

Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет
Кафедра радиофизики

Леонов Владислав Андреевич

Выпускная квалификационная работа

**Энергия излучения и силы взаимодействия в системе двух зарядов,
движущихся в частотно диспергирующей среде**

Уровень образования: бакалавриат
Направление 03.03.03 «Радиофизика»
Основная образовательная программа СВ.5113.2019 «Электромагнитные и
акустические процессы»

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. Тюхтин А.В.

Рецензент:
к.ф.-м.н., вед. научн. сотр. Батулин С.С.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

Введение	2
1. К теории одиночного заряда	4
2. Потери энергии на излучение от двух зарядов	5
3. Потери энергии на ИВЧ в среде с дисперсией резонансного типа	10
4. Анализ интегралов, определяющих поле одиночного заряда	16
5. Силы, действующие в системе из двух зарядов	20
Заключение	24
Список литературы	25

Введение

Движущиеся заряженные частицы излучают электромагнитные волны в разных ситуациях. Один из механизмов излучения, описываемых классической электродинамикой, обусловлен ускорением частицы. Такое излучение наблюдается как в вакууме, так и в любых материальных средах. Кроме этого типа излучения, в рамках классической электродинамики также хорошо описываются и другие виды излучения, в частности, излучение Вавилова-Черенкова (ИВЧ). Этот эффект заключается в том, что при движении заряженной частицы в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в этой среде, возникает электромагнитное излучение. Его причина аналогична причине звукового удара (резкого звука), слышимого при движении тела (например, сверхзвукового самолета) быстрее скорости звука в этой среде. Проблемам излучения Вавилова-Черенкова посвящено большое количество научных трудов.

Традиционная интерпретация эффекта Вавилова-Черенкова насчитывает свою историю со времени открытия самого эффекта и его теоретического объяснения [1-7]. Стандартная интерпретация состоит в том, что заряженная частица, двигаясь в веществе, взаимодействует с ее атомами и молекулами, поляризуя их. Если скорость частицы превышает значение фазовой скорости света в данной среде, то частицы, расположенные впереди движущейся заряженной частицы не поляризуются, вследствие чего возникает сильная асимметрия электромагнитного поля. Результатом этого является формирование атомами, расположенными на траектории движения частицы и вблизи нее, когерентного излучения. Другими словами, излучение Вавилова-Черенкова является следствием взаимодействия заряженной частицы со средой (посредством ее поляризации), причем само излучение является результатом когерентного сложения отдельных актов излучения атомами данной среды. Можно сказать, что в явлении Вавилова-Черенкова мы имеем по существу дело с излучением, испускаемым средой под влиянием поля движущейся в ней частицы (в отличие от тормозного излучения, при котором излучение испускается самим движущимся зарядом при его столкновении с атомами среды). Различие особенно резко проявляется при переходе к пределу сколь угодно большой массы частицы. Тормозное излучение при этом исчезает вовсе, а ИВЧ вообще не меняется.

Это излучение обладает непрерывным спектром и специфическим угловым распределением. Специфичность углового распределения излучения состоит в том, что волновой вектор излучаемых волн образует определенный угол с направлением вектора скорости.

Для простоты мы будем рассматривать ИВЧ в «чистом виде», то есть ис-

ключим другие возможные механизмы генерации электромагнитного излучения. Поэтому мы будем считать, что заряды движутся параллельно друг другу с одинаковой постоянной скоростью в безграничной среде. Среда – однородная и стационарная. Условие равномерного и прямолинейного движения зарядов, как правило, является оправданным, потому что радиационные потери энергии обычно малы по сравнению с кинетической энергией заряда при прохождении им расстояния в несколько типичных длин волн. С другой стороны, движение частицы с постоянной скоростью может быть обеспечено за счет воздействия внешнего поля. Также для простоты будем считать, что среда линейна, изотропна и не обладает пространственной дисперсией (но может обладать частотной дисперсией). Отметим, что эти предположения оказываются оправданными при описании многих экспериментов.

