕЛОВ Александр Иванович

Выпускная квалификационная работа магистра

Критерии устойчивости линейных систем с запаздыванием на основе матриц Ляпунова

Уровень образования: магистратура
Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5517.2021 «Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»
Профиль «Прикладная математика, информатика и процессы управления»

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры теории управления
Александрова Ирина Васильевна

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук, доцент,
зав. лаб. математической ТУ УДГУ
Зайцев Василий Александрович

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

Обозначения и сокращения

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно,
- $\mathbb{R}^{n\times n}$ — множество вещественных матриц размерности $n \times n$,
- $\mathbb{R}^{n\times 1}$ — множество вещественных векторов-столбцов размерности n,
- $\mathbb{R}^{1\times n}$ — множество вещественных векторов-строчек размерности n,
- $\mathbb{N}_{\geqslant k}$ — множество натуральных чисел вида $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$,
- $\lceil x \rceil$ — верхняя целая часть числа x, т. е. единственное число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x \leqslant n < x + 1$,
- $\lfloor x \rfloor$ — нижняя целая часть числа x, т. е. единственное число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $x - 1 < n \leqslant x$,
- через $\{A_{i,j}\}_{i,j=1}^{N}$ обозначается блочная матрица размерности $nN \times nN$, где блоки $A_{i,j}$ – матрицы размерности $n \times n$,
- $E_{n\times n}, 0_{n\times n}$ — единичная и нулевая матрицы размерности $n \times n$,
- $PC\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ — множество кусочно-непрерывных функций (т.е. непрерывных функций, за исключением конечного числа точек, в которых имеются разрывы первого рода), заданных на отрезке $[a,b]$, и действующих в пространство $\mathbb{R}^n$,
- $\|\varphi\|_H = \sup\limits_{\theta\in[-H,0]} \|\varphi(\theta)\|$ — sup-норма функции $\varphi \in PC\big([-H,0], \mathbb{R}^n\big)$,
- $\lambda_{\min}(A)$ — наименьшее собственное число симметричной матрицы A.

Введение

Системы с запаздыванием находят широкое применение в экономике, биологии, сложных системах [1], [2].

При моделировании динамики некоторого процесса одной из важных задач является исследование устойчивости получившейся динамической системы. В частности, для систем с запаздыванием, это позволяет сказать, можно ли пренебречь запаздыванием с точки зрения устойчивости данной системы. Поэтому представляет интерес поиск критериев, например, экспоненциальной устойчивости, которые позволяют определить, будет ли система экспоненциально устойчива при наличии заданных запаздываний.

В данной работе исследуется класс линейных систем с запаздыванием. В этом случае традиционный подход, применяющийся для линейных систем без запаздывания, основанный на нахождении собственных чисел системы, не всегда является эффективным, в силу бесконечного их количества для линейных систем с запаздыванием. Вместо этого, можно использовать обобщение метода Ляпунова, основанного на построении матрицы Ляпунова и исследовании на положительную определенность квадратичных функционалов с заданной отрицательно-определенной производной для анализа устойчивости системы. Еще одним преимуществом данного подхода является то, что с помощью построенных функционалов можно практически бесплатно получить оценки робастной устойчивости системы, построить оценки скорости убывания решений, а так же использовать функционалы для построения стабилизирующего управления системы [3]. Однако проверка положительной определенности квадратичных функционалов является нетривиальной задачей. В данной работе мы решаем эту проблему и предлагаем новый подход для исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием на основе матрицы Ляпунова.

Постановка задачи

Основной целью данной работы является разработка конструктивных условий, гарантирующих положительную определенность квадратичного функционала v_0.

Кроме того, вторая задача в работе рассматривает вопрос практического применения полученных условий для исследования устойчивости системы (1.1) и сравнение с существующими в литературе условиями, разработанными другими авторами.

Обзор литературы

Труд [4] дает основы теории дифференциальных систем с запаздыванием.

Для исследования устойчивости систем с запаздыванием крайне полезен метод D-разбиений [5]. С помощью него строятся кривые, называющиеся линиями D-разбиения, которые делят всю область параметров системы на области параметров экспоненциальной устойчивости и неустойчивости системы.

Подход, использующийся инженерами для исследования устойчивости системы (1.1), заключается в нахождении корней характеристического уравнения

$$\det\left(sE_{n\times n} - \sum_{i=0}^{m} e^{-s(ih))} A_i\right) = 0$$

с использованием методов аналитической или численной алгебры. Такой подход применим, когда запаздывание системы рассматривается как параметр. Для систем небольшой размерности существуют аналитические методы, позволяющие найти максимальное значение запаздывания, при котором система устойчива. Для систем большой размерности используются численные методы, такие как тесты на постоянность матриц (constant-matrix tests [6]) или методы, основанные на исследовании пучков матриц (matrix-pencil techniques [7]).

Для получения необходимых и достаточных условий устойчивости систем с конкретными значениями запаздываний используется другой подход, который является обобщением второго метода Ляпунова для систем без запаздывания и называется методом функционалов Ляпунова–Красовского. Для того чтобы система была экспоненциально устойчива, в этом методе требуется отыскать положительно определенный функционал с отрицательно определенной производной вдоль решений системы.

Во многих работах функционал задается в параметрическом виде. Вид функционала подбирается произвольно, но так, чтобы функционал был положительно определенным. Затем исследуется, при каких параметрах системы производная функционала отрицательно определена. Такой подход приводит к решению системы линейных матричных неравенств и позволяет получить достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы [8].

С другой стороны, можно рассмотреть функционалы Ляпунова – Красовского с заданной производной. По определению, это функционалы, которые имеют отрицательно определенную производную вдоль решений системы. При таком подходе взятые функционалы нужно исследовать на положительную определенность. Отличительной особенностью этого способа, является то, что функционалы Ляпунова – Красовского не выбираются произвольно, а определяются из самой системы. Это позволяет получать необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости.

Структура функционалов Ляпунова – Красовского была предложена в работе [9]. В дальнейшем, в работах [10], [11] она получила развитие, и приняла окончательный современный вид в работе [12]. Работа [3] дает основы теории функционалов с заданной производной.

Однако проблема этого метода заключается в том, что трудно найти конструктивные условия положительной определенности функционалов Ляпунова – Красовского.

В работах [13], [14] начался поиск конструктивных условий, которые могут быть использованы для проверки положительной определенности таких функционалов. В работе [15] он привел к способу проверки положительной определенности, который состоит в анализе положительной определенности матрицы. Этот метод позволяет выполнить проверку за конечное число математических операций. Однако размерность матрицы, получаемой при использовании этого метода, экспоненциально растет при росте параметров системы, что затрудняет его применение на практике.

Работа [15] основана на аппроксимации значений исследуемого функционала при помощи фундаментальной матрицы системы. В работе [16] идея аппроксимации функционала была продолжена с использованием полиномов Лежандра. Полученные условия также основываются на проверке положительной определенности некоторой матрицы. За счет высокой скорости сходимости ряда из полиномов Лежандра к аппроксимируемой функции размерность получаемой матрицы невероятно мала и практически не зависит от параметров системы. Однако вычисление элементов матрицы является трудоемким и существенно замедляет время работы алгоритма. Благодаря работам [15] и [16] стало ясно, что можно использовать различные способы приближения значений функционала, при условии быстрой скорости сходимости и простоты вида получаемой матрицы. С этой точки зрения самый простой вид матрицы уже получен в работе [15].

Наша текущая работа берет начальную идею из работ [17], [18], [19], где значения квадратичного функционала аппроксимировались при помощи процедуры кусочно-линейной дискретизации ядер функционала, в отличие от дискретизации его аргумента в работах [15], [16]. В данной работе мы развиваем далее идею кусочно-линейной дискретизации функционала, а также пробуем другие процедуры дискретизации, такие как кусочно-постоянная дискретизация. Отметим, что попытки применения других процедур дискретизации так же осуществлялись в работе [20].

Глава 1. Основные понятия

В данной главе представим основные определения и вспомогательные рассуждения и утверждения, на которые мы будем опираться.

В данной работе рассматривается система вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \cdots + A_m x(t-mh), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где $m \geqslant 1$ – число запаздываний в системе, $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – постоянные матрицы и $0 < h < \cdots < mh =: H$ – значения запаздываний.

Запаздывания вида

$$ih, \quad i = 0, \ldots m$$

называются кратными, а сама система (1.1) – системой с кратными запаздываниями. Запаздывание h называется базовым запаздыванием.

Функцию φ будем называть начальной, если она принадлежит множеству $PC([-H,0],\mathbb{R}^n)$.

Решение системы (1.1) будем обозначать через $x(t,\varphi)$, где φ – некоторая начальная функция. По определению решение системы удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\dot{x}(t,\varphi) = A_0 x(t,\varphi) + A_1 x(t-h,\varphi) + \cdots + A_m x(t-mh,\varphi), \quad t \geqslant 0,\\ x(t,\varphi) = \varphi(t), \quad t \in [-H,0].\end{gathered}$$

Система (1.1) называется экспоненциально устойчивой если для любых начальных функций φ выполнено неравенство

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_H ,$$

где $\gamma \geqslant 1, \sigma > 0$ – некоторые вещественные числа.

Возьмем матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Будем называть ее положительно определенной, если для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$x^T A x > 0.$$

Будем называть A неотрицательно определенной, если для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$x^T A x \geqslant 0.$$

Возьмем произвольную симметричную положительно определенную матрицу $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Непрерывная матричная функция $U(\tau)$, $\tau \in [-H, H]$, называется *матрицей Ляпунова системы* (1.1), ассоциированной с матрицей W, если она является решением дифференциального уравнения

$$U'(\tau) = \sum_{j=0}^{m} U(\tau - jh)A_j, \quad \tau \geqslant 0, \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \quad \tau \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \big(U^T(jh)A_j + A_j^T U(jh)\big) = -W. \tag{1.4}$$

В нашей работе рассматривается функционал

$$v_0\colon PC([-h,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},$$

$$v_0(\varphi) := \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)\sum_{i=1}^{n}\int_{-ih}^{0} U(-ih-\theta)A_i\varphi(\theta)d\theta +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-ih}^{0}\int_{-jh}^{0}\varphi^T(\theta_1)A_i^T U(\theta_1-\theta_2+ih-jh)A_j\varphi(\theta_2)d\theta_2 d\theta_1,$$

зависящий от матрицы U.

Свойство (1.2) называется динамическим свойством матрицы Ляпунова. В динамическом свойстве в точке $\tau := 0$ под $U'(\tau)$ понимается односторонняя производная $U'(+0)$. Первая производная матрицы Ляпунова U' дифференцируема во всех точках множества $[-H,0) \cup (0,H]$. В нуле у нее существуют односторонние производные

$$U'(+0) := \sum_{j=0}^{m} U(-jh)A_j,$$

$$U'(-0) := \sum_{j=0}^{m} A_j^T U(jh).$$

Таким образом, значение $U'(+0)$ можно вычислить, воспользовавшись динамическим свойством. Значение $U'(-0)$ можно вычислить, воспользовавшись свойством (1.3) и динамическим свойством, откуда

$$U'(\tau) = (U^T(-\tau))' = -(U'(-\tau))^T = -\left(\sum_{j=0}^{m} U(-\tau - jh)A_j\right)^T =$$

$$= -\sum_{j=0}^{m} A_j^T U(\tau + jh), \quad \tau \leqslant 0.$$

Значение разности между значениями производных в точке разрыва равно

$$U'(+0) - U'(-0) = -W,$$

которое можно вычислить воспользовавшись свойством (1.4). Вообще говоря, по индукции можно показать, что у производных высшего порядка функции U точки разрыва находятся среди точек

$$ih, \quad i = -m, \ldots, m.$$

Но это свойство выполняется только для систем с кратными запаздываниями. Для систем с произвольными запаздываниями описание множества точек разрыва является довольно сложной задачей, и это множество содержит счетное число точек. В нашей работе для получения хорошей оценки погрешности процедуры дискретизации необходимо, чтобы на каждом отрезке дискретизации соответствующая производная функции U была непрерывной. Поскольку в процедуре дискретизации можно построить только конечное число отрезков, мы рассматриваем только случай системы с кратными запаздываниями. Процедура дискретизации фундаментально неспособна охватить случай произвольных запаздываний, и это еще одна причина того, почему вычисление матрицы Ляпунова для линейной системы с произвольными запаздываниями, в отличие от кратных, считается $NP-$трудной задачей [6].

Матрица W определяет граничные условия системы и не для всех систем (1.1) для любой матрицы W у системы (1.2) с граничными условиями (1.3)-(1.4) будет существовать решение или оно будет единственным.

Система (1.1) *удовлетворяет условию Ляпунова* тогда и только тогда, когда для любой матрицы W у системы (1.2) с граничными условиями (1.3)-(1.4) существует единственное решение.

Для систем с одним запаздываниями условие Ляпунова эквивалентно условию $\det(N) \neq 0$ [3], где

$$
\begin{aligned}
N := &\begin{bmatrix} A_0^T \otimes E_{n\times n} + E_{n\times n} \otimes A_0^T & A_1^T \otimes E_{n\times n} \\ E_{n^2\times n^2} & 0_{n^2\times n^2} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} E_{n\times n} \otimes A_1^T & 0_{n^2\times n^2} \\ 0_{n^2\times n^2} & -E_{n^2\times n^2} \end{bmatrix} \exp(hM), \\
M := &\begin{bmatrix} A_0^T \otimes E_{n\times n} & A_1^T \otimes E_{n\times n} \\ -E_{n\times n} \otimes A_1^T & -E_{n\times n} \otimes A_0^T \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Также если для системы (1.1) выполняется условие Ляпунова, то для любой симметричной положительно определенной матрицы W матрицу Ляпунова в случае одного запаздывания можно непосредственно вычислить в любой точке по формуле [3]

$$
U(\tau) := \operatorname{unvec}\left(\begin{bmatrix} E_{n^2\times n^2} & 0_{n^2\times n^2} \end{bmatrix} \exp(\tau M) N^{-1} \begin{bmatrix} -\operatorname{vec}(E_{n\times n}) \\ \operatorname{vec}(0_{n\times n}) \end{bmatrix} \right), \quad \tau \geqslant 0,
$$
$$
U(\tau) := U^T(-\tau), \quad \tau < 0.
$$

Предположим, что для системы (1.1) выполняется условие Ляпунова. Тогда рассмотрим функционал

$$v_0\colon PC([-h,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},$$

$$v_0(\varphi):=\varphi^T(0)U(0)\varphi(0)+2\varphi^T(0)\sum_{i=1}^{n}\int_{-ih}^{0}U(-ih-\theta)A_i\varphi(\theta)d\theta+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-ih}^{0}\int_{-jh}^{0}\varphi^T(\theta_1)A_i^TU(\theta_1-\theta_2+ih-jh)A_j\varphi(\theta_2)d\theta_2d\theta_1.$$

Для дальнейшей дискретизации представим его в виде

$$\begin{gathered}v_0(\varphi)=\varphi^T(0)U(0)\varphi(0)+2\varphi^T(0)\int_{-H}^{0}Q(s)\varphi(s)\mathrm{d}s\\+\int_{-H}^{0}\int_{-H}^{0}\varphi^T(s_1)R(s_1,s_2)\varphi(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1,\end{gathered}\tag{1.5}$$

где ядра функционала Q и R равны

$$Q\colon[-H,0]\to\mathbb{R}^{n\times n},$$

$$Q(s)=\sum_{j=1}^{m}\chi_j(s)U^T(jh+s)A_j,\quad s\in[-H,0],\tag{1.6}$$

$$R\colon[-H,0]\times[-H,0]\to\mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\begin{aligned}R(s_1,s_2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}&\chi_i(s_1)\chi_j(s_2)\\&\times A_i^TU((i-j)h+s_1-s_2)A_j,\ \ s_1,s_2\in[-H,0],\end{aligned}\tag{1.7}$$

и

$$\chi_j(s)=\begin{cases}1, & s\in[-jh,0]\\0, & s\in[-H,-jh).\end{cases}$$

Введем обозначение $x_t\colon[-H,0]\to\mathbb{R}^n,\quad x_t(s):=x(t+s)$.

