Санкт-Петербургский государственный университет

ДМИТРИЕВА Анна Сергеевна

Выпускная квалификационная работа

Полные полиномиальные системы УрЧП для эллиптического случая задачи двух тел

Магистратура:
Направление *01.04.02 «Прикладная математика и информатика»*
Основная образовательная программа *ВМ.5517 «Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»*

Научный руководитель:
доцент, кафедра механики управляемого движения,
кандидат физ. – мат. наук,
Потоцкая Ирина Юрьевна

Рецензент:
ведущий специалист по тестированию, ООО "Воркми", магистр,
Брегман Анна Михайловна.

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

Введение

С развитием технологий роль компьютеров в решении различных задач значительно возросла. Однако технические ресурсы вычислительных устройств имеют свои ограничения, поэтому необходимо развивать численные методы. Таким образом для каждой проблемы можно будет найти наиболее подходящий и точный способ решения. Особенно важны решения дифференциальных уравнений.

Системы дифференциальных уравнений активно используются в описании всевозможных процессов физики, химии, биологии и пр. Большинство из задач современных естественных наук в той или иной мере использует дифференциальные уравнения, так как они наиболее удобны для описания поведения процессов во времени, а также исследование дифференциальных уравнений позволяет судить об описываемых изменениях без непосредственного решения, строить предположения о дальнейшей динамике развития, предсказывать исход этих процессов, изучать влияние внешних воздействий и многое, многое другое. Однако не существует какого-то единого способа получить аналитическое решение дифференциального уравнения или тем более системы дифференциальных уравнений. Более того они обладают различными свойствами, которые не позволяют однозначно выбрать какой-то численный метод, одинаково хорошо решающий любое уравнение. Поэтому при интегрировании дифференциальных уравнений широко используются различные численные методы. Выбор таких методов достаточно велик. Наиболее распространены пошаговые методы. Хорошо к быстрой смене шага приспособлены явные методы Рунге –Кутта и рядов Тейлора.

Метод рядов Тейлора часто имеет преимущество в точности вычислений. Более того он позволяет решать жесткие задачи, где известные методы Рунге-Кутты могут давать неудовлетворительные результаты. Но сложность применения этого метода заключается в необходимости многократного вычисления коэффициентов рядов. В общем случае это может сделать программную реализацию метода более громоздкой и медленной. Но в случае, когда интегрируемая система имеет полиномиальные правые части, коэффициенты Тейлора можно вычислить с помощью рекуррентных формул. Для таких систем метод рядов Тейлора может давать очень точные результаты в рамках требуемой погрешности, при этом сохраняя высокую скорость вычисления. Поэтому метод рядов Тейлора может быть эффективнее других методов при решении сложных задач с высокими требованиями к относительной погрешности.

Задача двух тел также может быть представлена в виде дифференциальных уравнений и решена методом рядов Тейлора. Это одна из самых известных задач классической механики, которая заключается в определении движения двух материальных точек, взаимодействующих только друг с другом. Примеры такой задачи очевидны: взаимное движение планеты и спутника, планеты и звезды или электрон, вращающийся вокруг атомного ядра. Математическая модель задачи двух тел может быть представлена в виде полной полиномиальной системы уравнений в частных производных. Решение такой системы может быть получено методом рядов Тейлора. Но до недавнего времени литературы, описывающей такой алгоритм для подобных систем, не было. Только в начале мая 2021 года в «Вестнике СПбГУ» была опубликована статья «Estimates for Taylor series method to polynomial total systems of PDEs» (Бабаджанянц Л.К, Потоцкая И.Ю., Пупышева Ю.Ю.), дающая необходимые математические инструменты для интегрирования полных полиномиальных систем УрЧП методом Тейлора.

Поэтому представляемую мной научную работу можно рассматривать как пример применения метода рядов Тейлора для полиномиальной системы УрЧП. Здесь, в качестве знакомства с методом рядов Тейлора, представлен алгоритм применения метода для интегрирования полиномиальных систем дифференциальных уравнений и проделано несколько его шагов для получения некоторых аналитических формул. Практический смысл такой работы заключается в изучении самой модели и численного метода, составлении удобного алгоритма, составлении схемы для применения алгоритма на описанной системе.

Кроме того, некоторые результаты моей научной работы в дальнейшем можно будет распространять и на другие задачи, представляемые в виде полиномиальной системы дифференциальных уравнений.