Целью данной работы является расчет потерь энергии на ИВЧ для зарядов, разнесенных на некоторое расстояние друг от друга, расчет сил взаимодействия в этой системе, а также анализ полученных результатов на примере среды резонансного типа.

1. К теории одиночного заряда

Рассмотрим бесконечный, изотропный и прозрачный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ , через который прямолинейно и равномерно движется одиночный точечный заряд q со скоростью \vec{V} . Введем декартову систему координат таким образом, чтобы направление скорости заряда совпадало с осью z . Положение заряда в момент времени t определяется соотношениями $x = y = 0$, $z = Vt$. Как известно, в цилиндрической системе координат r, φ, z компоненты электромагнитного поля заряда могут быть записаны в следующем виде[1]:

$$E_r = \frac{q}{2c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{is(\omega)}{\beta\varepsilon(\omega)} H_1^{(1)}(s(\omega)r) e^{i\omega\zeta/V} d\omega, \quad (1)$$

$$E_z = \frac{q}{2c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} - 1 \right) \omega \mu(\omega) H_0^{(1)}(s(\omega)r) e^{i\omega\zeta/V} d\omega, \quad (2)$$

$$H_\varphi = \frac{q}{2c} \int_{-\infty}^{+\infty} is(\omega) H_1^{(1)}(s(\omega)r) e^{i\omega\zeta/V} d\omega, \quad (3)$$

где $\zeta = z - Vt$, $\beta = V/c$, $H_0^{(1)}(\xi)$, $H_1^{(1)}(\xi)$ – функции Ханкеля, c – скорость света в вакууме, $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{V^2} (\beta^2 n^2(\omega) - 1)}$ и $\text{Im}s > 0$. Остальные компоненты поля равны нулю. Интегрирование ведется по всей вещественной оси.

В пределе непоглощающей среды, когда $\text{Im}\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$, $\text{Im}\mu(\omega) \rightarrow 0$, функция $s(\omega)$ определяется выражениями

$$s(\omega) = \begin{cases} \frac{i|\omega|}{V} \sqrt{1 - \beta^2 n^2(\omega)} & \text{для } \beta^2 n^2(\omega) < 1, \\ \frac{\omega}{V} \sqrt{\beta^2 n^2(\omega) - 1} \text{sgn}\varepsilon(\omega) & \text{для } \beta^2 n^2(\omega) > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Все особенности подынтегральных выражений, располагающиеся на вещественной оси в пределе непоглощающей среды, обходятся контуром интегрирования сверху [1].

2. Потери энергии на излучение от двух зарядов

В данном разделе будет получена формула для потерь энергии на генерацию излучения в системе из двух заряженных частиц при прохождении единицы длины пути dW/dz в прозрачном (непоглощающем) диэлектрике. Величину энергии, излучаемой движущимся зарядом, можно найти, если известна сила, тормозящая его движение. Нахождение силы, действующей на движущийся заряд, весьма простой способ определения энергии ИВЧ. Другой из методов расчета потерь энергии опирается на расчет потока вектора Пойтинга через поверхность, окружающую траекторию движения зарядов. Так как заряды движутся вдоль оси z , то в качестве такой поверхности разумно выбрать поверхность некоторого цилиндра бесконечной длины. Так как рассматривается среда без диссипации, то для расчета радиационных потерь можно взять цилиндр сколь угодно большого радиуса. Таким образом, в качестве поверхности удобно выбрать цилиндр бесконечной длины и бесконечно большого радиуса. Отметим, что при этом мы не учитываем ту энергию, которая расходуется на генерацию плазменных колебаний, так как они не распространяются в «холодной» среде.