Функционал v_0 является представителем семейства функционалов Ляпунова – Красовского. Это означает, что производная функционала вдоль решений системы отрицательно определена. В частности, у функционала

v_0 производная равна [3]

$$\frac{\mathrm{d}v_0(x_t)}{\mathrm{d}t} = -x^T(t,\varphi)Wx(t,\varphi), \quad t \geqslant 0, \tag{1.8}$$

где $x(t,\varphi)$ – произвольное решение системы.

Благодаря этому, данные функционалы можно использовать в условии теоремы Красовского, т. е. теоремы 1.8 [3], для получения необходимых и достаточных условий экспоненциальной устойчивости систем с запаздыванием. В частности, для функционала v_0 справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Система $\dot{x}(t) = A_0x(t)+\dots+A_mx(t-mh)$ экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию Ляпунова и для всех начальных функций $\varphi \in PC[-H,0],\mathbb{R}^n]$ выполнено*

$$v_0(\varphi) \geqslant 0. \tag{1.9}$$

Приведем набор вспомогательных математические теорем.

Теорема 1.2. *[21] Пусть X, Y – конечные множества и пусть $f\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ – функция. Тогда*

$$\sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in Y} f(x,y)\right) = \sum_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) =$$
$$= \sum_{(y,x)\in Y\times X} f(x,y) = \sum_{y\in Y}\left(\sum_{x\in X} f(x,y)\right).$$

Теорема 1.3. *[21] Пусть $a < b$ - вещественные числа и пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ – интегрируемая по Риману функция. Обозначим $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ функцию*

$$F(x) := \int_{[a,x]} f(s)\mathrm{d}s.$$

Тогда функция F непрерывна. Более того, если $x_0 \in [a,b]$ – точка непрерывности функции f, то F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Теорема 1.4. *[21] Пусть дан отрезок $[a, b]$ и пусть $F, G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$ такие, что F', G' интегрируемы по Риману на $[a, b]$. Тогда*

$$\int_{[a,b]} F(s)G'(s)\mathrm{d}s = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} F'(s)G(s)\mathrm{d}s.$$

Теорема 1.5. *[22] Рассмотрим матрицу*

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}.$$

Пусть матрица A положительно определена. Тогда матрица X неотрицательно определена тогда и только тогда, когда матрица $C - B^T A^{-1} B$ неотрицательно определена.

Теорема 1.6. *[22] Рассмотрим матрицу*

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}.$$

Матрица X положительно определена тогда и только тогда, когда матрицы C и $A - BC^{-1}B^T$ положительно определены.

Также приведем ряд вспомогательных теорем по устойчивости линейных систем с запаздыванием, полученных при помощи теоремы 1.8 [3].

Теорема 1.7. *[3] Если система (1.1) экспоненциально устойчива, то она удовлетворяет условию Ляпунова.*

Теорема 1.8. *[23] Если система (1.1) экспоненциально устойчива, то для любого натурального числа $r \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ и любых попарно различных чисел $\tau_1, \ldots, \tau_r \in [0, H]$, матрица $K_r(\tau_1, \ldots, \tau_r) := \{U(-\tau_i + \tau_j)\}_{i,j=1}^{r}$ положительно определена.*

Теорема 1.9. *[24] Если система (1.1) не является экспоненциально устойчивой, но при этом удовлетворяет условию Ляпунова, то существует* *функция* $\widetilde{\varphi}$ *в множестве*

$$S := \Big\{ \varphi \in PC([-H,0],\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \|\varphi\|_H = \|\varphi(0)\| = 1 \Big\}.$$

такая, что

$$v_0(\widetilde{\varphi}) < -a_0, \quad a_0 = \frac{\lambda_{\min}(W)}{4\sum_{i=0}^{m}\|A_i\|}.$$

Глава 2. Процедура кусочно-постоянной дискретизации

В данной главе будет осуществлена процедура кусочно-постоянной дискретизации функционала v_0, в результате которой будет получен другой функционал v_0^N. При достаточно большом количестве взятых отрезков разбиения, значения функционала v_0^N стремятся к значениям функционала v_0. Мы представим явную оценку погрешности для процедуры кусочно-постоянной дискретизации и на ее основе получим критерий экспоненциальной устойчивости системы (1.1).

Опишем процедуру кусочно-постоянной дискретизации.

Разделим отрезок $[-h, 0]$ на N частей одинаковой длины $\tau := \frac{h}{N}$. Тогда весь отрезок $[-H, 0]$ разобьется на mN подотрезков. Обозначим точки дискретизации $\theta_j := -j\tau, j = 0, \ldots, mN$. Эти точки обладают следующим свойством:

$$\theta_j - \theta_{j+1} = \tau, \quad j = 0, \ldots, mN - 1$$

Для ядра Q функционала аппроксимация строится путем замены ядра на отрезке дискретизации значением ядра в левой точке отрезка:

$$Q^N(s) := Q(\theta_j), \quad s \in [\theta_j, \theta_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, mN,$$
$$Q^N(0) = Q(0).$$

Для ядра R аппроксимация строится путем замены значений на квадрате дискретизации значением ядра в нижней левой точке квадрата:

$$R^N(s_1, s_2) := R(\theta_p, \theta_q)$$
$$s_1 \in [\theta_i, \theta_{i-1}), \quad s_2 \in [\theta_j, \theta_{j-1}), \quad i, j = 1, \ldots, mN,$$
$$R^N(s_1, 0) = R(s_1, 0), \quad s_1 \in [\theta_i, \quad \theta_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, mN$$
$$R^N(0, s_2) = R(0, s_2), \quad s_2 \in [\theta_j, \quad \theta_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, mN$$
$$R^N(0, 0) = R(0, 0).$$

При таком приближении дискретизация функционала примет вид

$$v_0^N(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)\int_{-H}^{0} Q^N(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$
$$+ \int_{-H}^{0}\int_{-H}^{0} \varphi^T(s_1)R^N(s_1,s_2)\varphi(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1.$$

2.1 Альтернативная форма дискретизированного функционала

В данном разделе покажем, что дискретизированный функционал на самом деле является квадратичной формой. Для этого вычислим интегралы от ядер дискретизированного функционала:

$$\int_{-H}^{0} Q^N(s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \sum_{p=1}^{mN}\int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} Q^N(s)\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

Используя подстановку $s = \theta_p + \alpha\tau$, получим

$$\int_{-H}^{0} Q^N(s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \tau\sum_{p=1}^{mN}\int_{0}^{1} Q^N(\theta_p+\alpha\tau)\varphi(\theta_p+\alpha\tau)\mathrm{d}\alpha.$$

По определению функции Q^N:

$$\int_{-H}^{0} Q^N(s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \tau\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\int_{0}^{1} \varphi(\theta_p+\alpha\tau)\mathrm{d}\alpha.$$

Введем обозначение

$$\psi^p = \tau\int_{0}^{1} \varphi(\theta_p+\alpha\tau)\mathrm{d}\alpha, \quad p = 1,\ldots,mN.$$

С помощью него окончательно получим:

$$\int_{-H}^{0} Q^N(s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p.$$

Теперь вычислим интеграл от R^N:

$$\int_{-H}^{0}\int_{-H}^{0}\varphi^T(s_1)R^N(s_1,s_2)\varphi(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1 =$$
$$= \sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}\int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}}\int_{\theta_q}^{\theta_{q-1}}\varphi^T(s_1)R^N(s_1,s_2)\varphi(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1$$

Используя подстановку $s_2 = \theta_q + \beta\tau$, получим

$$\int_{-H}^{0}\int_{-H}^{0}\varphi^T(s_1)R^N(s_1,s_2)\varphi(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1$$
$$= \tau\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}\int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}}\int_{0}^{1}\varphi^T(s_1)R^N(s_1,\theta_q+\beta\tau)\varphi(\theta_q+\beta\tau)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}s_1$$

Последовательно используя подстановку $s_1 = \theta_p + \alpha\tau$, получим

$$\int_{-H}^{0}\int_{-H}^{0}\varphi^T(s_1)R^N(s_1,s_2)\varphi(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1 =$$
$$= \tau^2\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\varphi^T(\theta_p+\alpha\tau)R^N(\theta_p+\alpha\tau,\theta_q+\beta\tau)\varphi(\theta_q+\beta\tau)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha$$

По определению функции R^N:

$$\int_{-H}^{0}\int_{-H}^{0}\varphi^T(s_1)R^N(s_1,s_2)\varphi(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1 =$$
$$= \tau^2\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\varphi^T(\theta_p+\alpha\tau)R(\theta_p,\theta_q)\varphi(\theta_q+\beta\tau)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha$$

Преобразуем выражение внутри двойного интеграла, последовательно используя свойство $\int_\Omega Af(x)dx = A\int_\Omega f(x)dx$.

$$\tau^2\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\varphi^T(\theta_p+\alpha\tau)R(\theta_p,\theta_q)\varphi(\theta_q+\beta\tau)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha$$

$$= \tau^2 \sum_{p=1}^{mN} \sum_{q=1}^{mN} \int_0^1 \varphi^T(\theta_p + \alpha\tau) R(\theta_p, \theta_q) \left(\int_0^1 \varphi(\theta_q + \beta\tau) \mathrm{d}\beta \right) \mathrm{d}\alpha =$$

$$= \tau^2 \sum_{p=1}^{mN} \sum_{q=1}^{mN} \left(\int_0^1 \varphi^T(\theta_p + \alpha\tau) \mathrm{d}\alpha \right) R(\theta_p, \theta_q) \left(\int_0^1 \varphi(\theta_q + \beta\tau) \mathrm{d}\beta \right).$$

Окончательно имеем

$$\int_{-H}^0 \int_{-H}^0 \varphi^T(s_1) R^N(s_1, s_2) \varphi(s_2) \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 = \sum_{p=1}^{mN} \sum_{q=1}^{mN} (\psi^p)^T R(\theta_p, \theta_q) \psi^q.$$

Подставляя найденные выражения в определение дискретизированного функционала, получим

$$v_0^N(\varphi) = \varphi^T(0) U(0) \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-H}^0 Q^N(s) \varphi(s) \mathrm{d}s$$
$$+ \int_{-H}^0 \int_{-H}^0 \varphi^T(s_1) R^N(s_1, s_2) \varphi(s_2) \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 =$$
$$= \varphi^T(0) U(0) \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p) \psi^p + \sum_{p=1}^{mN} \sum_{q=1}^{mN} (\psi^p)^T R(\theta_p, \theta_q) \psi^q.$$

Слагаемое с одинарным интегралом имеет вид

$$2\varphi^T(0) \sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p) \psi^p =: 2I, \quad I \in \mathbb{R}^{1\times 1}.$$

Из того, что I – матрица размерности 1×1 следует, что $I = I^T$. Используя это свойство, перепишем выражение дискретизированного функционала:

$$
\begin{aligned}
v_0^N(\varphi) &= \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p + \sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q = \\
&= \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + \varphi^T(0)\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p + \sum_{p=1}^{mN}(\psi^p)^T Q^T(\theta_p)\varphi(0) + \\
&+ \sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Покажем, что выражение эквивалентно выражению вида

$$
v_0^N(\varphi) = \Psi^T(\varphi)\mathcal{A}_N\Psi(\varphi). \qquad (2.2)
$$

Здесь вектор

$$
\Psi(\varphi) \in \mathbb{R}^{n(mN+1)\times 1}, \quad \Psi^T(\varphi) = \begin{bmatrix}\varphi^T(0) & (\psi^1)^T & \ldots & (\psi^{mN})^T\end{bmatrix},
$$

и матрица

$$
\mathcal{A}_N \in \mathbb{R}^{n(mN+1)\times n(mN+1)}, \quad \mathcal{A}_N = \begin{bmatrix} U(0) & \mathcal{Q}^N \\ (\mathcal{Q}^N)^T & \mathcal{R}^N \end{bmatrix}
$$

состоит из блочных матриц

$$
\mathcal{Q}^N = \begin{bmatrix} Q(\theta_1) & \ldots & Q(\theta_{mN})\end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}^N = \begin{bmatrix} R(\theta_1,\theta_1) & \ldots & R(\theta_1,\theta_{mN}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\theta_{mN},\theta_1) & \ldots & R(\theta_{mN},\theta_{mN})\end{bmatrix}.
$$

Перепишем вектор $\Psi(\varphi)$ в более формальном виде

$$
\Psi^T(\varphi) := \begin{bmatrix}\Psi_0^T & \Psi_1^T & \ldots & \Psi_{mN}^T\end{bmatrix}, \quad \Psi_0 := \varphi(0), \quad \Psi_p := \psi^p, \quad p = 1,\ldots,mN.
$$

Матрица $\mathcal{A}_N$ состоит из блоков $\mathcal{A}_N := \{\mathcal{A}_N^{i,j}\}_{i,j=0}^{mN}$, где

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_N^{0,0} &:= U(0),\\
\mathcal{A}_N^{0,j} &:= Q(\theta_j), \quad j = 1, \ldots, mN,\\
\mathcal{A}_N^{i,0} &:= Q^T(\theta_i), \quad i = 1, \ldots, mN,\\
\mathcal{A}_N^{i,j} &:= R(\theta_i, \theta_j), \quad i, j = 1, \ldots, mN.
\end{aligned}$$

По свойствам блочного умножения матриц имеем

$$\begin{aligned}
\Psi^T(\varphi)\mathcal{A}_N\Psi(\varphi) &= \sum_{i=0}^{mN}\sum_{j=0}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,j}\Psi_j =\\
&= \sum_{j=0}^{mN}(\Psi_0)^T\mathcal{A}_N^{0,j}\Psi_j + \sum_{i=1}^{mN}\sum_{j=0}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,j}\Psi_j =\\
&= (\Psi_0)^T\mathcal{A}_N^{0,0}\Psi_0 + \sum_{j=1}^{mN}(\Psi_0)^T\mathcal{A}_N^{0,j}\Psi_j + \sum_{i=1}^{mN}\sum_{j=0}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,j}\Psi_j.
\end{aligned}$$

Если в двойной сумме конечное число слагаемых, то знаки суммирования можно менять местами $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{i,j} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}a_{i,j}$, согласно теореме 1.2, поэтому перепишем последнее слагаемое в виде

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{mN}\sum_{j=0}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,j}\Psi_j &= \sum_{j=0}^{mN}\sum_{i=1}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,j}\Psi_j =\\
&= \sum_{i=1}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,0}\Psi_0 + \sum_{j=1}^{mN}\sum_{i=1}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,j}\Psi_j =\\
&= \sum_{i=1}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,0}\Psi_0 + \sum_{i=1}^{mN}\sum_{j=1}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,j}\Psi_j.
\end{aligned}$$

Подставляя получившееся выражение в первоначальную сумму, получим

$$\Psi^T(\varphi)\mathcal{A}_N\Psi(\varphi) = (\Psi_0)^T\mathcal{A}_N^{0,0}\Psi_0 + \sum_{j=1}^{mN}(\Psi_0)^T\mathcal{A}_N^{0,j}\Psi_j + \\ + \sum_{i=1}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,0}\Psi_0 + \sum_{i=1}^{mN}\sum_{j=1}^{mN}(\Psi_i)^T\mathcal{A}_N^{i,j}\Psi_j. \tag{2.3}$$

Используя формальное определение вектора $\Psi(\varphi)$ и матрицы $\mathcal{A}_N$, окончательно получим

$$\Psi^T(\varphi)\mathcal{A}_N\Psi(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + \varphi^T(0)\sum_{p=1}^{mN}Q(\theta_p)\psi^p + \\ + \sum_{p=1}^{mN}(\psi^p)^T Q^T(\theta_p)\varphi(0) + \sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q.$$

Сравнивая получившееся выражение с выражением (2.1), приходим к заключению

$$v_0^N(\varphi) = \Psi^T(\varphi)\mathcal{A}_N\Psi(\varphi). \tag{2.4}$$

Таким образом, в альтернативном представлении дискретизированный функционал является квадратичной формой с постоянной матрицей $\mathcal{A}_N$, не зависящей от φ.