Постановка задачи

Целью работы является составление алгоритма решения методом рядов Тейлора системы полиномиальных уравнений в частных производных и схемы необходимой для применения алгоритма для задачи двух тел.

Для достижения этой цели ставятся следующие задачи:

1. Изучение задачи двух тел.
2. Изучение метода для решения полиномиальных систем дифференциальных уравнений методом рядов Тейлора.
3. Составление алгоритма на основе изученного метода.
4. Получение полиномиальной системы УрЧП для задачи двух тел.
5. Преобразование системы согласно алгоритму.

Обзор литературы

Во время написания данной работы использовалась следующая научная и учебно-методическая литература.

Для изучения задачи двух тел в первой главе были взяты книги [3] и [4].

Системы полиномиальных уравнений в частных производных для задачи двух тел были взяты из [2], [5].

Источником теоретической информации по использованию метода Тейлора была работа [6].

Глава 1. Задача двух тел

1.1 Постановка задачи

Задача двух тел заключается в изучении их движения под действием гравитационных сил взаимного притяжения. Эти два тела считаются изолированными от других тел и любых других воздействий. Как и в большинстве случаев я рассматривала задачу о движении двух материальных точек, то есть полагая, что масса каждого из тел целиком сосредоточена в его центре масс, и пренебрегая формой и размером тел. Я рассматривала относительно движение, когда начало системы отсчета было помещено в центр масс одного из тел.

Таким образом задача двух тел состоит в определении движения двух тел, взаимодействующих только друг с другом. Распространённые примеры включают спутник, обращающийся вокруг планеты, планета, обращающаяся вокруг звезды, две звезды, обращающиеся вокруг друг друга (двойная звезда), и классический электрон, движущийся вокруг атомного ядра.

1.2 Кеплеровы элементы орбиты

Для того, чтобы записать решение задачи двух тел, нам понадобятся Кеплеровы элементы орбиты и эксцентрическая аномалия, поэтому напомним их. Положение небесного тела в пространстве в задаче двух тел определяется Кеплеровыми элементами орбиты:

- большая полуось,
- эксцентриситет,
- наклонение,
- долгота восходящего узла,
- аргумент перицентра,
- средняя аномалия.

Первые два определяют форму орбиты, третий, четвёртый и пятый — ориентацию плоскости орбиты по отношению к базовой системе координат, шестой — положение тела на орбите. Разберем их все по порядку.

1. Большая полуось.

В случае эллиптической орбиты (именно он рассматривается в этой работе), большая полуось - это большая полуось орбиты, то есть половина расстояния от перицентра до апоцентра.

2. Эксцентриситет.

Выражается формулой: $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Тут a – большая полуось орбиты, а b – малая.

В зависимости от эксцентриситета орбита представляет собой:

- 0 –окружность
- От 0 до 1 – эллипс
- 1 – парабола
- От 1 до бесконечности - гипербола, а малая полуось – мнимое число
- Бесконечность – прямая

3. Наклонение (наклон орбиты).

Угол между плоскостью орбиты и плоскостью отсчета (базовой плоскостью).

Если наклонение от 0 до 90 градусов движение тела называется прямым. Если от 90 до 180, то обратным.

4. Долгота восходящего узла.

Определяет угол в базовой плоскости, образуемый между базовым направлением на нулевую точку и направлением на точку восходящего узла орбиты, в которой орбита пересекает базовую плоскость в направлении с юга на север.

5. Аргумент перицентра.

Определяется как угол между направлениями из притягивающего центра на восходящий узел орбиты и на перицентр (ближайшую к притягивающему центру точку орбиты небесного тела), или угол между линией узлов и линией апсид.

6. Средняя аномалия.

Средняя аномалия есть угловое расстояние от перицентра гипотетического тела, движущегося с постоянной угловой скоростью, равной среднему движению.

Угловые элементы проиллюстрированы на Рис 1.1.

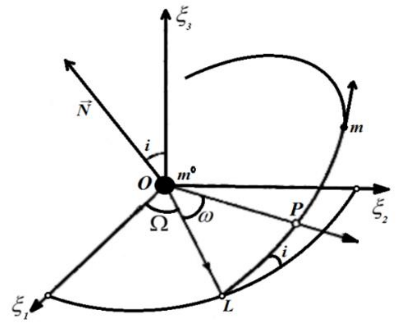

Рис 1.1: *$\vec{N}$ – нормаль к плоскости орбиты, $\overrightarrow{OL}$ – вектор линии узлов, L – восходящий узел, P – перицентр, i – наклонение, Ω – долгота*

Чтобы определить эксцентрическую аномалию, нарисуем орбиту и создадим вспомогательную окружность с центром в центре орбиты и радиусом равным большой полуоси (Рис 1.2). Эксцентрическая аномалия – угол, определяющийся как показано на Рис 1.2.