Величина, соответствующая полным потерям энергии на излучение на единицу пути, запишется в виде

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{Vdt} = \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma}, \quad (5)$$

где интеграл есть поток вектора Пойтинга. Сам вектор Пойтинга определяется как $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$, где по принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Пользуясь линейностью векторного произведения по двум аргументам, получаем

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_{12} + \vec{S}_{21} = \\ &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_1, \vec{H}_1] + \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_2, \vec{H}_2] + \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_1, \vec{H}_2] + \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_2, \vec{H}_1]. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует, что потери энергии такой системы в единицу длины запишутся как

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW_1}{dz} + \frac{dW_2}{dz} + \frac{dW_{12}}{dz} + \frac{dW_{21}}{dz}. \quad (7)$$

Первое и второе слагаемые есть потери энергии от одиночных зарядов. Для одиночных зарядов формула была получена И. Е. Таммом и И. М. Франком [4]. Если учесть, что ε и μ могут быть отрицательными в одном и том же частотном

диапазоне («левая» среда), то она записывается в виде [1]

$$\frac{dW}{dz} = \frac{q^2}{c^2} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)\beta^2}\right) \omega |\mu(\omega)| d\omega. \quad (8)$$

$n^2\beta^2 > 1$

Третье и четвертое слагаемые есть потери в результате взаимодействия зарядов. Введя цилиндрическую систему координат, направив ось z вдоль направления скорости зарядов, и учитывая, что интегрирование ведется по боковой поверхности цилиндра, можно записать

$$\frac{dW_{12}}{dz} = \frac{dW}{Vdt} = \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} \vec{S}_{12} d\vec{\Sigma} = \frac{1}{V} \int_{\Sigma} (S_{12})_r d\Sigma = \frac{cr}{4\pi V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dz E_{z_1} H_{\phi_2}. \quad (9)$$

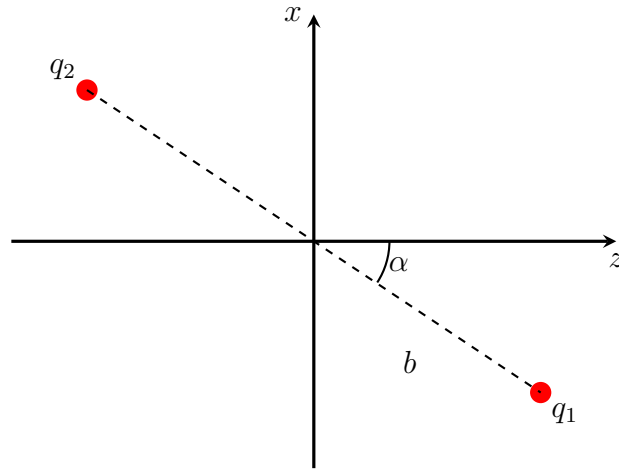


Рис. 1: Взаимное расположение заряженных частиц.

Получим выражения для компонент поля E_{z_1} и H_{ϕ_2} . Система состоит из двух точечных зарядов величиной q_1 и q_2 , движущихся со скоростью $\vec{V} = c\vec{\beta}$. Расстояние между частицами равно b , а соединяющий их отрезок составляет угол α относительно вектора скорости. Введем декартову систему координат таким образом, чтобы направление скорости зарядов совпадало с осью z . Запишем уравнения движения для каждого из зарядов, учитывая, что в начальный момент времени центр отрезка, соединяющий заряды, находился в начале координат и система находилась в плоскости xz , а первый заряд был впереди

другого. Тогда справедливо: для первого заряда

$$x = -\frac{b}{2} \sin \alpha, \quad y = 0, \quad z = Vt + \frac{b}{2} \cos \alpha, \quad (10)$$

а для второго заряда

$$x = \frac{b}{2} \sin \alpha, \quad y = 0, \quad z = Vt - \frac{b}{2} \cos \alpha. \quad (11)$$