2.2 Связь матрицы дискретизированного функционала с матрицей Ляпунова

В этом разделе покажем, что для произвольного вектора Ψ такого, что

$$\Psi := \left[(\psi^0)^T, (\psi^1)^T, \ldots, (\psi^{mN})^T\right]^T \in \mathbb{R}^{n(mN+1)\times 1},$$

где

$$\psi^i \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad i = 0, \ldots, mN$$

существует вектор $\zeta(\Psi)$ такой, что

$$\Psi^T \mathcal{A}_N \Psi = \zeta^T(\Psi) \mathcal{B}_N \zeta(\Psi),$$

где $\mathcal{B}_N$ – некоторая матрица, зависящая только от матрицы Ляпунова U.

Для этого перепишем второе слагаемое из выражения (2.3) для дискретизированного функционала:

$$(\psi^0)^T \sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p.$$

Распишем сумму, используя определение функции Q:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} Q(\theta_i)\psi^i = \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \sum_{k=1}^{m} \chi_k(\theta_i) U(-kh-\theta_i) A_k \psi^i.\end{aligned}$$

Для любого $j = 1, \ldots, m$ при

$$(j-1)N < i \leqslant jN \implies -jh \leqslant -\frac{ih}{N} < -(j-1)h \leqslant 0.$$

Поскольку по определению $\theta_i = -\frac{ih}{N}$, из неравенства выше следует, что для любого $j = 1, \ldots, m$ если $(j-1)N < i \leqslant jN$, то $\theta_i \in [-jh, 0]$, и значит

$$\theta_i \in [-kh, 0], \quad k \geqslant j,$$

а так же $\theta_i \notin [-(j-1)h, 0]$, откуда

$$\theta_i \notin [-kh, 0], \quad k < j.$$

Таким образом, индикаторные функции $\chi_k(\theta_i)$ можно непосредственно вычислить, откуда получим, что:

$$\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \sum_{k=j}^{m} U(-kh-\theta_i)A_k\psi^i.$$

Вычтем число $(j-1)N$ из границ суммирования второй суммы:

$$\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=j}^{m} U(-kh-\theta_{i+(j-1)N})A_k\psi^{i+(j-1)N}.$$

По определению

$$\theta_{i+(j-1)N} = -(i+(j-1)N)\frac{h}{N} = -\frac{ih}{N} - (j-1)h = \theta_i - (j-1)h,$$

откуда

$$\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=j}^{m} U(-kh-\theta_i+(j-1)h)A_k\psi^{i+(j-1)N} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=j}^{m} U((j-k-1)h-\theta_i)A_k\psi^{i+(j-1)N}.$$

Теперь вычтем число $(j-1)$ из границ суммирования третьей суммы:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{m-(j-1)} U((j-(k+j-1)-1)h-\theta_i)A_{k+j-1}\psi^{i+(j-1)N} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{m-(j-1)} U(-kh-\theta_i)A_{k+j-1}\psi^{i+(j-1)N} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-(j-1)} U(-kh-\theta_i)A_{k+j-1}\psi^{i+(j-1)N}.$$

Индукцией по m можно показать, что

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-(j-1)} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-(k-1)} a_{j,k}. \tag{2.5}$$

Используя это свойство, можно поменять переменные суммирования во второй и третьей суммах:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-(j-1)} U(-kh-\theta_i) A_{k+j-1} \psi^{i+(j-1)N} = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-(k-1)} U(-kh-\theta_i) A_{k+j-1} \psi^{i+(j-1)N} = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} U(-kh-\theta_i) \sum_{j=1}^{m-(k-1)} A_{k+j-1} \psi^{i+(j-1)N}.\end{aligned}$$

Используем свойство $\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N} a_{N-(i-1)}$ по отношению к переменной i:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} U(-kh-\theta_{N-(i-1)}) \sum_{j=1}^{m-(k-1)} A_{k+j-1} \psi^{N-(i-1)+(j-1)N} = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} U(-kh-\theta_{N-(i-1)}) \sum_{j=1}^{m-(k-1)} A_{k+j-1} \psi^{jN-(i-1)}.\end{aligned}$$

Собирая двойную сумму назад в одинарную по правилу

$$p := (k-1)N + i, \quad k := \left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor + 1, \quad i := p - \left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor N,$$

и проверив, что $-kh - \theta_{N-(i-1)} = \theta_p + \tau$ в обозначениях для p, получаем

$$\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p = \sum_{p=1}^{mN} U(\theta_p+\tau) \sum_{j=1}^{m-\left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor} A_{\left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor+1+j-1} \psi^{jN-\left(p-\left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor N-1\right)}.$$

Снова используем свойство $\sum_{p=1}^{mN} b_p = \sum_{p=1}^{mN} b_{mN-(p-1)}$ на переменную p и окончательно получаем:

$$\sum_{p=1}^{mN} Q(\theta_p)\psi^p = \sum_{p=1}^{mN} U(\theta_{mN-(p-1)} + \tau) \sum_{j=1}^{m-\left\lfloor \frac{mN-(p-1)-1}{N} \right\rfloor} A_{\left\lfloor \frac{mN-(p-1)-1}{N} \right\rfloor+1+j-1} \times$$
$$\times \psi^{jN-\left(mN-(p-1)-\left\lfloor \frac{mN-(p-1)-1}{N} \right\rfloor N-1\right)} =$$
$$= \sum_{p=1}^{mN} U(\theta_{mN-(p-1)} + \tau) \sum_{j=1}^{m-\left\lfloor m-\frac{p}{N} \right\rfloor} A_{\left\lfloor m-\frac{p}{N} \right\rfloor+j} \psi^{\left(j-\left(m-\left\lfloor m-\frac{p}{N} \right\rfloor\right)\right)N+p} =$$
$$= \sum_{p=1}^{mN} U(\theta_{mN-(p-1)} + \tau)\zeta^p.$$

Здесь вектор

$$\zeta^p := \sum_{j=1}^{m-\left\lfloor m-\frac{p}{N} \right\rfloor} A_{\left\lfloor m-\frac{p}{N} \right\rfloor+j} \psi^{\left(j-\left(m-\left\lfloor m-\frac{p}{N} \right\rfloor\right)\right)N+p}, \quad p = 1, \ldots, mN.$$

Теперь по аналогии вычислим сумму

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN} (\psi^p)^T R(\theta_p, \theta_q)\psi^q.$$

Распишем сумму, используя определение функции R:

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN} (\psi^p)^T R(\theta_p, \theta_q)\psi^q = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=(r-1)N+1}^{rN} (\psi^i)^T R(\theta_i, \theta_s)\psi^s =$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \sum_{s=(r-1)N+1}^{rN} (\psi^i)^T \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \chi_k(\theta_i)\chi_l(\theta_s) A_k^T U((k-l)h + \theta_i - \theta_s) A_l \psi^s.$$

Для любого $j = 1, \dots, m$ и $r = 1, \dots, m$ при

$$(j-1)N < i \leqslant jN \implies -jh \leqslant -\frac{ih}{N} < -(j-1)h \leqslant 0,$$
$$(r-1)N < s \leqslant rN \implies -rh \leqslant -\frac{sh}{N} < -(r-1)h \leqslant 0.$$

Из неравенства выше следует, что для любого $j = 1, \dots, m$ и $r = 1, \dots, m$

$$(j-1)N < i \leqslant jN \implies \theta_i \in [-kh, 0], \quad k \geqslant j, \quad \theta_i \notin [-kh, 0], \quad k < j,$$
$$(r-1)N < s \leqslant rN \implies \theta_s \in [-lh, 0], \quad l \geqslant r, \quad \theta_s \notin [-lh, 0], \quad l < r.$$

Таким образом, индикаторные функции $\chi_k(\theta_i), \chi_l(\theta_s)$ можно вычислить, откуда получим, что:

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p, \theta_q)\psi^q = \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=(j-1)N+1}^{jN}\sum_{s=(r-1)N+1}^{rN}(\psi^i)^T \times$$
$$\times \sum_{k=j}^{m}\sum_{l=r}^{m} A_k^T U((k-l)h + \theta_i - \theta_s)A_l\psi^s.$$

Вычтем числа $(j-1)N$ и $(r-1)N$ из границ суммирования третьей и четвертой сумм:

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p, \theta_q)\psi^q = \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(\psi^{i+(j-1)N})^T \times$$
$$\times \sum_{k=j}^{m}\sum_{l=r}^{m} A_k^T U((k-l)h + \theta_{i+(j-1)N} - \theta_{s+(r-1)N})A_l\psi^{s+(r-1)N}.$$

По определению

$$\theta_{i+(j-1)N} = \theta_i - (j-1)h, \quad \theta_{s+(r-1)N} = \theta_s - (r-1)h,$$

откуда

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q = \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(\psi^{i+(j-1)N})^T\times$$
$$\times\sum_{k=j}^{m}\sum_{l=r}^{m}A_k^T U\big((k-l-j+r)h+\theta_i-\theta_s\big)A_l\psi^{s+(r-1)N}.$$

Теперь вычтем числа $(j-1)$ и $(r-1)$ из границ суммирования пятой и шестой сумм:

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q = \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(\psi^{i+(j-1)N})^T\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{m-(j-1)}\sum_{l=1}^{m-(r-1)}A_{k+j-1}^T U\big((k-l)h+\theta_i-\theta_s\big)A_{l+r-1}\psi^{s+(r-1)N}.$$

Снова последовательно используя свойство (2.5), получим:

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q = \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m-(j-1)}\sum_{r=1}^{m}\sum_{l=1}^{m-(r-1)}(\psi^{i+(j-1)N})^T\times$$
$$\times A_{k+j-1}^T U\big((k-l)h+\theta_i-\theta_s\big)A_{l+r-1}\psi^{s+(r-1)N} =$$
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-(k-1)}\sum_{l=1}^{m}\sum_{r=1}^{m-(l-1)}(\psi^{i+(j-1)N})^T\times$$
$$\times A_{k+j-1}^T U\big((k-l)h+\theta_i-\theta_s\big)A_{l+r-1}\psi^{s+(r-1)N}.$$

Перегруппируем выражение:

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{m-(k-1)}A_{k+j-1}\psi^{i+(j-1)N}\right)^T\times$$
$$\times U\big((k-l)h+\theta_i-\theta_s\big)\left(\sum_{r=1}^{m-(l-1)}A_{l+r-1}\psi^{s+(r-1)N}\right).$$

Последовательно используя свойство $\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N} a_{N-(i-1)}$ на переменные i и s, получим промежуточное выражение:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{m-(k-1)} A_{k+j-1}\psi^{N-(i-1)+(j-1)N}\right)^T \times$$
$$\times\, U\big((k-l)h + \theta_{N-(i-1)} - \theta_{N-(s-1)}\big)\left(\sum_{r=1}^{m-(l-1)} A_{l+r-1}\psi^{N-(s-1)+(r-1)N}\right).$$

Собирая двойные суммы назад в одинарные по правилам

$$p := (k-1)N + i, \quad k := \left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor + 1, \quad i := p - \left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor N,$$
$$q := (l-1)N + s, \quad l := \left\lfloor \frac{q-1}{N} \right\rfloor + 1, \quad s := q - \left\lfloor \frac{q-1}{N} \right\rfloor N,$$

и проверив, что $(k-l)h + \theta_{N-(i-1)} - \theta_{N-(s-1)} = (p-q)\tau$ в обозначениях для p и q, получаем

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q = \sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}\left(\sum_{j=1}^{m-\left\lfloor \frac{p-1}{N}\right\rfloor} A_{\left\lfloor \frac{p-1}{N}\right\rfloor + j}\psi^{jN-\left(p-\left\lfloor \frac{p-1}{N}\right\rfloor N - 1\right)}\right)^T \times$$
$$\times\, U\big((p-q)\tau\big)\left(\sum_{r=1}^{m-\left\lfloor \frac{q-1}{N}\right\rfloor} A_{\left\lfloor \frac{q-1}{N}\right\rfloor + r}\psi^{rN-\left(q-\left\lfloor \frac{q-1}{N}\right\rfloor N - 1\right)}\right).$$

Снова используем свойство $\sum_{p=1}^{mN} b_p = \sum_{p=1}^{mN} b_{mN-(p-1)}$ на переменные p и q, и окончательно получаем:

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}\left(\sum_{j=1}^{m-\left\lfloor m-\frac{p}{N}\right\rfloor} A_{\left\lfloor m-\frac{p}{N}\right\rfloor + j}\psi^{\left(j-\left(m-\left\lfloor m-\frac{p}{N}\right\rfloor\right)\right)N+p}\right)^T U\big((q-p)\tau\big)\times$$
$$\times\left(\sum_{r=1}^{m-\left\lfloor m-\frac{q}{N}\right\rfloor} A_{\left\lfloor m-\frac{q}{N}\right\rfloor + r}\psi^{\left(r-\left(m-\left\lfloor m-\frac{q}{N}\right\rfloor\right)\right)N+q}\right) = \sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\zeta^p)^T U\big((q-p)\tau\big)\zeta^q.$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\psi^p)^T R(\theta_p,\theta_q)\psi^q = \sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\zeta^p)^T U\big((q-p)\tau\big)\zeta^q.$$

Подставим получившиеся выражения в формулу (2.3):

$$\Psi^T \mathcal{A}_N \Psi = (\psi^0)^T U(0)\psi^0 + (\psi^0)^T \sum_{p=1}^{mN} U(\theta_{mN-(p-1)}+\tau)\zeta^p +$$
$$+\sum_{p=1}^{mN}(\zeta^p)^T U^T(\theta_{mN-(p-1)}+\tau)\psi^0 + \sum_{p=1}^{mN}\sum_{q=1}^{mN}(\zeta^p)^T U\big((q-p)\tau\big)\zeta^q.$$

Таким образом, получившееся выражение эквивалентно выражению вида

$$\Psi^T \mathcal{A}_N \Psi = \zeta^T(\Psi)\mathcal{B}_N\zeta(\Psi). \tag{2.6}$$

Здесь вектор

$$\zeta(\Psi)\in\mathbb{R}^{n(mN+1)\times 1},\quad \zeta^T(\Psi) = \begin{bmatrix}(\psi^0)^T & (\zeta^1)^T & \dots & (\zeta^{mN})^T\end{bmatrix},$$

и матрица

$$\mathcal{B}_N\in\mathbb{R}^{n(mN+1)\times n(mN+1)},\quad \mathcal{B}_N = \begin{bmatrix}U(0) & \mathcal{C}^N\\ (\mathcal{C}^N)^T & \mathcal{K}^N\end{bmatrix}$$

состоит из блочных матриц

$$\mathcal{C}^N = \begin{bmatrix}U(\theta_{mN}+\tau) & \dots & U(\theta_2+\tau) & U(\theta_1+\tau)\end{bmatrix},\quad \mathcal{K}^N = \{U(q-p)\tau\}_{p,q=1}^{mN}.$$

2.3 Оценка погрешности

В данном разделе оценим разность между значениями оригинального и дискретизированного функционала в виде

$$\left|v_0(\varphi)-v_0^N(\varphi)\right| \leqslant \frac{c}{N}\left\|\varphi\right\|_H^2,$$

где c – некоторая константа, зависящая только от изначальных параметров системы.