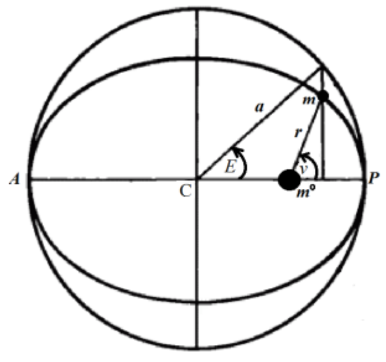

Рис 1.2: *C – центр эллипса (орбиты), P – перицентр, A – апоцентр, m^0 – масса центрального тела, m – масса тела, движущегося по орбите, E – эксцентрическая аномалия.*

1.3 Уравнения движения в эллиптическом случае.

Рассмотрим уравнения движения точки массы m в центральном Ньютоновском поле массы m^0, используя относительную декартову систему координат в точке с массой m^0:

$$\ddot{\xi}_i = -\mu\xi_i r^{-3}\left(\text{ или } \dot{\xi}_i = \eta_i \;\; \dot{\eta}_i = -\mu\xi_i r^{-3}\right) \;\; i \in [1:3]$$

И решения этой системы в общем виде в эллиптическом случае:

$$\begin{gathered}\xi_i/a = A_i\sqrt{1-e^2}\sin E + B_i(\cos E - e), i \in [1:3], r/a = (1 - e\cos E),\\ A_1 = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i,\; B_1 = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i,\\ A_2 = -\sin\omega\sin\Omega - \cos\omega\cos\Omega\cos i,\; B_2 = \cos\omega\sin\Omega - \sin\omega\cos\Omega\cos i,\\ A_3 = \cos\Omega\sin i,\; B_3 = \sin\omega\sin i,\\ E - e\sin E = M, \qquad M = M_0 + n(t - t_0),\\ n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},\;\; \mu = \gamma(m^0 + m),\end{gathered} \tag{1}$$

где a (большая полуось), e (эксцентриситет), M_0 (средняя аномалия в момент t_0), Ω (долгота восходящего узла), i (наклонение), ω (аргумент перицентра) – Кеплеровы элементы орбиты; E (эксцентрическая аномалия), M (средняя аномалия) – функции времени, а γ - гравитационная постоянная.

Глава 2. Система дифференциальных уравнений для задачи двух тел.

2.1 Полиномиальные системы

Запишем полиномиальные системы для нахождения координат и скоростей (опираясь на решение задачи двух тел (1)). В Таблице 2.1 записаны введенные функции и аргументы.

$\varphi_1 = E$, $\varphi_2 = \sin E$; $\varphi_3 = \cos E$; $\varphi_4 = (1 - e\cos E)^{-1}$ $\varphi_5 = a^{-1/2}$, $\varphi_6 = (1-e^2)^{1/2}$, $\varphi_7 = (1-e^2)^{-1/2}$, $\varphi_8 = \xi_1$, $\varphi_9 = \xi_2$, $\varphi_{10} = \xi_3$, $\varphi_{11} = \eta_1$, $\varphi_{12} = \eta_2$, $\varphi_{13} = \eta_3$,	$t_1 = t$, $t_2 = a$, $t_3 = e$, $t_4 = M_0$,
$\varphi_{14} = A_1$, $\varphi_{15} = A_2$, $\varphi_{16} = A_3$, $\varphi_{17} = B_1$, $\varphi_{18} = B_2$, $\varphi_{19} = B_3$, $\varphi_{20} = A_4 = \sin\omega\cos i$, $\varphi_{21} = B_4 = \cos\omega\cos i$, $\varphi_{22} = A_5 = \sin\Omega$, $\varphi_{23} = B_5 = \cos\Omega$	$t_5 = i$, $t_6 = \Omega$, $t_7 = \omega$;