Пользуясь выражениями для компонент поля, приведенные в предыдущей части, и учитывая, что $\zeta_1 = z - Vt - \frac{b}{2} \cos \alpha$ и $\zeta_2 = z - Vt + \frac{b}{2} \cos \alpha$ для первого и второго зарядов соответственно, получаем

$$E_{z_1} = \frac{q}{2c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - n^2(\omega)\beta^2}{n^2(\omega)\beta^2} \omega \mu(\omega) H_0^{(1)}(s(\omega)r_1) e^{i\omega(z/V - t - b/2 \cos \alpha)} d\omega, \quad (12)$$

$$H_{\phi_2} = \frac{q}{2c} \int_{-\infty}^{+\infty} i s(\omega) H_1^{(1)}(s(\omega)r_2) e^{i\omega(z/V - t + b/2 \cos \alpha)} d\omega, \quad (13)$$

где r_1 и r_2 – расстояния от траекторий зарядов 1 и 2 до точки наблюдения.

Подставим полученные выражения (12) и (13) в формулу (9):

$$\begin{aligned} \frac{dW_{12}}{dz} &= \frac{q_1 q_2 r}{16Vc^2\pi} \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - n^2(\omega)\beta^2}{n^2(\omega)\beta^2} \omega \mu(\omega) H_0^{(1)}(s(\omega)r_1) \exp\left(i\omega\left(\frac{z}{V} - t - \frac{b}{2V} \cos \alpha\right)\right) d\omega \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} i s(\omega') H_1^{(1)}(s(\omega')r_2) \exp\left(i\omega\left(\frac{z}{V} - t + \frac{b}{2V} \cos \alpha\right)\right) d\omega' = \frac{q_1 q_2 r}{16Vc^2\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1 - n^2(\omega)\beta^2}{n^2(\omega)\beta^2} \omega \mu(\omega) H_0^{(1)}(s(\omega)r_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' i s(\omega') H_1^{(1)}(s(\omega')r_2) \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\frac{\omega + \omega'}{V}z\right) dz \exp(-i(\omega + \omega')t) \exp\left(-i(\omega - \omega')\frac{b}{2V} \cos \alpha\right). \quad (14) \end{aligned}$$

Далее, проинтегрировав сначала по z , а потом по ω' , получаем

$$\frac{dW_{12}}{dz} = \frac{q_1 q_2}{8c^2} \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1 - n^2(\omega)\beta^2}{n^2(\omega)\beta^2} \omega \mu(\omega) H_0^{(1)}(s(\omega)r_1) \times \\ \times i s(-\omega) H_1^{(1)}(s(-\omega)r_2) \exp\left(-i \frac{\omega b}{V} \cos \alpha\right). \quad (15)$$

Преобразуем это выражение к интегралу по ω от 0 до $+\infty$. Так как функция Ханкеля имеет разрез от $-\infty$ до 0, а интегрирование проводится по верхнему берегу разреза, то $H_1^{(1)}(-x) = H_1^{(1)}(e^{i\pi}x)$, где $0 < x < +\infty$. Также воспользуемся (4) и свойствами четности магнитной и диэлектрической проницаемостей. Таким образом

$$\frac{dW_{12}}{dz} = \frac{q_1 q_2}{8c^2} \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^{+\infty} d\omega \frac{1 - n^2(\omega)\beta^2}{n^2(\omega)\beta^2} i \omega \mu(\omega) s(\omega) \times \\ \times H_0^{(1)}(s(\omega)r_1) H_1^{(1)}(e^{i\pi} s(\omega)r_2) \exp(-i \omega b/V \cos \alpha) + \\ + H_0^{(1)}(e^{i\pi} s(\omega)r_1) H_1^{(1)}(s(\omega)r_2 \exp(i \omega b/V \cos \alpha)). \quad (16)$$

Теперь возьмем интеграл по φ , предварительно устремив $r \rightarrow +\infty$. Тогда можно использовать асимптотические разложения функций Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad H_1^{(1)}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