Для начала оценим норму производной U' на отрезке $[-H, 0]$. Введем обозначения

$$K = \sum_{i=0}^{m} \|A_i\|, \quad \|U\| = \max_{\theta \in [0,H]} \|U(\theta)\|.$$

Для любого $\xi \in [-H, 0]$ по динамическому свойству функции U выполняется следующее:

$$\|U'(\xi)\| = \left\|-U'^T(-\xi)\right\| = \|U'(-\xi)\| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \|U(-\xi - h_i)A_i\|,$$

следовательно

$$\|U'(\xi)\| \leqslant K \|U\|, \quad \xi \in [-H, 0]. \tag{2.7}$$

Из равенства

$$\|U'(\xi)\| = \|U'(-\xi)\|$$

полученного выше так же следует, что

$$\|U'(\xi)\| \leqslant K \|U\|, \quad \xi \in [0, H]. \tag{2.8}$$

Рассмотреним сужение функции U' на отрезки $[0, H]$ и $[-H, 0]$. По рассуждениям про односторонние производные, приведенным после формулирования свойства (1.4), U' существует во всех точках отрезков. Так же она непрерывна на каждом из них, что видно из динамического свойства (1.2). Теперь можно применить теорему 1.3, откуда

$$U(s) = U(0) + \int_0^s U'(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad s \in [0, H],$$
$$U(s) = U(-H) + \int_{-H}^s U'(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad s \in [-H, 0].$$

Тогда для любых точек $s_1, s_2 \in [0, H]$ выполнено

$$\|U(s_1) - U(s_2)\| = \left\| U(0) + \int_0^{s_1} U'(\xi)\mathrm{d}\xi - \left(U(0) + \int_0^{s_2} U'(\xi)\mathrm{d}\xi \right) \right\| = \\ = \left\| \int_{s_2}^{s_1} U'(\xi)\mathrm{d}\xi \right\| \leqslant K \|U\| \, |s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in [0, H].$$

Аналогичным образом, для любых точек $s_1, s_2 \in [-H, 0]$:

$$\|U(s_1) - U(s_2)\| = \left\| \int_0^{s_1+H} U'(\xi - H)\mathrm{d}\xi - \int_0^{s_2+H} U'(\xi - H)\mathrm{d}\xi \right\| = \\ = \left\| \int_{s_2+H}^{s_1+H} U'(\xi - H)\mathrm{d}\xi \right\| = \left\| \int_{s_2}^{s_1} U'(\xi)\mathrm{d}\xi \right\| \leqslant \\ \leqslant K \|U\| \, |s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in [-H, 0]. \tag{2.9}$$

Перейдем к оценке разности значений функционалов. Для начальной функции $\varphi \in PC([-H, 0], \mathbb{R}^n)$ имеем

$$|v_0(\varphi) - v_0^N(\varphi)| \leqslant 2 \int_{-H}^0 \left\| Q(s) - Q^N(s) \right\| \mathrm{d}s \, \|\varphi\|_H^2 \\ + \int_{-H}^0 \int_{-H}^0 \left\| R(s_1, s_2) - R^N(s_1, s_2) \right\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 \, \|\varphi\|_H^2 .$$

Сперва рассмотрим интеграл от Q и проделаем подстановку $s = \theta_p + \alpha\tau$,

$$\int_{-H}^0 \left\| Q(s) - Q^N(s) \right\| \mathrm{d}s = \tau \sum_{p=1}^{mN} \int_0^1 \left\| Q(\theta_p + \alpha\tau) - Q^N(\theta_p + \alpha\tau) \right\| \mathrm{d}\alpha = \\ = \tau \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \int_0^1 \|Q(\theta_i + \alpha\tau) - Q(\theta_i)\| \, \mathrm{d}\alpha.$$

Распишем ядра Q:

$$\int_0^1 \|Q(\theta_i+\alpha\tau)-Q(\theta_i)\|\,\mathrm{d}\alpha =$$
$$= \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{m} \Big(\chi_k(\theta_i+\alpha\tau) U\big(-kh-(\theta_i+\alpha\tau)\big) - \chi_k(\theta_i) U(-kh-\theta_i) \Big) A_k \right\| \mathrm{d}\alpha.$$

Для любого $j=1,\dots,m$ при

$$(j-1)N < i \leqslant jN \implies -jh \leqslant -\frac{ih}{N} < -(j-1)h \leqslant 0,$$

т. е.

$$(j-1)N < i \leqslant jN \implies \theta_i \in \big[-jh, -(j-1)h\big).$$

С другой стороны, при $(j-1)N < i \leqslant jN$ и $\alpha \in [0,1)$

$$\theta_i + \alpha\tau \geqslant \theta_i \geqslant -jh,$$
$$\theta_i + \alpha\tau \leqslant \theta_{(j-1)N+1} + \alpha\tau = -(j-1)h - \tau + \alpha\tau < (-j-1)h.$$

Таким образом, получаем, что в интеграле выше

$$\begin{aligned} &\theta_i, \theta_i+\alpha\tau \in [-kh, 0], \quad k \geqslant j, \quad \alpha \in [0,1) \\ &\theta_i, \theta_i+\alpha\tau \notin [-kh, 0], \quad k < j, \quad \alpha \in [0,1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

С помощью чего индикаторные функции можно вычислить

$$\int_{-H}^{0} \big\|Q(s)-Q^N(s)\big\|\,\mathrm{d}s =$$
$$= \tau \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \int_0^1 \left\| \sum_{k=j}^{m} \Big(U\big(-kh-(\theta_i+\alpha\tau)\big) - U(-kh-\theta_i) \Big) A_k \right\| \mathrm{d}\alpha.$$

Из формулы (2.10) можно вычислить, что аргументы

$$-kh-(\theta_i+\alpha\tau), \quad -kh-\theta_i,$$

от которых считается значение функции U под знаком интеграла, принадлежат отрезку $[-kh, 0]$ т. е. отрезку $[-H, 0]$. Таким образом, можно применить оценку (2.9) для разности значений матрицы Ляпунова:

$$\int_{-H}^{0} \left\|Q(s) - Q^N(s)\right\| \mathrm{d}s \leqslant \tau^2 K\|U\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \sum_{k=j}^{m} \|A_k\| \int_0^1 \alpha \mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{\tau^2}{2} K\|U\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \|A_k\| = \frac{h^2}{2N^2} K\|U\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j}^{m} N \|A_k\|.$$

Окончательно получаем

$$\int_{-H}^{0} \left\|Q(s) - Q^N(s)\right\| \mathrm{d}s \leqslant \frac{\frac{1}{2} h^2 K\|U\| \sum_{i=1}^{m} i \|A_i\|}{N}.$$

Аналогичным образом, рассмотрим интеграл от R:

$$\int_{-H}^{0} \int_{-H}^{0} \left\|R(s_1, s_2) - R^N(s_1, s_2)\right\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 = \tau^2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \times$$

$$\times \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \sum_{s=(r-1)N+1}^{rN} \int_0^1 \int_0^1 \|R(\theta_i + \alpha\tau, \theta_s + \beta\tau) - R(\theta_i, \theta_s)\| \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\alpha.$$

Распишем ядро R внутри интеграла, пользуясь формулой (2.10), чтобы раскрыть индикаторные функции:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{k=j}^{m} \sum_{l=s}^{m} A_k^T \Big(U(\theta_{i,s,k,l} + (\alpha - \beta)\tau) - U(\theta_{i,s,k,l}) \Big) A_l \right\| \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\alpha,$$

где

$$\theta_{i,s,k,l} := (k - l)h + \theta_i - \theta_s.$$

Покажем, что значения аргументов $\theta_{i,s,k,l}$ и $\theta_{i,s,k,l} + (\alpha - \beta)\tau$ в которых вычисляется значение функции U либо одновременно неотрицательные, либо одновременно неположительные. Для этого перепишем их в форме

$$\theta_{i,s,k,l} + (\alpha - \beta)\tau = (kN - lN - i + s + \alpha - \beta)\tau,$$
$$\theta_{i,s,k,l} = (kN - lN - i + s)\tau.$$

Предположим, что $(kN - lN - i + s)\tau \geqslant 0$. Без ограничения общности можно предположить, что $kN - lN - i + s \geqslant 1$. Так как если это выражение обращается в ноль, значит один аргумент уже нулевой и тогда оба аргумента окажутся знака, соответствующего знаку второго аргумента. Но тогда, при любых значениях $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$kN - lN - i + s \geqslant 1 \implies (kN - lN - i + s + \alpha - \beta) \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$\theta_{i,s,k,l} \geqslant 0, \quad \theta_{i,s,k,l} + (\alpha - \beta)\tau \geqslant 0.$$

В случае $kN - lN - i + s \leqslant -1$ аналогичным образом получается

$$\theta_{i,s,k,l} \leqslant 0, \quad \theta_{i,s,k,l} + (\alpha - \beta)\tau \leqslant 0.$$

Теперь интеграл можно оценить с помощью формулы (2.9):

$$\int_{-H}^{0}\int_{-H}^{0} \left\| R(s_1, s_2) - R^N(s_1, s_2) \right\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 \leqslant$$
$$\leqslant \tau^3 K \|U\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} \sum_{s=(r-1)N+1}^{rN} \sum_{k=j}^{m} \|A_k\| \sum_{l=s}^{m} \|A_l\| \times$$
$$\times \int_0^1 \int_0^1 |\alpha - \beta| \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\alpha = \frac{\frac{1}{3} h^3 K \|U\| \left(\sum_{i=1}^{m} i \|A_i\|\right)^2}{N}.$$

Собирая приведенные выше оценки, получаем следующий результат.

Теорема 2.1. *Следующее неравенство выполнено для любого числа* $N \in$

$\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ *и любой начальной функции* $\varphi \in PC([-H,0],\mathbb{R}^n)$:

$$\left|v_0(\varphi) - v_0^N(\varphi)\right| \leqslant \frac{c}{N}\left\|\varphi\right\|_H^2. \tag{2.11}$$

Здесь константа,

$$c = K\left\|U\right\| Ah^2\left(1+\frac{1}{3}Ah\right), \quad A = \sum_{i=1}^{m} i\left\|A_i\right\|.$$

Подчеркнем, что оценка (2.11) сходится к нулю, когда N стремится к бесконечности.

2.4 Критерий экспоненциальной устойчивости

В данном разделе покажем, что система с несколькими кратными запаздываниями экспоненциально устойчива, тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию Ляпунова и блочная подматрица $\mathcal{K}^N$ матрицы $\mathcal{A}_N$ дискретизированного функционала положительно определена. Сформулируем сначала необходимое условие экспоненциальной устойчивости системы:

Теорема 2.2. *Если система* $\dot{x}(t) = A_0x(t) + \cdots + A_mx(t-mh)$ *экспоненциально устойчива, то для любого* $N \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ *матрица*

$$\mathcal{K}^N := \begin{bmatrix} U(0) & U(\tau) & \dots & U\big((mN-1)\tau\big) \\ U(-\tau) & U(0) & \dots & U\big((mN-2)\tau\big) \\ U(-2\tau) & U(-\tau) & \dots & U\big((mN-3)\tau\big) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U\big(-(mN-1)\tau\big) & U\big(-(mN-2)\tau\big) & \dots & U(0) \end{bmatrix}$$

положительно определена.

Доказательство. Предположим, что система экспоненциально устойчива. Тогда она удовлетворяет условию Ляпунова по теореме 1.7, и по теореме 1.8 матрица $K_r(\tau_1,\dots,\tau_r)$ положительно определена для любого натурального числа $r \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ и попарно различных чисел $\tau_1,\dots,\tau_r$. Возьмем число $r :=$

$mN \geqslant 1$ и числа $\tau_i := (i-1)\tau, i = 1, \dots, mN$. Тогда матрица

$$\mathcal{K}_r = \{U(-\tau_i + \tau_j)\}_{i,j=1}^{mN} = \{U(-(i-1)\tau + (j-1)\tau\}_{i,j=1}^{mN} = \\ = \big\{U\big((j-i)\tau\big)\big\}_{i,j=1}^{mN} = \mathcal{K}^N.$$

Таким образом матрица $\mathcal{K}^N$ положительно определена и необходимость доказана.