Таблица 2.1: *Введенные переменные*

Будем рассматривать функции $\varphi_i, i = 1, \dots 23$ как функции от t. Теперь выпишем системы дифференциальных уравнений в частных производных. Первая система:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} = \sqrt{\mu}\varphi_4\varphi_5^3, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} = -\frac{3(t_1-t_0)\sqrt{\mu}}{2}\varphi_4\varphi_5^5, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_3} = \varphi_2\varphi_4, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_4} = \varphi_4,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} = \sqrt{\mu}\varphi_3\varphi_4\varphi_5^3, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} = -\frac{3(t_1-t_0)\sqrt{\mu}}{2}\varphi_3\varphi_4\varphi_5^5, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_3} = \varphi_3\varphi_2\varphi_4, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_4} = \varphi_3\varphi_4,$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu}\varphi_2\varphi_4\varphi_5^3,$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} = \frac{3(t_1-t_0)\sqrt{\mu}}{2}\varphi_2\varphi_4\varphi_5^5, \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_3} = -\varphi_4\varphi_2^2, \frac{\partial\varphi_3}{\partial t_4} = -\varphi_2\varphi_4,$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu}t_3\varphi_2\varphi_4^3\varphi_5^3, \qquad \frac{\partial\varphi_4}{\partial t_2} = -\frac{3(t_1-t_0)\sqrt{\mu}}{2}t_3\varphi_2\varphi_4^3\varphi_5^5,$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial t_3} = \varphi_3\varphi_3^2 - t_3\varphi_2^2\varphi_4^3, \qquad \frac{\partial\varphi_4}{\partial t_4} = -t_3\varphi_2\varphi_4^3,$$

$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial t_j} = 0, \qquad j = 1,3,4, \qquad \frac{\partial\varphi_5}{\partial t_2} = \frac{1}{2}\varphi_3^5$$

$$\frac{\partial\varphi_7}{\partial t_j}=\frac{\partial\varphi_6}{\partial t_j}=0\ j=1,2,4,\frac{\partial\varphi_6}{\partial t_3}=-t_3\varphi_7,\frac{\partial\varphi_7}{\partial t_3}=t_3\varphi_7^3,$$

$$\frac{\partial\varphi_{7+i}}{\partial t_1}=t_2\varphi_4\varphi_5^3\sqrt{\mu}(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2),$$

$$\frac{\partial\varphi_{7+i}}{\partial t_2}=(\varphi_3-t_3)B_i+\varphi_6\varphi_3A_i+\frac{3}{2}(t_1-t_0)t_2\varphi_4\varphi_5^5\sqrt{\mu}(B_i\varphi_2-A_i\varphi_6\varphi_3),$$

$$\frac{\partial\varphi_{7+i}}{\partial t_3}=t_2\big(A_i\varphi_6\varphi_2\varphi_4\varphi_3-A_it_3\varphi_2\varphi_7-B_i(1+\varphi_4\varphi_2^2)\big),$$

$$\frac{\partial\varphi_{7+i}}{\partial t_4}=t_2\varphi_4(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2),$$

$$\frac{\partial\varphi_{10+i}}{\partial t_1}=-\Big(\mu t_3\varphi_2\varphi_4^3\varphi_5^4(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)\Big)-\mu\varphi_4^2\varphi_5^4(B_i\varphi_3+A_i\varphi_6\varphi_2),$$

$$\frac{\partial\varphi_{10+i}}{\partial t_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\,\varphi_4\varphi_5^3(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)$$

$$+\frac{3}{2}\mu(t_1-t_0)\varphi_4^2\varphi_5^6[t_3\varphi_2\varphi_4(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)+(A_i\varphi_2\varphi_6+B_i\varphi_3)],$$

$$\frac{\partial\varphi_{10+i}}{\partial t_3}=\sqrt{\mu}\,\varphi_5\varphi_4^2(\varphi_3-t_3\varphi_4\varphi_2^2)(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)$$

$$-\sqrt{\mu}\,\varphi_5\varphi_4(B_i\varphi_2\varphi_4\varphi_3+\varphi_2^2\varphi_6\varphi_4A_i+t_3\varphi_3\varphi_7A_i),$$

$$\frac{\partial\varphi_{10+i}}{\partial t_4}=\sqrt{\mu}\,\varphi_5\varphi_4^2[t_3\varphi_2\varphi_4(A_i\varphi_6\varphi_3-B_i\varphi_2)-(A_i\varphi_2\varphi_6+B_i\varphi_3)]$$