Перепишем интеграл, учитывая, что при $r \rightarrow +\infty$ $r_1 \simeq r_2 \simeq r$ и $r_1 - r_2 \simeq b s(\omega) \cos \varphi$. Учтем также, что в области частот излучения $\frac{s(\omega)}{|s(\omega)|} = \text{sign } \varepsilon(\omega) = \text{sign } \mu(\omega)$. Следовательно

$$\frac{dW_{12}}{dz} = \frac{q_1 q_2}{2\pi c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} d\omega \frac{n^2(\omega)\beta^2 - 1}{n^2(\omega)\beta^2} \omega |\mu| \times \\ \exp[ibs(\omega) \sin \alpha \cos \varphi] \cos(\omega b/V \cos \alpha). \quad (17)$$

Проинтегрировав по φ , получаем формулу

$$\frac{dW_{12}}{dz} = \frac{2q_1q_2}{c^2} \int_0^{+\infty} d\omega \left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)\beta^2}\right) \omega |\mu(\omega)| \times \\ n^2\beta^2 > 1 \\ J_0(bs(\omega) \sin \alpha) \cos\left(b\frac{\omega}{V} \cos \alpha\right). \quad (18)$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Прделав аналогичные действия для четвертого слагаемого, получим, что третье и четвертое слагаемые равны. Таким образом, получаем следующее выражение для полных потерь энергии на единицу пути для двух зарядов, движущихся параллельно друг другу с постоянной скоростью:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{c^2} \int_0^{+\infty} d\omega \left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)\beta^2}\right) \omega |\mu(\omega)| \times \\ n^2\beta^2 > 1 \\ \times \left[q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2 J_0(bs(\omega) \sin \alpha) \cos\left(b\frac{\omega}{V} \cos \alpha\right) \right]. \quad (19)$$

Рассмотрим частный случай электрического диполя. Для этого сделаем предельный переход $b \rightarrow 0$, считая, что $q_1 = -q_2 = q \rightarrow \infty$, а $qb = p$ – конечно. Для реальных сред $|s(\omega)|$ – конечно, вследствие конечности показателя преломления, поэтому $bs(\omega) \sin \alpha \rightarrow 0$. При этом получаем

$$\frac{dW}{dz} = \frac{p^2}{2V^2c^2} \int_0^{+\infty} d\omega \left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)\beta^2}\right) |\mu(\omega)| \omega^3 \times \\ n^2\beta^2 > 1 \\ \left[(n^2(\omega)\beta^2 - 1) \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \right]. \quad (20)$$

В данном случае, где p – дипольный момент, это формула для потерь энергии на излучение в единицу пути для электрического диполя, движущегося с постоянной скоростью. Данная формула полностью соответствует выражению, полученному И. М. Франком [4].

3. Потери энергии на ИВЧ в среде с дисперсией резонансного типа

Используем полученные результаты для анализа излучения, которое возбуждается в среде, обладающей резонансными свойствами. Такая среда хорошо описывается с помощью модели Друде–Лоренца. В отсутствие диссипации и при учете только одного резонанса диэлектрическая проницаемость может быть записана как

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\varepsilon_0 \omega_r^2 - \omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\varepsilon_0 - \tilde{\omega}^2}{1 - \tilde{\omega}^2}, \quad (21)$$

где ω_r — резонансная частота, ω_p — плазменная частота, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_r$ — приведенная частота, а $\varepsilon_0 = 1 + \omega_p^2/\omega_r^2$. Магнитную проницаемость среды примем равной единице $\mu(\omega) = 1$. Тогда $n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)$.

Промежуток интегрирования в формуле (19) должен удовлетворить условию $\varepsilon\beta^2 - 1 > 0$. Заметим, что $\varepsilon(\omega) < 0$ во всем диапазоне частот выше резонансной ($\tilde{\omega} > 1$); это нам гарантирует, что ИВЧ на данных частотах не будет генерироваться. Таким образом, можно рассматривать только область, где $\omega < \omega_r$, в которой условие излучения $\varepsilon(\omega)\beta^2 > 1$ преобразуется к виду $\tilde{\omega}^2 > \tilde{\omega}_c^2$, где $\tilde{\omega}_c^2 = \frac{1 - \varepsilon_0\beta^2}{1 - \beta^2}$. Так как всегда выполнено $1 - \beta^2 > 0$, то здесь можно выделить два случая: 1) когда $\varepsilon_0\beta^2 < 1$, то условие возникновения излучения выполнено при

$$\tilde{\omega}_c = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_0\beta^2}{1 - \beta^2}} < \tilde{\omega} < 1, \quad (22)$$