Докажем еще одну вспомогательную теорему:

Теорема 2.3. *Зафиксируем число $N \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Если матрица $\mathcal{K}^N$ положительно определена, то матрица $\mathcal{B}^N$ неотрицательно определена.*

Доказательство. Матрицу K^N можно представить в блочном виде

$$\mathcal{K}^N = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1,1} & \mathcal{K}_{1,2} \\ \mathcal{K}_{2,1} & U(0) \end{bmatrix}.$$

Отсюда по теореме 1.6 матрица $U(0)$ положительно определена. По теореме 1.5 матрица

$$\mathcal{B}^N = \begin{bmatrix} U(0) & \mathcal{C}^N \\ (\mathcal{C}^N)^T & \mathcal{K}^N \end{bmatrix}$$

неотрицательно определена тогда и только тогда, когда дополнение $\mathcal{S}^N := \mathcal{K}^N - (\mathcal{C}^N)^T U^{-1}(0)\mathcal{C}^N$ неотрицательно определено. Напомним формулы для блочных матриц $\mathcal{C}^N$ и $\mathcal{K}^N$:

$$\mathcal{C}_{1,i}^N = U(\theta_{mN-(i-1)} + \tau) = U\big((-mN + i)\tau\big), \quad i = 1, \dots, mN, \\ \mathcal{K}^N = \big\{U\big((j-i)\tau\big)\big\}_{i,j=1}^{mN},$$

откуда дополнение $\mathcal{S}^N$ имеет блоки следующего вида

$$\mathcal{S}_{i,j}^N = U((j-i)\tau) - U^T(\big((-mN + i)\tau\big)U^{-1}(0)U(\big(-mN + j\big)\tau), \\ i, j = 1, \dots, mN - 1.$$

На границе в точках $i = mN$ или $j = mN$ матрица $\mathcal{S}$ окаймляется нулевыми блоками:

$$\mathcal{S}^N_{mN,j} = U\big(((j-mN)\tau\big) - U^T((-mN+mN)\tau)U^{-1}(0)U\big((-mN+j)\tau\big) = \\ = 0_{n\times n}, \quad j = 1,\dots,mN,$$

$$\mathcal{S}^N_{i,mN} = U\big(((mN-i)\tau\big) - U^T((-mN+i)\tau)U^{-1}(0)U\big((-mN+mN)\tau\big) = \\ = 0_{n\times n}, \quad i = 1,\dots,mN.$$

Поэтому, чтобы показать неотрицательную определенность матрицы $\mathcal{S}^N$, достаточно показать неотрицательную определенность матрицы $\{\mathcal{S}^N_{i,j}\}_{i,j=1}^{mN-1}$. Для этого представим матрицу $\mathcal{K}^N$ в виде

$$\mathcal{K}^N = \begin{bmatrix} \mathcal{T}^{N-1} & \mathcal{F}^{N-1} \\ (\mathcal{F}^{N-1})^T & U(0) \end{bmatrix}.$$

Здесь блоки

$$\mathcal{T}^{N-1} = \{U\big((j-i)\tau\big)\}_{i,j=1}^{mN-1}$$

и

$$\mathcal{F}^{N-1}_{i,1} := U\big((mN-i)\tau\big), \quad i = 1,\dots mN-1.$$

Применим к данной матрице теорему 1.6, откуда следует, что дополнение $\mathcal{T'}^{N-1} := \mathcal{T}^{N-1} - \mathcal{F}^{N-1}U^{-1}(0)(\mathcal{F}^{N-1})^T$ положительно определено. Но оно совпадает с матрицей $\{S_{i,j}\}_{i,j=1}^{mN-1}$. В самом деле,

$$\mathcal{T'}_{i,j} = U\big((j-i)\tau\big) - U\big((mN-i)\tau\big)U^{-1}(0)U^T\big((mN-j)\tau\big) = \mathcal{S}^N_{i,j}, \\ i,j = 1,\dots,mN-1.$$

Теорема доказана.

Сформулируем окончательный результат данной главы:

Теорема 2.4. *Система $\dot{x}(t) = A_0x(t)+\dots+A_mx(t-mh)$ экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию Ляпунова* *и матрица*

$$\mathcal{K}^{N^*} := \begin{bmatrix} U(0) & U(\tau) & \dots & U\big((mN^*-1)\tau\big) \\ U(-\tau) & U(0) & \dots & U\big((mN^*-2)\tau\big) \\ U(-2\tau) & U(-\tau) & \dots & U\big((mN^*-3)\tau\big) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U\big(-(mN^*-1)\tau\big) & U\big(-(mN^*-2)\tau\big) & \dots & U(0) \end{bmatrix},$$

где $\tau := \frac{h}{N^*}$, *положительно определена с числом*

$$N^* := \left\lceil \frac{4\,(K)^2 \max\limits_{\theta\in[0,H]} \|U(\theta)\| A h^2 \left(1 + \dfrac{1}{3}Ah\right)}{\lambda_{\min}(W)} \right\rceil, \quad A = \sum_{i=1}^{m} i\,\|A_i\|\,.$$

Доказательство. Необходимость. Необходимость следует из теоремы 2.2 поскольку число $N^* \geqslant 1$. Равенство нулю достигается только в том случае, когда все матрицы системы или базовая величина запаздывания h нулевые, но в таком случае известно как исследовать систему на экспоненциальную устойчивость.

Достаточность. Предположим теперь, что матрица $\mathcal{K}^{N^*}$ положительно определена. Тогда по теореме 2.3 матрица $\mathcal{B}_{N^*}$ неотрицательно определена, а значит неотрицательно определена и матрица $\mathcal{A}_{N^*}$, поскольку по формуле (2.6)

$$\Psi^T \mathcal{A}_N \Psi = \zeta^T(\varphi)\mathcal{B}_N\zeta(\varphi) \geqslant 0$$

для любого вектора $\Psi \in \mathbb{R}^{n(mN+1)\times 1}$. В частности, отсюда и из формулы (2.4) следует, что для любой начальной функции φ

$$v_0^N(\varphi) = \Psi^T(\varphi)\mathcal{A}_N\Psi(\varphi) \geqslant 0.$$

Предположим от противного, что система не является экспоненциально устойчивой. Тогда по теореме 1.9 существует начальная функция $\widetilde{\varphi}$ такая, что

$$v_0(\widetilde{\varphi}) < -a_0, \quad a_0 = \frac{\lambda_{\min}(W)}{4K}.$$

По определению множества, которому принадлежит функция $\widetilde{\varphi}$, выполнено $\|\widetilde{\varphi}\|_H = 1$. Отсюда, по формуле (2.11) из теоремы 2.1

$$v_0^{N^\star}(\widetilde{\varphi}) \leqslant v_0(\widetilde{\varphi}) + \frac{c}{N^\star} < -a_0 + \frac{c}{N^\star}.$$

По определению $N^\star$, мы получаем $c/N^\star \leqslant a_0$, и следовательно $v_0^{N^\star}(\widetilde{\varphi}) < 0$, противоречие. Теорема доказана.

Глава 3. Процедура кусочно-линейной дискретизации

В данной главе рассмотрим систему с одним запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geqslant 0.$$

Все результаты, полученные в данной главе, без сомнения обобщаются на случай нескольких кратных запаздываний, однако эту работу предстоит проделать в будущем. Текущая глава является абсолютно независимой от предыдущей главы, несмотря на то, что некоторые обозначения, используемые в данной главе могут совпадать с обозначениями из предыдущей главы.

Процедура кусочно-линейной дискретизации функционалов Ляпунова – Красовского рассматривалась в работах [17], [18], [19] .Однако в этих работах наряду с дискретизацией самих функционалов проводилась дискретизация производной, в результате чего получались достаточные условия устойчивости, выраженные в терминах линейных матричных неравенств. В отличие от [19], мы применяем эту процедуру к конкретному функционалу с заданной производной (1.8), а дискретизацию производной заменяем оценкой погрешности дискретизации, в результате чего удается получить полный критерий экспоненциальной устойчивости.

Как и в случае кусочно-постоянной дискретизации, разобьем отрезок $[-h, 0]$ на N частей одинаковой длины $\tau := \frac{h}{N}$. Обозначим точки дискретизации $\theta_j := -j\tau, j = 0, \ldots, N$. Для точек выполняется соотношение

$$\theta_j - \theta_{j+1} = \tau, \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

В этот раз аппроксимация ядер функционала v_0 из формулы (1.5) строится следующим образом: ядро Q на отрезке дискретизации заменяется линейной функцией, проходящей через граничные точки отрезка:

$$Q^N(s) := \frac{Q(\theta_j) - Q(\theta_{j+1})}{\tau}(s - \theta_{j+1}) + Q(\theta_{j+1}), \quad s \in [\theta_{j+1}, \theta_j],$$
$$j = 0, \ldots, N-1.$$

Ядро R определено на квадратах дискретизации

$$[\theta_i, \theta_{i+1}] \times [\theta_j, \theta_{j+1}], \quad i, j = 0, \ldots, mN - 1.$$

Разобьем каждый квадрат на два треугольника, соседствующие вдоль побочной диагонали квадрата, проходящей через точки $(\theta_{i+1}, \theta_{j+1})$ и (θ_i, θ_j). Заменим график ядра R на каждом треугольнике плоскостью, проходящей через граничные точки треугольника. Тогда, на верхнем треугольнике, проходящем через дополнительную точку (θ_{i+1}, θ_j), получится

$$\begin{aligned} R^N(s_1, s_2) := R(\theta_{i+1}, \theta_{j+1}) + \\ &+ \frac{R(\theta_i, \theta_j) - R(\theta_{i+1}, \theta_j)}{\tau}(s_1 - \theta_{i+1}) + \\ &+ \frac{R(\theta_{i+1}, \theta_j) - R(\theta_{i+1}, \theta_{j+1})}{\tau}(s_2 - \theta_{j+1}), \quad \frac{s_1 - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} \geqslant \frac{s_2 - \theta_j}{\theta_{j+1} - \theta_j}, \\ &s_1 \in [\theta_{i+1}, \theta_i], \quad s_2 \in [\theta_{j+1}, \theta_j], \quad i, j = 0, \ldots, N - 1. \end{aligned}$$

На нижнем треугольнике, проходящем через дополнительную точку (θ_i, θ_{j+1}), получится

$$\begin{aligned} R^N(s_1, s_2) := R(\theta_{i+1}, \theta_{j+1}) + \\ &+ \frac{R(\theta_i, \theta_{j+1}) - R(\theta_{i+1}, \theta_{j+1})}{\tau}(s_1 - \theta_{i+1}) + \\ &+ \frac{R(\theta_i, \theta_j) - R(\theta_i, \theta_{j+1})}{\tau}(s_2 - \theta_{j+1}), \quad \frac{s_1 - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i} \leqslant \frac{s_2 - \theta_j}{\theta_{j+1} - \theta_j}, \\ &s_1 \in [\theta_{i+1}, \theta_i], \quad s_2 \in [\theta_{j+1}, \theta_j], \quad i, j = 0, \ldots, N - 1. \end{aligned}$$

Введем обозначение $H := h$. При таком приближении получаем дискретизированный функционал вида

$$\begin{aligned} v_0^N(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-H}^{0} Q^N(s)\varphi(s)\mathrm{d}s \\ + \int_{-H}^{0} \int_{-H}^{0} \varphi^T(s_1)R^N(s_1, s_2)\varphi(s_2)\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1. \end{aligned}$$

3.1 Альтернативная форма записи дискретизированного функционала

Можно проделать шаги, аналогичные тем, что были описаны в разделе 2.1, чтобы получить альтернативную форму дискретизированного функционала v_0^N. Поскольку эта процедура уже была описана ранее в работе [6] для произвольного квадратичного функционала, а так же в работе [25] именно для функционала v_0, мы просто приведем получившиеся результаты. Единственное отличие упомянутых выше работ от данной состоит в том, что в них дополнительно осуществляется процедура кусочно-линейной дискретизации производной функционала. Две процедуры – дискретизация самого функционала и кусочно-линейная дискретизация его производной совмещаются и приводят к достаточным условиям экспоненциальной устойчивости системы (1.1). Данная работа фокусируется только на дискретизации самого функционала.

Оформим полученные результаты в виде теоремы

Теорема 3.1. *[25] Для любой начальной функции* φ

$$v_0^N(\varphi) = \int_0^1 \begin{bmatrix}\varphi^T(0)\Psi^T(\alpha)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(0) & \mathcal{Q}_N \\ (\mathcal{Q}_N)^T & \mathcal{R}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi(0) \\ \Psi(\alpha)\end{bmatrix},$$

где

$$\mathcal{Q}_N = \begin{bmatrix} U(-h)A_1 & U(-h+\tau)A_1 & \dots & U(-\tau)A_1 & U(0)A_1 \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{R}_N = \{A_1^T U((j-i)\tau)A_1\}_{i,j=0}^N,$$

и $\Psi(\alpha) \in \mathbb{R}^{(N+1)n\times 1}$ *– некоторый вектор.*

Компоненты вектора $\Psi(\alpha)$ являются суммами интегралов от функции φ на отрезках дискретизации. Интегралы имеют переменные верхние и нижние пределы интегрирования, зависящие от параметра α. Для дальнейшего изложения конкретный вид компонент вектора $\Psi(\alpha)$ не важен.

3.2 Оценка погрешности

В данном разделе оценим разность значений между оригинальным и дискретизированным функционалами

$$|v_0(\varphi) - v_0^N(\varphi)| \leqslant \frac{c}{N^2} \|\varphi\|_H^2, \quad \varphi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n),$$

где c – некоторая константа, зависящая от параметров системы.

Покажем сначала, что U'' существует и непрерывна на отрезках $[-H,0]$ и $[0,H]$. Действительно, пользуясь динамическим свойством (1.2) и свойством (1.3) можно вычислить первую производную

$$\begin{aligned} U'(\theta) &= U(\theta)A_0 + U(\theta-h)A_1, \quad \theta \in [0,H] \\ U'(\theta) &= -(U'(-\theta))^T = -(U(-\theta)A_0 + U(-\theta-h)A_1)^T = \\ &\quad = -A_0^T U(\theta) - A_1^T U(\theta+h), \quad \theta \in [-H,0]. \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить вторую производную на отрезке $[0,H]$:

$$\begin{aligned} U''(\theta) &= U'(\theta)A_0 + U'(\theta-h)A_1 = \\ &= \big(U(\theta)A_0 + U(\theta-h)A_1\big)A_0 + \big(-A_0^T U(\theta-h) - A_1^T U(\theta)\big)A_1 = \\ &= U(\theta)A_0^2 + U(\theta-h)A_1A_0 - A_0^T U(\theta-h)A_1 - A_1^T U(\theta)A_1, \end{aligned}$$

и на отрезке $[-H,0]$:

$$\begin{aligned} U''(\theta) &= -A_0^T U'(\theta) - A_1^T U'(\theta+h) = \\ &= -A_0^T\big(-A_0^T U(\theta) - A_1^T U(\theta+h)\big) - A_1^T\big(U(\theta+h)A_0 + U(\theta)A_1\big) = \\ &= (A_0^2)^T U(\theta) + (A_1A_0)^T U(\theta+h) - A_1^T U(\theta+h)A_0 - A_1^T U(\theta)A_1. \end{aligned}$$

Из формулы выше видно, что вторая производная функции U существует и непрерывна, отсюда следует, что и $Q''(s) := U''(-h-s)A_1$ существует и непрерывна. Рассмотрим произвольную точку a на отрезке $[-H,0]$. По теореме 1.3 имеем

$$Q(s) = Q(a) + \int_a^s Q'(t)\mathrm{d}t = Q(a) + \int_a^s Q'(t)\mathrm{d}(t-s), \quad s \in [a, 0].$$

Теперь можно применить теорему 1.4 для отрезка $[a, s]$ и функций

$$F(t) := Q'(t), \quad G(t) := t - s$$
$$F'(t) := Q''(t), \quad G'(t) := 1$$

на этом отрезке. Получим для произвольной точки $a \in [-H, 0]$:

$$Q(s) = Q(a) + Q'(s)(s-s) - Q'(a)(a-s) - \int_a^s Q''(t)(t-s)\mathrm{d}t =$$
$$= Q(a) + Q'(a)(s-a) + \int_a^s Q''(t)(s-t)\mathrm{d}t, \quad s \in [a, 0]. \tag{3.1}$$