И вторая:

$$\frac{\partial\varphi_{14}}{\partial t_6}=-\varphi_{15},\frac{\partial\varphi_{14}}{\partial t_7}=-\varphi_{17},\frac{\partial\varphi_{14}}{\partial t_5}=\varphi_{16}\varphi_{22},$$

$$\frac{\partial\varphi_{17}}{\partial t_6}=-\varphi_{18},\frac{\partial\varphi_{17}}{\partial t_7}=\varphi_{14},\frac{\partial\varphi_{17}}{\partial t_5}=\varphi_{19}\varphi_{22},$$

$$\frac{\partial\varphi_{15}}{\partial t_6}=\varphi_{14},\frac{\partial\varphi_{15}}{\partial t_7}=-\varphi_{18},\frac{\partial\varphi_{15}}{\partial t_5}=-\varphi_{16}\varphi_{23},$$

$$\frac{\partial\varphi_{18}}{\partial t_6}=\varphi_{17},\frac{\partial\varphi_{18}}{\partial t_7}=\varphi_{15},\frac{\partial\varphi_{18}}{\partial t_5}=-\varphi_{19}\varphi_{23},$$

$$\frac{\partial\varphi_{16}}{\partial t_6}=0,\frac{\partial\varphi_{16}}{\partial t_7}=-\varphi_{19},\frac{\partial\varphi_{16}}{\partial t_5}=\varphi_{21},$$

$$\frac{\partial \varphi_{19}}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial \varphi_{19}}{\partial t_7} = \varphi_{16}, \frac{\partial \varphi_{19}}{\partial t_5} = \varphi_{20},$$

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial t_7} = \varphi_{21}, \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial t_5} = -\varphi_{19},$$

$$\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_6} = 0, \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_7} = -\varphi_{20}, \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t_5} = -\varphi_{16},$$

$$\frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_6} = \varphi_{23}, \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_7} = 0, \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial t_5} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial t_6} = -\varphi_{22}, \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial t_7} = 0, \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial t_5} = 0.$$

Глава 3. Метод Тейлора для решения полиномиальных систем дифференциальных уравнений в частных производных

3.1 Описание метода

Рассмотрим задачу Коши для системы УрЧП:

$\frac{\partial x_j}{\partial t_\nu} = f_{\nu,j}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_s),\ x_j(t_0) = x_{0,j}, j = 1, \dots, n, \nu = 1, \dots, s$ (2)

$f_{\nu,j}$ – гладкая или кусочно-гладкая функция.

Алгоритм решения задачи:

1. Выписать всевозможные одночлены, содержащиеся в системе (2). Получится некоторое множество одночленов $T = (x^{i(n+1)}, \dots, x^{i(u)})$. Считаем $x^{i(1)} = x_1, \dots, x^{i(n)} = x_n$

2. Необходимо рассортировать множество T таким образом, чтобы выполнялось

$$2 \le |i(n+1)| \le |i(n+2)| \le \cdots \le |i(u)| \le L + 1.$$

Здесь $|i|$ – степень одночлена, $L + 1$ – максимальная степень одночлена в (1).

3. Проверить, чтобы для множества T выполнялось условие

$$(\forall\, r \in [(n+1){:}\,u])(\exists p, q \in [1{:}\,r])(x^{i(r)} = x^{i(p)} \cdot x^{i(q)})$$

4. При невыполнении условия из пункта 3, необходимо дополнить T, сохраняя сортировку из пункта 2.

5. Составим схему

$$S = \Big(\big(p(n+1), q(n+1)\big), \dots, \big(p(u), q(u)\big)\Big) \qquad (3)$$

состоящую из u-n пар $p(r), q(r)))$таких, что $r > p(r), q(r)$ для любого $r \in [(n+1){:}\,u]$.

6. Перепишем систему (2) в виде

$$\frac{\partial x_j}{\partial t_\nu} = \sum_{m=0}^{u} a_{\nu,m,j}\, x^{i(m)}$$

7. Для нахождения шага используются формулы

$$\rho_\nu = \frac{1}{Ls_\nu}, \qquad s_\nu \max_{j\in[1,n]} s_{\nu,j}$$

$$s_{\nu,j} = \sum_{m=0}^{L} \gamma^m \sum_{i\in I(m)} |a_{\nu,m,j}[i+\ e_j]|\,, \gamma = |x_0| = \max_{j\in[1,n]} |x_{0,j}|$$

$$t_\nu = \ t_{0,\nu} + \ \rho_\nu,, \nu = 1, 2, \dots, s$$

где $e_1 = (1, 0, \dots, 0\ )$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0\ )$, …, $e_n = (0, \dots, 0\ , 1)$, $I(m) = \{i = (i_1, \dots, i_n) |\ |i| = m\}$, $a_{\nu,m,j}\left[i + \ e_j\right]$ - коэффициент при одночлене $x^{[i+\ e_j]}$.