2) если $\varepsilon_0\beta^2 > 1$, то условие возникновения излучения выполняется автоматически при всех $\tilde{\omega} < 1$. Таким образом, интервал интегрирования будет $\tilde{\omega} \in (Re\tilde{\omega}_c; 1)$. Следовательно, получим

$$\frac{dW}{dz} = F_0 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \int_{Re\tilde{\omega}_c}^1 \tilde{\omega} \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_c^2}{\varepsilon_0 - \tilde{\omega}^2} \times \left[1 + q^2 + 2qJ_0 \left(\frac{\tilde{\omega}L \sin \alpha}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_c^2}{1 - \tilde{\omega}^2}} \right) \cos \left(\frac{\tilde{\omega}L \cos \alpha}{\beta} \right) \right] d\tilde{\omega}. \quad (23)$$

где $F_0 = q_1^2 \omega_r^2 / c^2$, $q = q_2 / q_1$, $L = \omega_r b / c$, $\beta = V / c$. Построим графики спектральной плотности потерь энергии на единицу пути $\frac{d^2W}{dzd\omega}$ в единицах $\frac{q_1^2 \omega_r}{c^2}$ при разных параметрах системы. Рассмотрим случаи, когда $\alpha = 0$, т. е. заряды движутся по одной линии.

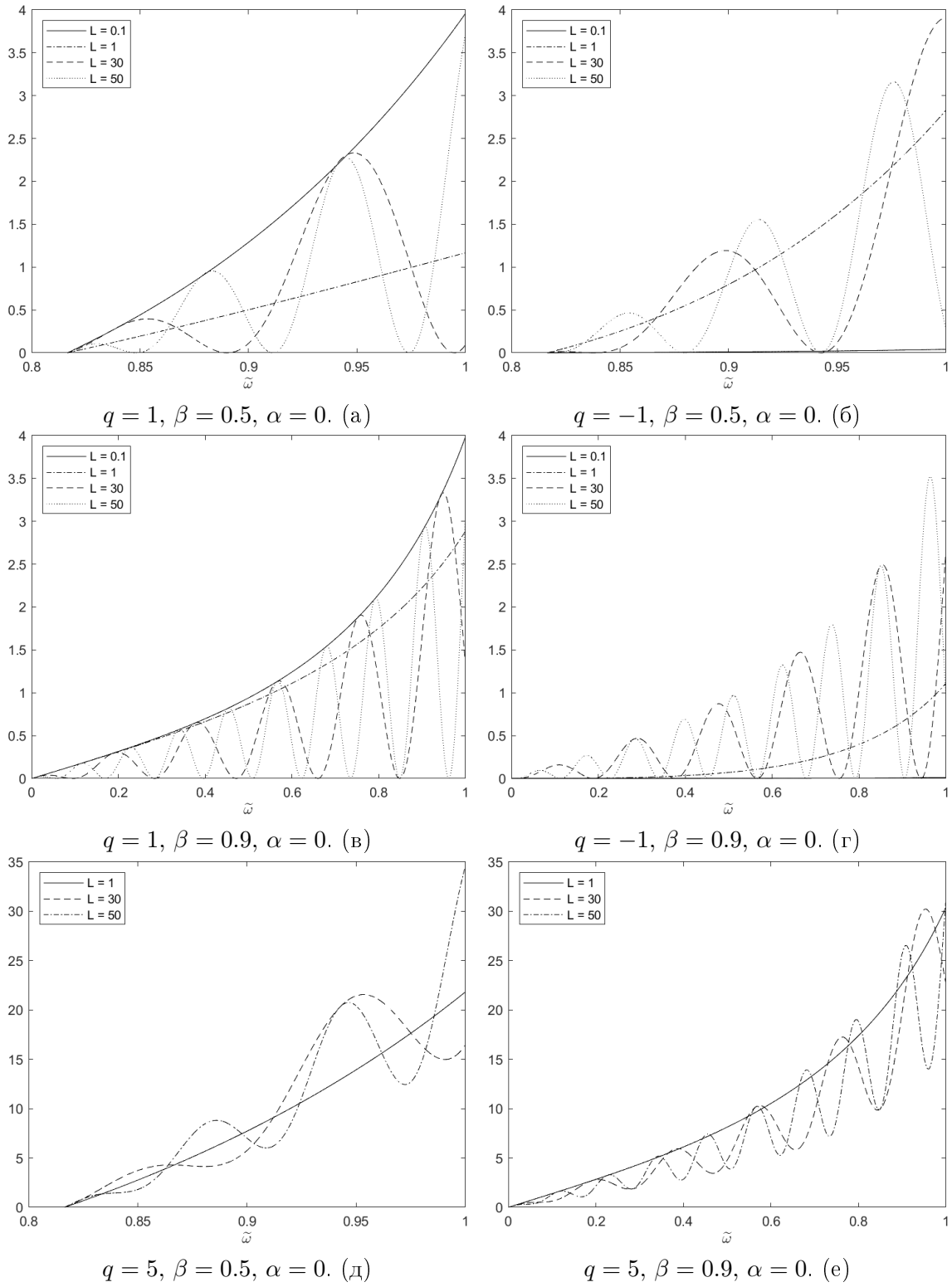


Рис. 2: $\frac{d^2W}{dzd\omega}$ в единицах $\frac{q_1^2 \omega_r}{c^2}$ в зависимости от частоты. Все параметры указаны на графиках.

Из графика (б,г) $q = -1$ можно сделать вывод, что при $L = 0.1$ система из двух зарядов приблизительно равносильна одному заряду, равному сумме зарядов, т. е. заряды практически ведут себя как единая частица. График осциллирует, при этом нули равноудалены друг от друга. С ростом L увеличивается количество осцилляций, причем максимальная интенсивность не превышает интенсивности излучения от суммы зарядов. Также стоит заметить, что частота осцилляций зависит и от скорости: чем выше скорость, тем меньше частота. Отметим, что есть частоты, на которых интенсивность равна нулю. Знак заряда и величина скорости качественно не меняют поведение графика.

На рис. 2 д,е видно, что если заряды становятся отличными по модулю, то уже не возникает частот, на которых нет излучения, но характерное поведение графиков не меняется.

Рассмотрим случаи $\alpha \neq 0$. Введем новые обозначения: $l = L \cos \alpha$ — продольное расстояние и $d = L \sin \alpha$ — поперечное расстояние. Исследуем характер поведения кривых при разных l и d .