Для того чтобы оценить выражение $|v_0(\varphi) - v_0^N(\varphi)|$ потребуется оценить вспомогательный интеграл от Q:

$$\int_{-H}^0 \left\|Q(s) - Q^N(s)\right\| \mathrm{d}s = \sum_{p=1}^N \int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} \left\|Q(s) - Q^N(s)\right\| \mathrm{d}s =$$
$$= \sum_{p=1}^N \int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} \left\|Q(s) - Q(\theta_p) + \frac{Q(\theta_p) - Q(\theta_{p-1})}{\tau}(s - \theta_p)\right\| \mathrm{d}s.$$

В последнем переходе было использовано определение функции Q^N. Заменим $Q(s)$ и $Q(\theta_{p-1})$ выражением из формулы (3.2) для точки $a := \theta_p$. Получим выражение под знаком интеграла:

$$Q(\theta_p) + Q'(\theta_p)(s-\theta_p) + \int_{\theta_p}^s Q''(t)(s-t)\mathrm{d}t - Q(\theta_p) + Q(\theta_p)\left(\frac{s-\theta_p}{\tau}\right) -$$
$$-\left(Q(\theta_p) + Q'(\theta_p)(\theta_{p-1} - \theta_p) + \int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} Q''(t)(\theta_{p-1} - t)\mathrm{d}t\right)\frac{s-\theta_p}{\tau}.$$

После сокращения слагаемых остается

$$\int_{\theta_p}^{s} Q''(t)(s-t)\mathrm{d}t - \frac{s-\theta_p}{\tau}\int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} Q''(t)(\theta_{p-1}-t)\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Распишем второй интеграл в виде

$$\frac{s-\theta_p}{\tau}\int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} Q''(t)(\theta_{p-1}-\theta_p+\theta_p-t)\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} Q''(t)\left(s-\theta_p+(\theta_p-t)\left(\frac{s-\theta_p}{\tau}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

Так же имеем следующее равенство

$$\int_{\theta_p}^{s} Q''(t)\big(s-\theta_p+(\theta_p-t)\big)\mathrm{d}t-$$
$$-\int_{\theta_p}^{s} Q''(t)\left(s-\theta_p+(\theta_p-t)\left(\frac{s-\theta_p}{\tau}\right)\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \left(1-\frac{s-\theta_p}{\tau}\right)\int_{\theta_p}^{s} Q''(t)(\theta_p-t)\mathrm{d}t.$$

За счет последних двух преобразований выражение (3.2) окончательно принимает вид

$$\left(1-\frac{s-\theta_p}{\tau}\right)\int_{\theta_p}^{s} Q''(t)(\theta_p-t)\mathrm{d}t-$$
$$-(s-\theta_p)\int_{s}^{\theta_{p-1}} Q''(t)\left(1+\left(\frac{\theta_p-t}{\tau}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

Его можно оценить как

$$\max_{s\in[-H,0]}\|Q''(s)\|\left(1-\frac{s-\theta_p}{\tau}\right)\int_{\theta_p}^{s}|\theta_p-t|\mathrm{d}t+$$
$$+\max_{s\in[-H,0]}\|Q''(s)\|\,(s-\theta_p)\int_{s}^{\theta_{p-1}}\left(1+\left(\frac{\theta_p-t}{\tau}\right)\right)\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Интегралы внутри выражения равны

$$\int_{\theta_p}^{s} |\theta_p - t| \mathrm{d}t = \int_{\theta_p}^{s} (t-\theta_p)\mathrm{d}t = \frac{(s-\theta_p)^2}{2},$$
$$\int_{s}^{\theta_{p-1}} \left(1 + \left(\frac{\theta_p - t}{\tau}\right)\right) \mathrm{d}t = \theta_{p-1} - s + \frac{(s-\theta_p)^2 - \tau^2}{2\tau}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.3), получим выражение,

$$\max_{s\in[-H,0]} \|Q''(s)\| \left(\frac{(s-\theta_p)^2}{2} - \frac{(s-\theta_p)^3}{2\tau}\right) +$$
$$+ \max_{s\in[-H,0]} \|Q''(s)\| \left(-(s-\theta_p)(s-\theta_{p-1}) + \frac{(s-\theta_p)^3}{2\tau} - (s-\theta_p)\frac{\tau}{2}\right).$$

где пара слагаемых с членом $\frac{(s-\theta_p)^3}{2\tau}$ сокращается. А также поскольку интеграл

$$\int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} -(s-\theta_p)(s-\theta_{p-1})ds = -\frac{(\theta_p - \theta_{p-1})^3}{6},$$

получаем, что финальная оценка равна

$$\int_{-H}^{0} \left\|Q(s) - Q^N(s)\right\| \mathrm{d}s \leqslant$$
$$\leqslant \max_{s\in[-H,0]} \|Q''(s)\| \sum_{p=1}^{N} \int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} \frac{(s-\theta_p)^2}{2} - (s-\theta_p)(s-\theta_{p-1}) - (s-\theta_p)\frac{\tau}{2}\mathrm{d}s =$$
$$\leqslant \max_{s\in[-H,0]} \|Q''(s)\| \sum_{p=1}^{N} \frac{(\theta_{p-1}-\theta_p)^3}{6} - \frac{(\theta_p - \theta_{p-1})^3}{6} - \frac{(\theta_{p-1}-\theta_p)^2\tau}{4} =$$
$$= \max_{s\in[-H,0]} \|Q''(s)\| \sum_{p=1}^{N} \frac{\tau^3}{12} \leqslant \max_{s\in[-H,0]} \|U''(s)\| \|A_1\| \frac{h^3}{12N^2}.$$

Для оценки второго интеграла приведем вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. *Рассмотрим матричную функцию* $G\colon [0,\Delta] \to \mathbb{R}^{n\times n}$. *Пусть* G *дважды непрерывно-дифференцируема на отрезке* $[0,\Delta]$. *Рассмотрим* *соответствующую линейную функцию*

$$G^{\mathrm{lin}}(s) = \left(1 - \frac{s}{\Delta}\right) G(0) + \frac{s}{\Delta} G(\Delta), \quad s \in [0, \Delta].$$

Тогда,

$$\|G(s) - G^{\mathrm{lin}}(s)\| \leqslant \max_{s\in[0,\Delta]} \|G''(s)\| \frac{s(\Delta - s)}{2}.$$

Доказательство. По рассуждениям, которые привели к формуле (3.2), на отрезке $[0, \Delta]$ функцию G так же можно представить в следующем виде

$$G(s) = G(0) + sG'(0) + I(s), \quad I(s) = \int_0^s G''(t)(s-t)\mathrm{d}t, \quad s \in [0, \Delta].$$

Выразим по этой формуле значения $G(s)$ and $G(\Delta)$ и подставим в оцениваемое выражение:

$$\begin{gathered}
\|G(s) - G^{\mathrm{lin}}(s)\| = \left\|G(s) - \left(1 - \frac{s}{\Delta}\right) G(0) - \frac{s}{\Delta} G(\Delta)\right\| = \\
= \left\|\int_0^s G''(t)(s-t)\mathrm{d}t - \frac{s}{\Delta}\int_0^\Delta G''(t)(\Delta - t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \\
\leqslant \max_{s\in[0,\Delta]} \|G''(s)\| \left(\left(1 - \frac{s}{\Delta}\right)\int_0^s t\mathrm{d}t + \frac{s}{\Delta}\int_s^\Delta (\Delta - t)\mathrm{d}t\right) = \\
= \max_{s\in[0,\Delta]} \|G''(s)\| \frac{s(\Delta - s)}{2}.
\end{gathered}$$

Лемма доказана.

Теперь оценим второй вспомогательный интеграл от R:

$$\begin{gathered}
\int_{-H}^0 \int_{-H}^0 \left\|R(s_1, s_2) - R^N(s_1, s_2)\right\| \mathrm{d}s = \\
= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} \int_{s_1 - \theta_{p-1} + \theta_{q-1}}^{\theta_{q-1}} \left\|R(s_1, s_2) - R^N(s_1, s_2)\right\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 + \\
+ \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \int_{\theta_p}^{\theta_{p-1}} \int_{\theta_q}^{s_1 - \theta_{p-1} + \theta_{q-1}} \left\|R(s_1, s_2) - R^N(s_1, s_2)\right\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1.
\end{gathered}$$

В области определения первого двойного интеграла имеем последовательность импликаций

$$s_2 \geqslant s_1 - \theta_{p-1} + \theta_{q-1} \implies s_1 - \theta_{p-1} \leqslant s_2 - \theta_{q-1} \implies$$
$$\implies \frac{s_1 - \theta_{p-1}}{-\tau} \geqslant \frac{s_2 - \theta_{q-1}}{-\tau} \implies \frac{s_1 - \theta_{p-1}}{\theta_p - \theta_{p-1}} \geqslant \frac{s_2 - \theta_{q-1}}{\theta_q - \theta_{q-1}},$$

откуда следует, что в первом двойном интеграле функция R^N может быть раскрыта по определению R^N на верхнем треугольнике квадрата

$$[\theta_p, \theta_{p-1}] \times [\theta_q, \theta_{q-1}],$$

а во втором двойном интеграле по определению на нижнем треугольнике. Сделаем это, но сначала дополнительно вычтем из пределов интегрирования числа θ_p и θ_q. Получим

$$\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \left\| R(s_1, s_2) - R^N(s_1, s_2) \right\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 =$$
$$= \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} \int_0^{\tau}\int_{s_1}^{\tau} \left\| R(\theta_p + s_1, \theta_q + s_2) - R^N(\theta_p + s_1, \theta_q + s_2) \right\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 +$$
$$+ \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} \int_0^{\tau}\int_{0}^{s_1} \left\| R(\theta_p + s_1, \theta_q + s_2) - R^N(\theta_p + s_1, \theta_q + s_2) \right\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1.$$

Также в силу того, что

$$\begin{aligned} R(\theta_p, \theta_q) &= A_1^T U\big((q-p)\tau\big) A_1 = \\ &= A_1^T U\big(((q-1)-(p-1))\tau\big) A_1 = R(\theta_{p-1}, \theta_{q-1}), \end{aligned}$$

выражение для R^N в первом двойном интеграле принимает вид:

$$\begin{aligned} R^N(\theta_p + s_1, \theta_q + s_2) = R(\theta_p, \theta_q) &+ \\ &+ \frac{R(\theta_{p-1}, \theta_{q-1}) - R(\theta_p, \theta_{q-1})}{\tau}(s_1) + \\ &+ \frac{R(\theta_p, \theta_{q-1}) - R(\theta_p, \theta_q)}{\tau}(s_2) = \end{aligned}$$

$$= R(\theta_p, \theta_q) + \big(R(\theta_p, \theta_q) - R(\theta_p, \theta_{q-1})\big)\frac{(s_1 - s_2)}{\tau}.$$

Аналогично, выражение для R^N во втором двойном интеграле имеет вид:

$$\begin{aligned} R^N(\theta_p + s_1, \theta_q + s_2) := {} & R(\theta_p, \theta_q) + \\ & + \frac{R(\theta_{p-1}, \theta_q) - R(\theta_p, \theta_q)}{\tau}(s_1) + \\ & + \frac{R(\theta_{p-1}, \theta_{q-1}) - R(\theta_{p-1}, \theta_q)}{\tau}(s_2) = \\ & = R(\theta_p, \theta_q) + \big(R(\theta_p, \theta_q) - R(\theta_{p-1}, \theta_q)\big)\frac{(s_2 - s_1)}{\tau}. \end{aligned}$$

Для простоты оценим сначала второй двойной интеграл, а не первый. Выражение внутри интеграла имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^{s_1} \big\|R(\theta_p + s_1, \theta_q + s_2) - R^N(\theta_p + s_1, \theta_q + s_2)\big\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 \leqslant \\ & \leqslant \|A_1\|^2 \int_0^\tau \int_0^{s_1} \big\|U(s_1 - s_2 + a) - \\ & -U(a) + \big(U(a) - U(a+\tau)\big)\frac{(s_1 - s_2)}{\tau}\big\| \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1, \quad a := \theta_p - \theta_q. \end{aligned}$$

Сделав замену $s := s_1 - s_2$ во втором интеграле, получим выражение

$$\begin{aligned} & \|A_1\|^2 \int_0^\tau \int_0^{s_1} \big\|U(s+a) - U(a) + \big(U(a) - U(a+\tau)\big)\left(\frac{s}{\tau}\right)\big\| \mathrm{d}s \mathrm{d}s_1 = \\ & = \|A_1\|^2 \int_0^\tau \int_0^{s_1} \big\|G(s) - G(0) + \big(G(0) - G(\tau)\big)\left(\frac{s}{\tau}\right)\big\| \mathrm{d}s \mathrm{d}s_1, \end{aligned}$$

где функция

$$G(s) := U(s+a), \quad s \in [0, \tau].$$

Поскольку

$$s \in [0, \tau] \implies s + a \in [(q-p)\tau, (q-p+1)\tau],$$

видно, что для любых точек $p, q = 1, \ldots, N$ выполнено $s + a \in [0, H]$, либо $s + a \in [-H, 0]$, а значит функция $U(s+a)$ дважды дифференцируема на рассматриваемом отрезке. Теперь можно применить лемму 3.1 к функции G, находящейся под знаком интеграла, и окончательно оценить первый двойной интеграл:

$$\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\int_0^{\tau}\int_0^{s_1}\left\|R(\theta_p+s_1,\theta_q+s_2)-R^N(\theta_p+s_1,\theta_q+s_2)\right\|\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1 \leqslant$$

$$\leqslant \|A_1\|^2 \max_{s\in[-H,0]\cup[0,H]}\|U''(s)\| \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\int_0^{\tau}\int_0^{s_1}\frac{s(\tau-s)}{2} =$$

$$= \|A_1\|^2 \max_{s\in[-H,0]\cup[0,H]}\|U''(s)\|\,\frac{\tau^4N^2}{24} = \|A_1\|^2 \max_{s\in[-H,0]\cup[0,H]}\|U''(s)\|\,\frac{h^4}{24N^2}.$$

Теперь перейдем к первому интегралу, выражение внутри которого имеет вид

$$\int_0^{\tau}\int_{s_1}^{\tau}\left\|R(\theta_p+s_1,\theta_q+s_2)-R^N(\theta_p+s_1,\theta_q+s_2)\right\|\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1 \leqslant$$

$$\leqslant \|A_1\|^2\int_0^{\tau}\int_{s_1}^{\tau}\Big\|U(s_1-s_2+a)-$$

$$-U(a)+\big(U(a)-U(a-\tau)\big)\frac{(s_2-s_1)}{\tau}\Big\|\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1, \quad a:=\theta_p-\theta_q.$$

Для произвольной матрицы A выполнено свойство $\|A\| = \left\|A^T\right\|$. Пользуясь этим свойством и свойством (1.3) матрицы Ляпунова, транспонируем выражение под знаком интеграла и получим

$$\|A_1\|^2\int_0^{\tau}\int_{s_1}^{\tau}\Big\|U(s_2-s_1-a)-$$

$$-U(-a)+\big(U(-a)-U(-a+\tau)\big)\frac{(s_2-s_1)}{\tau}\Big\|\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1, \quad a:=\theta_p-\theta_q.$$

Сделав замену $s:=s_2-s_1$ во втором интеграле, получим выражение

$$\int_0^{\tau}\int_0^{\tau-s_1}\Big\|U(s-a)-U(-a)+\big(U(-a)-U(-a+\tau)\big)\left(\frac{s}{\tau}\right)\Big\|\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1 =$$

$$=\int_0^{\tau}\int_0^{\tau-s_1}\Big\|G(s)-G(0)+\big(G(0)-G(\tau)\big)\left(\frac{s}{\tau}\right)\Big\|\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1,$$