8. Для нахождения решения в точке t, используется формула

$$x^{i(m)} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_s=r} \frac{1}{l_1!\, l_2! \dots l_s!} x_{m,l}(t - \ t_0)^l$$

где $l_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, а под $(t - \ t_0)^l$ подразумевается

$$\left(t_1 - \ t_{0,1}\right)^{l_1} \left(t_2 - \ t_{0,2}\right)^{l_2} \cdot \dots \cdot \left(t_s - \ t_{0,s}\right)^{l_s}$$

Вычисление $x_{m,l}$:

r = 0, 1, 2, …

$\forall\ (l, \nu_l) \in Q_r$

$$x_{j,l} = \sum_{\mu=(0,0,\dots,0)}^{l} \frac{l_1!\, l_2! \dots l_s!}{\mu_1!\, \mu_2! \dots \mu_s!\, (\mu - l)_1!\, (\mu - l)_2! \dots (\mu - l)_s!}\ x_{p(j),\mu} x_{q(j),\mathrm{l}-\mu}$$

$\nu \in [\nu_l; s]$

$$x_{j,l+e_\nu} = \sum_{k=0}^{u} a_{\nu,j,k}\ x_{k,l}$$

$Q_{r+1} = (\ l + e_\nu, \nu) \cup Q_{r+1}$

где $Q_r = \{(l, \nu), |l| = r\}$, $Q_0 = \{((0, 0, \dots, 0), 1)\}$, а $x_{k,0}$ - начальные условия.

9. Примем значения, найденные в точке t, за начальные условия, а t_0 за t.

10. Если не найдено достаточно точек, повторить пункты 7-9.

3.2 Применение метода для решения задачи двух тел

Ранее в главе 1 уже была описана задача двух тел, а в главе 2 была представлена полиномиальная система дифференциальных уравнений в частных производных для данной задачи. Повторим алгоритм с этой системой.

Выпишем все одночлены и составим схему S (3). Результаты представлены в таблице 3.1.

№	Одночлен	S	№	Одночлен	S
24	$\varphi_2\varphi_4$	2, 4	50	$\varphi_2^2\varphi_4^3$	2, 44
25	$\varphi_2\varphi_7$	2, 7	51	$\varphi_2\varphi_3\varphi_4^2\varphi_5$	24, 39
26	$\varphi_3\varphi_4$	3, 4	52	$\varphi_2\varphi_4^2\varphi_5\varphi_6$	38, 30
27	$\varphi_3\varphi_6$	3, 6	53	$\varphi_3\varphi_4\varphi_5^3$	3, 48
28	φ_4^2	4, 4	54	$\varphi_3^2\varphi_4\varphi_5\varphi_6$	27, 39
29	φ_5^2	5, 5	55	$\varphi_2^2\varphi_4^2\varphi_5\varphi_6$	2, 52
30	$\varphi_5\varphi_6$	5, 6	56	$\varphi_2^2\varphi_4^3\varphi_5$	5, 50
31	φ_7^2	7, 7	57	$\varphi_3\varphi_4\varphi_5^3\varphi_6$	6, 53
32	$\varphi_{16}\varphi_{22}$	16, 22	58	$\varphi_4\varphi_5^5$	48, 29
33	$\varphi_{16}\varphi_{23}$	16, 23	59	$\varphi_3^2\varphi_4^2\varphi_5\varphi_6$	54, 4
34	$\varphi_{19}\varphi_{22}$	19, 22	60	$\varphi_2\varphi_4\varphi_5^5$	2, 58
35	$\varphi_{19}\varphi_{23}$	19, 23	61	$\varphi_2\varphi_4^3\varphi_5^3$	42, 44
36	$\varphi_2^2\varphi_4$	2, 24	62	$\varphi_2^3\varphi_4^3\varphi_5$	2, 56
37	$\varphi_2\varphi_3\varphi_4$	3, 24	63	$\varphi_2\varphi_3\varphi_4^3\varphi_5\varphi_6$	26, 52
38	$\varphi_2\varphi_4^2$	4, 24	64	$\varphi_3\varphi_4\varphi_5^5$	3, 58
39	$\varphi_3\varphi_4\varphi_5$	5, 26	65	$\varphi_3\varphi_4^2\varphi_5^4$	39, 48
40	$\varphi_3\varphi_4^2$	4, 26	66	$\varphi_2\varphi_4^2\varphi_5^4\varphi_6$	42, 52
41	$\varphi_3\varphi_4\varphi_6$	6, 26	67	$\varphi_2^2\varphi_3\varphi_4^3\varphi_5\varphi_6$	2, 63
42	φ_5^3	5, 29	68	$\varphi_3\varphi_4\varphi_5^5\varphi_6$	6, 64
43	φ_7^3	7, 31	69	$\varphi_3\varphi_4^2\varphi_5^6$	29, 65
44	$\varphi_2\varphi_4^3$	4, 38	70	$\varphi_2^2\varphi_4^3\varphi_5^4$	42, 56
45	$\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_6$	6, 37	71	$\varphi_2\varphi_4^3\varphi_5^5$	29, 61
46	$\varphi_3\varphi_4\varphi_5\varphi_7$	7, 39	72	$\varphi_2\varphi_3\varphi_4^3\varphi_5^4\varphi_6$	26, 66
47	$\varphi_3\varphi_4^2\varphi_5$	4, 39	73	$\varphi_2\varphi_4^2\varphi_5^6\varphi_6$	29, 66
48	$\varphi_4\varphi_5^3$	4, 42	74	$\varphi_2^2\varphi_4^3\varphi_5^6$	29, 70
49	$\varphi_2\varphi_4\varphi_5^3$	2, 48	75	$\varphi_2\varphi_3\varphi_4^3\varphi_5^6\varphi_6$	29, 72