где функция

$$G(s) := U(s-a), \quad s \in [0,\tau].$$

Поскольку

$$s \in [0,\tau] \implies s-a \in [-(q-p)\tau, -(q-p-1)\tau],$$

видно, что для любых точек $p, q = 1, \ldots, N$ выполнено $s-a \in [0,H]$, либо $s-a \in [-H,0]$, а значит функция $U(s-a)$ дважды дифференцируема на рассматриваемом отрезке. Теперь можно применить лемму 3.1 к функции G, находящейся под знаком интеграла, и окончательно оценить первый двойной интеграл:

$$\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\int_0^{\tau}\int_{s_1}^{\tau}\left\|R(\theta_p+s_1,\theta_q+s_2)-R^N(\theta_p+s_1,\theta_q+s_2)\right\|\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1 \leqslant$$
$$\leqslant \|A_1\|^2 \max_{s\in[-H,0]\cup[0,H]}\|U''(s)\| \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\int_0^{\tau}\int_0^{\tau-s_1}\frac{s(\tau-s)}{2} =$$
$$= \|A_1\|^2 \max_{s\in[-H,0]\cup[0,H]}\|U''(s)\|\,\frac{\tau^4N^2}{24} = \|A_1\|^2 \max_{s\in[-H,0]\cup[0,H]}\|U''(s)\|\,\frac{h^4}{24N^2}.$$

Напомним оцениваемую нами разность:

$$|v_0(\varphi)-v_0^{(N)}(\varphi)| \leqslant 2\int_{-H}^{0}\left\|Q(s)-Q^N(s)\right\|\mathrm{d}s\,\|\varphi\|_H^2 +$$
$$+\int_{-H}^{0}\int_{-H}^{0}\left\|R(s_1,s_2)-R^N(s_1,s_2)\right\|\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_1\,\|\varphi\|_H^2.$$

Собирая полученные оценки, оформим полученный результат в виде теоремы:

Теорема 3.2. *Следующее неравенство выполнено для любого числа $N \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ и любой начальной функции $\varphi \in PC([-H,0],\mathbb{R}^n)$:*

$$\left|v_0(\varphi)-v_0^N(\varphi)\right| \leqslant \frac{c}{N^2}\,\|\varphi\|_H^2,$$

где константа

$$c = \frac{1}{12} \max_{s \in [-H,0] \cup [0,H]} \|U''(s)\| \, \|A_1\| \, h^3 (2 + \|A_1\| \, h).$$

Отметим еще, что

$$\|U''(s)\| = \left\| -(U^T(-s))'' \right\| = \|U''(-s)\| \, , \quad s \in [-H, 0],$$

откуда $\max_{s\in[-H,0]\cup[0,H]} \|U''(s)\| = \max_{s\in[0,H]} \|U''(s)\|$. Из формул (2.7), (2.8), а так же динамического свойства следует, что норму второй производной можно оценить как

$$\|U''(s)\| = \|A_0 U'(s) + A_1 U'(s-h)\| \leqslant KU(\|A_0\| + \|A_1\|) = K^2 U,$$
$$K := \|A_0\| + \|A_1\| \, , \quad U := \max_{s \in [0,H]} \|U(s)\| \, .$$

Таким образом, в качестве константы c можно так же взять число

$$c = \frac{1}{12} \max_{s \in [0,H]} \|U(s)\| \left(\|A_0\| + \|A_1\| \right)^2 \|A_1\| \, h^3 \big(2 + \|A_1\| \, h \big). \tag{3.4}$$

3.3 Критерий экспоненциальной устойчивости

В данном разделе приведем критерий экспоненциальной устойчивости для системы с одним запаздыванием, аналогичный теореме 2.4 для системы с несколькими кратными запаздываниями. Отличия состоят в том, что матрица, участвующая в формулировке нового критерия, имеет меньшую размерность и, выглядит чуть более эстетично.

Докажем сначала одну вспомогательную теорему, аналогичную теореме 2.3:

Теорема 3.3. *Зафиксируем число $N \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Если матрица*

$$\mathcal{K}_N := \{U(j-i)\tau\}_{i,j=0}^{N}$$

положительно определена, то матрица

$$\mathcal{A}_N := \begin{bmatrix} U(0) & \mathcal{Q}_N \\ (\mathcal{Q}_N)^T & \mathcal{R}_N \end{bmatrix},$$

участвующая в формулировке теоремы 3.1, неотрицательно определена.

Доказательство. Матрицу $\mathcal{K}_N$ можно представить в блочном виде

$$\mathcal{K}_N = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1,1} & \mathcal{K}_{1,2} \\ \mathcal{K}_{2,1} & U(0) \end{bmatrix}.$$

Отсюда по теореме 1.6 матрица $U(0)$ положительно определена. По теореме 1.5 матрица $\mathcal{A}_N$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда дополнение $\mathcal{S}_N := \mathcal{R}_N - (\mathcal{Q}_N)^T U^{-1}(0)\mathcal{Q}_N$ неотрицательно определено. Напомним формулы для блочных матриц $\mathcal{Q}_N$ и $\mathcal{R}_N$:

$$\mathcal{Q}_{N_{1,i}} = U\big((-N+i)\tau\big)A_1, \quad i = 0, \dots, N,$$
$$\mathcal{R}_N = \{A_1^T U((j-i)\tau)A_1\}_{i,j=0}^N,$$

откуда дополнение $\mathcal{S}_N$ имеет блоки следующего вида

$$\mathcal{S}_{N_{i,j}} = A_1^T \Big[U((j-i)\tau) - U^T(\big((-N+i)\tau\big)U^{-1}(0)U(\big(-N+j\big)\tau)\Big]A_1,$$
$$i, j = 0, \dots, N-1.$$

На границе в точках $i = N$ или $j = N$ матрица $\mathcal{S}_N$ окаймляется нулевыми блоками:

$$\mathcal{S}_{N_{N,j}} = A_1^T \Big[U\big((j-N)\tau\big) - U^T\big((-N+N)\tau\big)U^{-1}(0)U\big((-N+j)\tau\big)\Big]A_1 =$$
$$= 0_{n\times n}, \quad j = 0, \dots, N,$$
$$\mathcal{S}_{N_{i,N}} = A_1^T \Big[U\big((N-i)\tau\big) - U^T\big((-N+i)\tau\big)U^{-1}(0)U\big((-N+N)\tau\big)\Big]A_1 =$$
$$= 0_{n\times n}, \quad i = 0, \dots, N.$$

Поэтому, чтобы показать неотрицательную определенность матрицы $\mathcal{S}_N$, достаточно показать неотрицательную определенность матрицы, равной $\{\mathcal{S}_{N_{i,j}}\}_{i,j=0}^{N-1}$. Для этого представим матрицу $\mathcal{K}_N$ в виде

$$\mathcal{K}_N = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{N-1} & \mathcal{B}_N \\ (\mathcal{B}_N)^T & U(0) \end{bmatrix}.$$

Здесь блоки

$$\mathcal{K}_{N-1} := \{U\big((j-i)\tau\big)\}_{i,j=0}^{N-1}$$

и

$$\mathcal{B}_{N_{i,1}} := U\big((N-i)\tau\big), \quad i = 0, \dots N-1.$$

Применим к данной матрице теорему 1.6, откуда следует, что дополнение $\mathcal{K'}_{N-1} := \mathcal{K}_{N-1} - \mathcal{B}_N U^{-1}(0)(\mathcal{B}_N)^T$ положительно определено. Блоки этой матрицы имеют вид

$$\mathcal{K'}_{N-1_{i,j}} = U\big((j-i)\tau\big) - U\big((N-i)\tau\big)U^{-1}(0)U^T\big((N-j)\tau\big),$$
$$i, j = 0, \dots, N-1,$$

откуда следует, что

$$\{\mathcal{S}_{N_{i,j}}\}_{i,j=0}^{N-1} = \begin{bmatrix} A_1^T & 0_{n\times n} & \dots & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & A_1^T & \dots & 0_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \dots & A_1^T \end{bmatrix} \mathcal{K}' \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n\times n} & \dots & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & A_1 & \dots & 0_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \dots & A_1 \end{bmatrix}.$$

Теорема доказана.

Сформулируем окончательный результат данной главы:

Теорема 3.4. *Система $\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h)$ экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию Ляпунова и* *матрица*

$$\mathcal{K}_{N^*} := \begin{bmatrix} U(0) & U(\tau) & U(2\tau) & \dots & U(h) \\ U(-\tau) & U(0) & U(\tau) & \dots & U\big(h-\tau\big) \\ U(-2\tau) & U(-\tau) & U(0) & \dots & U\big(h-2\tau\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U(-h) & U(-h+\tau) & U(-h+2\tau) & \dots & U(0) \end{bmatrix},$$

где $\tau := \frac{h}{N^*}$ *положительно определена с числом*

$$N^* := \left\lceil \frac{\sqrt{\max_{\theta\in[0,H]} \|U''(\theta)\| h^{\frac{3}{2}}} \, \|A_1\|^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2+\|A_1\|\, h)} \sqrt{(\|A_0\|+\|A_1\|)}}{\sqrt{3\lambda_{\min}(W)}} \right\rceil.$$

Доказательство. Необходимость. Матрица K_{N^*} по определению есть

$$K_{N^*} = \{U(j-i)\tau\}_{i,j=0}^{N^*}.$$

Она является частным случае матрицы, упоминаемой в теореме 1.8 с числами

$$r := N^*+1, \quad \tau_i := (i-1)\tau, \quad i = 1,\dots,N^*+1.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим теперь, что матрица $\mathcal{K}^{N^*}$ положительно определена. Тогда по теореме 3.3 матрица $\mathcal{A}_{N^*}$ неотрицательно определена. В частности, отсюда и из теоремы 3.1 следует, что для любой начальной функции φ

$$v_0^{N^*}(\varphi) = \int_0^1 \left[\varphi^T(0)\Psi^T(\alpha)\right] \mathcal{A}_{N^*} \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \Psi(\alpha) \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Предположим от противного, что система не является экспоненциально устойчивой. Тогда по теореме 1.9 существует начальная функция $\widetilde{\varphi}$ такая, что

$$v_0(\widetilde{\varphi}) < -a_0, \quad a_0 = \frac{\lambda_{\min}(W)}{4K}.$$

По определению множества, которому принадлежит функция $\widetilde{\varphi}$, выполнено $\|\widetilde{\varphi}\|_H = 1$. Отсюда, из теоремы 3.2 следует

$$v_0^{N^\star}(\widetilde{\varphi}) \leqslant v_0(\widetilde{\varphi}) + \frac{c}{(N^\star)^2} < -a_0 + \frac{c}{(N^\star)^2}.$$

По определению $N^\star$, мы получаем $\dfrac{c}{(N^\star)^2} \leqslant a_0$, и следовательно $v_0^{N^\star}(\widetilde{\varphi}) < 0$, противоречие. Теорема доказана.

Если использовать константу c из формулы (3.4), то число N^* будет равно

$$N^* = \left\lceil \frac{\sqrt{\max_{\theta\in[0,H]} \|U(\theta)\| h^{\frac{3}{2}}} \, \|A_1\|^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2 + \|A_1\| \, h)} (\|A_0\| + \|A_1\|)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\lambda_{\min}(W)}} \right\rceil.$$

Глава 4. Примеры

В данной главе мы сравним наиболее примечательные методы конструктивной проверки экспоненциальной устойчивости линейной системы с одним запаздыванием в терминах матриц Ляпунова, которые существуют на данный момент времени. Будем рассматривать 6 методов для одного запаздывания: метод из работы [15], метод из работы [16], и метод из работы [16] с улучшенной нами размерностью матрицы, и метод, основанный на теореме 2.4, метод, основанный на теореме 3.4 и метод с прогнозируемой нами наилучшей оценкой размерности матрицы, которую можно достичь для матрицы из теоремы 3.4.

Опишем подробнее в чем заключается каждый метод. Метод из работы [15] применим как для систем с одним запаздыванием, так и для систем с несколькими кратными запаздываниями. Будем называть этот метод `Egorov`. Опишем метод для системы (1.1) с несколькими запаздываниями. Метод заключается в следующих шагах:

1. Проверяем, является ли матрица

$$\mathcal{P}(\tau) := \begin{bmatrix} U(0) & U(\tau) \\ U^T(\tau) & U(0) \end{bmatrix}$$

положительно определенной на полуинтервале $\tau \in (0, H]$. Здесь H – максимальная величина запаздывания системы, $H = mh$. Если в какой-то точке τ матрица $\mathcal{P}(\tau)$ не является положительно определенной, заключаем что система не экспоненциально устойчива. В противном случае переходим к шагу 2. На практике полуинтервал $(0, H]$ проверяется в точках

$$s := \frac{i}{100} H, i = 1, \quad \dots, 100.$$

В дальнейшем при нахождении наименьшего или наибольшего значения функции на непрерывном отрезке, тот же подход будет использоваться во всех выражениях данной главы.

2. Вычислим число

$$N^* := 1 + \left\lceil e^{KH} * H * (K+L) * (\alpha^* + \sqrt{\alpha^*(\alpha^*+1)}) - KH \right\rceil .$$

Здесь константа

$$L := \max_{t\in[0,H]} \|K'(t)\| ,$$

где $K\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ – фундументальная матрица системы (1.1), удовлетворяющая уравнению

$$K'(t) = A_0K(t) + A_1K(t-h) + \cdots + A_mK(t-mh),$$
$$K(0) = E_{n\times n}, \quad K(t) = 0_{n\times n}, \quad t < 0.$$

Константа K имеет вид $K := \sum_{i=0}^{m} \|A_i\|$ и число $\alpha^* := \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, где

$$\alpha_2 := \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|\, h_i\right)^2 \|U(0)\| + H\,\|W\| ,$$
$$\alpha_1 := \lambda_{\min}(W)\frac{e^{-2KH}}{4K}\cos^2(b_0), \tag{4.1}$$

с числом b_0, являющимся единственным числом, удовлетворяющим уравнению

$$((KH)^2 + b_0^2)\sin^4(b_0) - (KH)^2 = 0$$

на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.

3. Проверяем матрицу из теоремы 3.4

$$\mathcal{K}_{N^*} := \{U(j-i)\tau\}_{i,j=1}^{N^*} , \quad \tau := \frac{h}{N^*-1}$$

на положительную определенность.

Для системы с одним запаздыванием L на шаге 2 можно вычислить по формуле

$$L := \|A_0\|\, e^{\|A_0\|H}.$$

Метод из работы [16] применим к системе с одним запаздыванием, хотя, без сомнения, он может быть обобщен и на случай систем с несколькими кратными запаздываниями. Будем называть его `Bajodek`. Он заключается в проверке положительной определенности матрицы $\boldsymbol{P}^N$, элементы которой являются интегральными произведениями матрицы Ляпунова и полиномов Лежандра на отрезке $[-h, 0]$. Полиномы Лежандра имеют следующий вид

$$l_k(\tau) := (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_j^k C_j^{k+j} \left(\frac{\tau + h}{h}\right)^j, \quad k \in \mathbb{N}_{\geqslant 0},$$

где

$$C_j^k := \frac{k!}{j!(k-j)!}, k, j \in \mathbb{N}_{\geqslant 0},$$

а $k!$ – это факториал числа k. Сама матрица $\boldsymbol{P}^{N^*}$ имеет следующий вид

$$\boldsymbol{P}^{N^*} := \begin{bmatrix} U(0) & \boldsymbol{Q}^{N^*} \\ (\boldsymbol{Q}^{N^*})^T & \boldsymbol{T}^{N^*} + \boldsymbol{I}_{N^*}^{-1} \end{bmatrix},$$

где матричные блоки выглядят следующим образом

$$\boldsymbol{Q}^{N^*} = \left\{ \int_{-h}^{0} U^T(h+s) A_1 l_i(s) \mathrm{d}s \right\}_{i=0}^{N^*-1},$$

$$\boldsymbol{T}^{N^*} = \left\{ \int_{-h}^{0} \int_{-h}^{0} A_1^T U(s_1 - s_2) A_1 l_i(s_1) l_j(s_2) \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_1 \right\}_{i=0}^{N^*-1},$$

$$\boldsymbol{I}_{N^*}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{h}{1} E_{n\times n} & 0_{n\times n} & \dots & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & \frac{h}{3} E_{n\times n} & \dots & 0_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \dots & \frac{h}{2N^*-1} E_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Число N^* вычисляется по следующей формуле:

$$N^* := N(\varepsilon(\alpha_1)),$$

где число α_1 берется из формулы (2), функция $\varepsilon(\eta)$ равна

$$\varepsilon(\eta) := -\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_2+1}\right)^2 + \frac{\eta}{h(\kappa_2+1)}},$$
$$\kappa_1 := \max_{\tau\in[0,h]} \|U(\tau)A_1\|, \quad \kappa_2 := \max_{\tau\in[-h,h]} \left\|A_1^T U(\tau) A_1\right\|.$$

Наконец, фунция $N(\varepsilon)$ вычисляется по следующей формуле:

$$N(\varepsilon) := \max\left(4, \left\lceil \frac{3}{2} + \mu e^{1+W(-\frac{\log(\rho\varepsilon)}{\mu e})} \right\rceil\right),$$

где

$$\mu := \frac{hK}{2}, \quad \rho := \sqrt{\frac{2\lceil\mu\rceil}{\pi^3}} \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\mu e}{\lceil\mu\rceil + \frac{1}{2}}\right)^{\lceil\mu\rceil+\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Размерность матрицы $\boldsymbol{P}^{N^*}$, получаемой по данной формуле, обычно крайне мала и не превышает 100×100 для большинства примеров. Однако вычисление всех интегралов для результирующей матрицы $\boldsymbol{P}^{N^*}$ является очень трудоемкой задачей, даже при небольшой размерности матрицы. Например, численное вычисление всех интегралов для матрицы $\boldsymbol{P}^{N^*}$ размерности 20×20 может занять несколько часов. Авторы статьи предложили альтернативный метод вычисления этих интегралов с использованием рекуррентных формул, что значительно сокращает время работы программы. Однако предложенные формулы численно неустойчивы, из-за чего приходится использовать завышенную точность вычислений программы заранее, поскольку точная оценка накопления погрешности в зависимости от количества итераций рекуррентных формул не была установлена в статье. Численная неустойчивость рекуррентных формул приводит к экспоненциальному росту накопления погрешности вычислений при увеличении необходимого числа рекурсивных итераций, что существенно снижает выигрыш в размерности, получаемый за счет аппроксимации с помощью полиномов Лежандра. Кроме того, полученные рекуррентные формулы могут быть не применимы для некоторых систем, но в будущем их можно будет обобщить.

Третий метод похож на второй, за исключением оценки в формуле (4.2), которая теперь имеет вид:

$$N := \max\left(4, \quad 2 + \left\lceil \frac{hK}{2} e^{1+W(-\frac{\log(\mu\varepsilon)}{hK\frac{e}{2}})} \right\rceil\right), \quad \mu := \left(\frac{e}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}\pi}^{-1}.$$

Будем называть его `BajodekBound`.

Четвертый метод применим к системам с одним и несколькими кратными запаздываниями и заключается в применении теоремы 2.4. Будем называть его `PC`.

Пятый метод применим только к системам с одним запаздыванием и заключается в применении теоремы 3.4. Заметим, что матрица, участвующая в этом методе, совпадает с матрицей из метода `Egorov`, только для другой размерности. Будем называть этот метод `PL`.

Шестой метод чисто гипотетитческий, будем проверять его валидность на системах с одним запаздыванием. Он заключается в применении теоремы 3.4 с числом $N^* := Kh$. Будем называть этот метод `LimitBound`.

Все вычисления производятся в среде MATLAB. Вычисления в методах `Bajodek, BajodekBound` осуществляются с точностью 32 знака после запятой. Для исследуемых системы все методы согласуются друг с другом с точки зрения выдаваемых результатов экспоненциальной устойчивости исследуемых систем.

Пример 1. Рассмотрим как ведут себя размерности матриц в зависимости от запаздывания системы. Для этого рассмотрим скалярное уравнение с одним запаздыванием

$$\dot{x}(t) = x(t) - 2x(t-h), \quad h = 0.1 : 0.01 : 2. \tag{4.3}$$

Данный пример рассматривался в работе [16]. Нотация выше означает, что величина запаздывания h пробегает все значения отрезка $[0.1, 2]$ с шагом 0.01. Система является экспоненциально устойчивой при $h < 0.6046$ и не является экспоненциально устойчивой при $h > 0.6047$.

	LB	Baj	$BajB$
Мин. t	0.000947	0.524449	0.527165
Ср. t	0.002863	6.089539	1.698167
Макс. t	0.005128	14.343537	4.302540
Мин. N^*	2	4	4
Ср. N^*	4.005988	14.350000	7.044444
Макс. N^*	6	24	11

Таблица 1: Средняя размерность матрицы и время работы методов `LowerBound`, `Bajodek`, `BajodekBound` для системы (4.3)

	Eg	PC	PL
Мин. t	0.087424	0.032924	**0.032260**
Ср. t	20.371319	0.417237	**0.040231**
Макс. t	290.403881	23.456071	**0.089185**
Мин. N^*	35	1	2
Ср. N^*	649749.232558	152.411111	5.833333
Макс. N^*	16710713	2630	19

Таблица 2: Средняя размерность матрицы и время работы методов `Egorov`, `PiecewiseConstant`, `PiecewiseLinear` для системы (4.3)

Результаты сравнения приведены в таблицах 1 и 2. Жирным шрифтом выделены лучшие значения времени. Из приведенных результатов видно, что метод `PiecewiseLinear` является самым быстрым из сравниваемых. Также, у методов `PiecewiseConstant`, `Egorov` размерность матрицы N^* растет при подходе к границе критического запаздывания $h = 0.6046$, что отражается в значениях для полей "Ср. N^*" и "Макс. N^*". Экспериментальным путем было выяснено, что вблизи критических значений параметров системы, которые отделяют области экспоненциально устойчивых и неустойчивых систем, норма матрицы Ляпунова U взрывается и уходит на бесконечность. Поскольку формула для размерности N^* метода `PiecewiseConstant` зависит от $\|U\|$, взрыв нормы U прямо влияет на размерность матрицы K^{N^*}. Скорее всего, $\|U\|$, также неявно скрыта в оценке размерности метода `Egorov`. В методе `PL` размерность зависит от $\sqrt{\|U\|}$, так что взрыв сказывается не настолько сильно. В методе `Bajodek` размерность зависит от $\ln(\|U\|)$. Таким образом, в пределе метод `Bajodek` будет иметь наилучшую оценку размерности матрицы и время работы около критических значений параметров относительно всех остальных методов, исключая гипотетический `LowerBound`.

Пример 2. Исследуем поведение размерности вблизи критического значения запаздывания $h = 0.6046$ системы (4.3). В данном примере $h = 0.6 : 0.0001 : 0.7$.

	LB	Baj	$BajB$
Мин. t	0.000820	3.393825	0.751224
Ср. t	0.003799	4.328231	0.960912
Макс. t	0.005128	33.727996	**3.808480**
Мин. N^*	2	12	5
Ср. N^*	2.000000	12.267327	5.000000
Макс. N^*	2	16	5

Таблица 3: Средняя размерность матрицы и время работы методов `LowerBound`, `Bajodek`, `BajodekBound` для системы (4.3) в окрестности точки $h = 0.6046$

	Eg	PC	PL
Мин. t	–	0.031494	**0.040720**
Ср. t	–	–	**0.378436**
Макс. t	–	–	21.937274
Мин. N^*	16710713	2327	18
Ср. N^*	79564748.243902	586043.613861	57.168317
Макс. N^*	821868911	58083121	2589

Таблица 4: Средняя размерность матрицы и время работы методов `Egorov`, `PiecewiseConstant`, `PiecewiseLinear` для системы (4.3) в окрестности точки $h = 0.6046$

В данном примере значения времени, матрицы которых нельзя обработать в MATLAB, обозначены прочерком. Соответствующие размерности матрицы также могут быть обозначены прочерком. Из значения поля "Макс. t" можно увидеть, что в узкой границе точки $h = 0.6046$ метод `BajodekBound` начинает превосходить метод `PiecewiseLinear` по скорости.

Пример 2. Рассмотрим как влияют нормы матрицы системы и ее размерность на число N^*. Для этого рассмотрим матричное уравнение четвертого порядка с одним запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad h = 0.3 : 0.1 : 1, \tag{4.4}$$

где матрицы

$$A_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}, \quad A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Данный пример также рассматривался в работе [16].

	LB	Baj	$BajB$
Мин. t	0.042754	–	–
Ср. t	0.248616	–	–
Макс. t	0.005128	–	–
Мин. N^*	11	–	–
Ср. N^*	23.625000	–	–
Макс. N^*	36	–	–

Таблица 5: Средняя размерность матрицы и время работы методов `LowerBound`, `Bajodek`, `BajodekBound` для системы (4.4) в окрестности точки $h = 0.6046$

	Eg	PC	PL
Мин. t	–	–	**0.259333**
Ср. t	–	–	**2.319728**
Макс. t	–	–	**9.090039**
Мин. N^*	–	136267	78
Ср. N^*	–	4110092.250000	469.000000
Макс. N^*	–	19767253	1235

Таблица 6: Средняя размерность матрицы и время работы методов `Egorov`, `PiecewiseConstant`, `PiecewiseLinear` для системы (4.4) в окрестности точки $h = 0.6046$

В данном примере значения времени и размерностей матрицы, которые нельзя обработать в MATLAB либо их обработка занимает более 10 минут, обозначены прочерком. Соответствующие размерности матрицы также могут быть обозначены прочерком.

Выводы

В данной работе получены:

1. Конструктивный критерий экспоненциальной устойчивости для линейной дифференциальной системы с несколькими кратными запаздываниями, являющийся временным улучшением критерия, существовавшего ранее.

2. Конструктивный критерий экспоненциальной устойчивости.

3. Реализованы и сравнены друг с другом 6 алгоритмов, с помощью которых можно определить экспоненциальную устойчивость данной линейной системы с запаздыванием за конечное число математических операций.

Время работы полученных критериев увеличивается при росте норм матриц системы и базовой величины запаздывания.

В будущем можно:

- Применить процедуру кусочно-квадратичной дискретизации и формулы квадратур высших порядков к системе с одним запаздыванием.

- Доказать предельную оценку в методе `LimitBound`.

- Обобщить результаты на системы с несколькими кратными запаздываниями.

Заключение

В данной работе разработаны критерий экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с кратными запаздываниями, а также критерий, являющийся улучшением первого критерия в случае одного запаздывания. Критерии позволяют свести проверку устойчивости системы к проверке выполнения условия Ляпунова и проверке положительной определенности некоторой блочной матрицы, зависящей только от матрицы Ляпунова.

Список литературы

[1] Loiseau J. J., Michiels W., Niculescu S. I., Sipahi R. Topics in time delay systems: analysis, algorithms and control // Lecture notes in control and information sciences. Vol. 388. Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 418 p.

[2] Delice I. I., Sipahi R. Controller design for delay-independent stability of multiple time-delay systems via Déscartes's rule of signs // 9th IFAC Workshop on Time Delay Systems. Prague, Czech Republic. 2010. P. 144–149.

[3] Kharitonov V. L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[4] Bellman R., Cooke K. L. Differential-difference equations. N. Y.: Academic Press, 1963. 482 p.

[5] Неймарк Ю.:/И. D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 4. С. 349–380.

[6] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of time delay systems. Boston: Birkhäuser, 2003. 353 p.

[7] Niculescu S. I. Delay effects on stability: a robust control approach. Heidelberg: Springer, 2001. 383 p.

[8] Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European Journal of Control. 2014. Vol. 20(6). P. 271–283.

[9] Репин Ю. М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. С. 564–566.

[10] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142, No 1. P. 83–94.

[11] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differential Equations. 1978. Vol. 29, No 3. P. 439–451.

[12] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39, No 1. P. 15–20.

[13] Mondie S., Egorov A. V. Some necessary conditions for the exponential stability of one delay systems // 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. Merida City, Mexico. 2011. P. 1–6.

[14] Egorov A. V., Mondie S. Necessary conditions for the exponential stability of time-delay systems via the Lyapunov delay matrix // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2014. Vol. 24(12). P. 1760–1771.

[15] Gomez M. A., Egorov A. V., Mondie S. Lyapunov matrix based necessary and sufficient stability condition by finite number of mathematical operations for retarded type systems // Automatica. 2019. No 108, 108475.

[16] Bajodek M. et al. Necessary and sufficient stability condition for time-delay systems arising from Legendre approximation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. doi: 10.1109/TAC.2022.3232052

[17] Gu K. Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time delay systems // International Journal of Control. 1997. Vol. 68, P. 923–934.

[18] Gu K. Discretized Lyapunov functional for uncertain systems with multiple time-delay // International Journal of Control. 1999. Vol. 72. Iss. 16. P. 1436–1445.

[19] Gu K. Discretization schemes for Lyapunov-Krasovskii functionals in time-delay systems // Kybernetika. 2001. Vol. 37. Iss. 4. P. 479–504.

[20] Медведева И. В. Конструктивные методы анализа экспоненциальной

устойчивости линейных систем запаздывающего типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2014. 150 с.

[21] Tao T. Analysis I. Fourth edition. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2022. 301 p.

[22] Belov A. I., Alexandrova I. V. Discretization of the functionals with prescribed derivative // Proceedings of 17th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Montreal, Canada, 2022. PP. 372–377.

[23] Egorov A. V. A new necessary and sufficient stability condition for linear time-delay systems // IFAC Proceedings Volumes, 2014. Vol. 47. Iss. 3. PP. 11018–11023.

[24] Alexandrova I. V, Zhabko A. P. Stability of neutral type delay systems: A joint Lyapunov–Krasovskii and Razumikhin approach // Automatica. 2019. No 106. PP. 83–90.

[25] Mondié S., Kharitonov V. Stability analysis of linear time delay systems via piecewise linear complete Lyapunov–Krasovskii functionals // Proceedings of 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control, Oaxaca, Mexico, 2004. PP. 103–108.