Таблица 3.1: *Схема S*

В таблице в столбцах «№» указан номер одночленов, после рассортировки по возрастанию степени (одночлены 1-23 - $\varphi_1, \ldots, \varphi_{23}$), в столбцах «S» указаны номера одночленов, при перемножении которых получится соответствующий многочлен (реализация схемы S из пункта 5 алгоритма).

Теперь можно переписать систему в виде:

$$\frac{\partial x_j}{\partial t_\nu} = \sum_{m=0}^{u} a_{\nu,m,j}\, x^{i(m)}$$

Матрицу $A = \{a_{j,k,\nu}\ j = \overline{1,n},\ \ k = \overline{1,u},\ \nu = \overline{1,s}\}$, можно разбить на s матриц $A_1 = \{a_{j,k} = a_{j,k,1}\ j = \overline{1,n},\ \ k = \overline{1,u}\}$, $A_2 = \{a_{j,k} = a_{j,k,2}\ j = \overline{1,n},\ \ k = \overline{1,u}\}$, …, $A_s = \{a_{j,k} = a_{j,k,s}\ j = \overline{1,n},\ \ k = \overline{1,u}\}$ каждая из которых будет, преимущественно состоять из нулей, за исключением некоторых элементов:

A_1:

$$a_{1,48} = \sqrt{\mu},$$

$$a_{2,53} = \sqrt{\mu},$$

$$a_{3,49} = -\sqrt{\mu},$$

$$a_{4,61} = -\sqrt{\mu}t_3,$$

$$a_{7+i,49} = -t_2\sqrt{\mu}B_i, \qquad a_{7+i,57} = t_2\sqrt{\mu}A_i,$$

$$a_{10+i,65} = -\mu B_i,\ \ a_{10+i,66} = -\mu A_i,\ \ a_{10+i,70} = \mu t_3 B_i,\ \ a_{10+i,72} = -\mu t_3 A_i$$

$$i = 1, 2, 3,$$

A_2:

$$a_{1,58} = -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0),$$

$$a_{2,64} = -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0),$$

$$a_{3,60} = \frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0),$$

$$a_{4,71} = -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}t_3(t_1 - t_0),$$

$$a_{5,42} = \frac{1}{2},$$

$$a_{7+i,3} = B_i,\ a_{7+i,27} = A_i,\ a_{7+i,60} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0)t_2B_i,$$

$$a_{7+i,68} = -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}(t_1 - t_0)t_2A_i,$$

$$a_{10+i,49} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\mu}B_i,\ \ a_{10+i,57} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu}A_i,$$

$$a_{10+i,69} = \tfrac{3}{2}\mu(t_1 - t_0)B_i,\quad a_{10+i,73} = \tfrac{3}{2}\mu(t_1 - t_0)A_i,$$

$$a_{10+i,74} = -\tfrac{3}{2}\mu(t_1 - t_0)t_3B_i, a_{10+i,75} = \tfrac{3}{2}\mu(t_1 - t_0)t_3A_i\ \ i = 1, 2, 3,$$

A_3:

$$a_{1,24} = 1,$$

$$a_{2,37} = 1,$$

$$a_{3,36} = -1,$$

$$a_{4,40} = 1,\quad a_{4,50} = -t_3,$$

$$a_{6,7} = -t_3,$$

$$a_{7,43} = t_3,$$

$$a_{7+i,25} = -t_2t_3A_i,\ a_{7+i,36} = -t_2B_i, a_{7+i,45} = t_2A_i,$$

$$a_{10+i,51} = -2\sqrt{\mu}B_i, a_{10+i,55} = -\sqrt{\mu}A_i,\ a_{10+i,59} = \sqrt{\mu}A_i, a_{10+i,62} = t_3\sqrt{\mu}B_i,$$

$$a_{10+i,67} = -t_3\sqrt{\mu}A_i, a_{10+i,46} = -t_3\sqrt{\mu}A_i\ \ i = 1, 2, 3,$$

A_4:

$$a_{1,4} = 1,$$

$$a_{2,26} = 1,$$

$$a_{3,24} = -1,$$

$$a_{4,44} = -t_3,$$

$$a_{7+i,24} = -t_2B_i, a_{7+i,41} = t_2A_i,$$

$$a_{10+i,47} = -\sqrt{\mu}B_i,\ \ a_{10+i,52} = -\sqrt{\mu}A_i, a_{10+i,56} = -t_3\sqrt{\mu}B_i,$$

$$a_{10+i,63} = t_3\sqrt{\mu}A_i \quad i = 1, 2, 3,$$

A_5:

$$a_{14,32} = 1, \qquad a_{15,33} = -1, \qquad a_{16,21} = 1, \qquad a_{17,34} = 1,$$
$$a_{18,35} = -1, \qquad a_{19,20} = 1, \qquad a_{20,19} = -1, \qquad a_{21,16} = -1,$$

A_6:

$$a_{14,15} = -1, \qquad a_{15,14} = 1, \qquad a_{17,18} = -1,$$
$$a_{18,17} = 1, \qquad a_{22,23} = 1, \qquad a_{23,22} = -1,$$

A_7:

$$a_{14,17} = -1, \qquad a_{15,18} = -1, \qquad a_{16,19} = -1, \qquad a_{17,14} = 1,$$
$$a_{18,15} = 1, \qquad a_{19,16} = 1, \qquad a_{20,21} = 1, \qquad a_{21,20} = -1.$$

Пункты алгоритма 7-9 можно реализовать программно.

Заключение

В результате исследования мной были получены следующие результаты:

1. В первой главе была изучена задача двух тел и записаны уравнения движения с их решениями в общем виде.
2. Во второй главе была описана система полиномиальных дифференциальных уравнений в частных производных для решения выбранной задачи.
3. В третьей главе был записан алгоритм применения метода рядов Тейлора для полиномиальных систем УрЧП, получена схема S и преобразована полиномиальная система для задачи двух тел.

Полученные результаты являются примером применения изученного метода и полученного алгоритма для полиномиальной системы УрЧП для задачи двух тел.

Литература

[1]Л.К. Бабаджанянц, И.Ю. Потоцкая, Ю.Ю. Пупышева Оценки в методе рядов Тейлора для линейных полных УрЧП // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 00–00.

[2]Бабаджанянц, Л. К., Брэгман, А. М., Брэгман, К. М., Касикова, П. В., & Петросян, Л. А. (2016). Полные системы уравнений для задачи двух тел. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ - ОТ ТЕОРИИ К ПРАКТИКЕ, 8(56), 13-20.

[3] Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел: Учеб. пособие. – СПб., 2007. – 180 с.

[4] Емельянов Н. В. Практическая небесная механика. – М.: Физический факультет МГУ, 2018. 270 с.

[5] Брэгман А.М. Движение тела, управляемого малой тягой в поле Ньютона: Магистерская диссертация. СПб., Санкт-Петербургский Государственный университет, 2014, 145 с.

[6] Babadzanjanz L. K., Pototskaya I. Yu., Pupysheva Yu. Yu. Estimatesfor Taylor series method to polynomial total systems of PDEs. Vestnik of Saint Petersburg University Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes, 2021, vol. 17, iss.1, pp. 00–00. https://doi.org