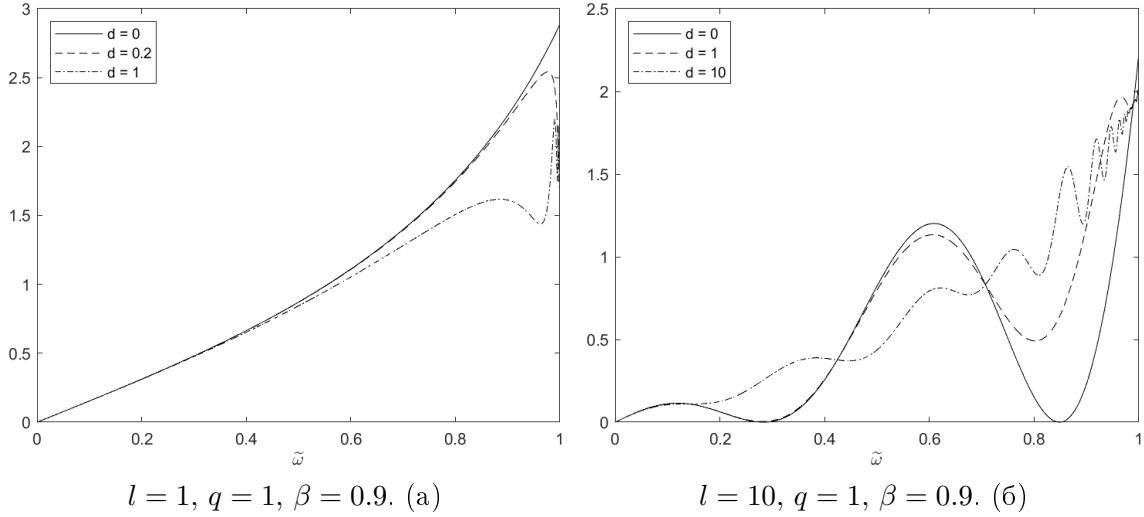


Рис. 3: $\frac{d^2W}{dzd\omega}$ в единицах $\frac{q_1^2\omega_r}{c^2}$ в зависимости от частоты. Все параметры указаны на графиках.

На рис. 3 (а) при малом относительном продольном расстоянии ($l = 1$), $\tan \alpha = d/l = 0.2$ график совпадает с графиком при $\alpha = 0$ ($d = 0$) до $\tilde{\omega} \cong 0.9$. В случае большего продольного расстояния ($l = 10$, см рис 3 (б)), уже при $\tan \alpha = d/l = 0.1$ графики $d = 0$ и $d = 1$ начинают заметно отличаться уже при $\tilde{\omega} \cong 0.5$. Таким образом, спектральная плотность потерь энергии на ИВЧ уже при достаточно небольших α начинает заметно отличаться от случая $\alpha = 0$, причем чем больше продольное расстояние между зарядами, тем при меньших α начинаются заметные отклонения от $\alpha = 0$.

Рассмотрим случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$. На графиках видны осцилляции, возникающие

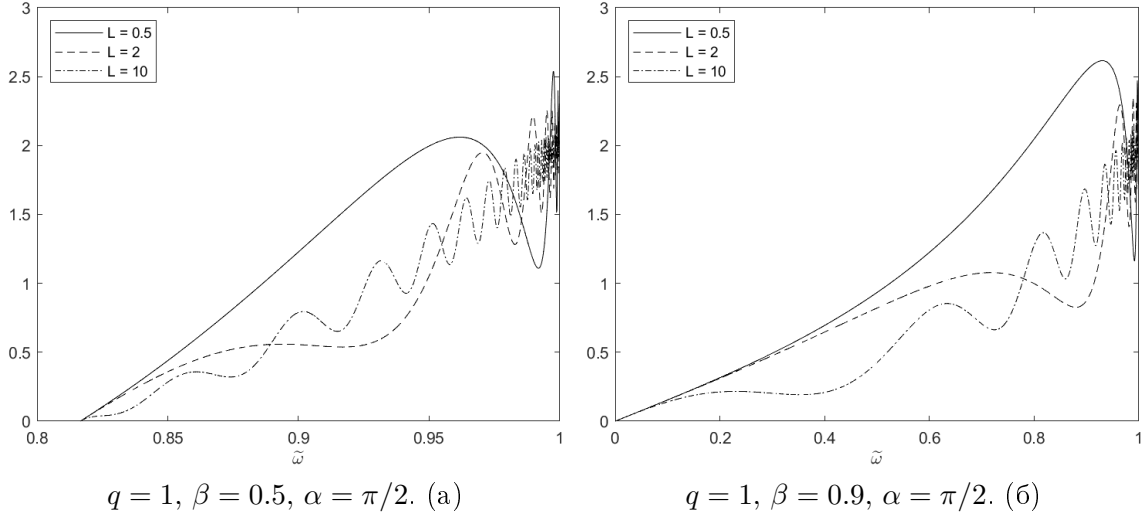
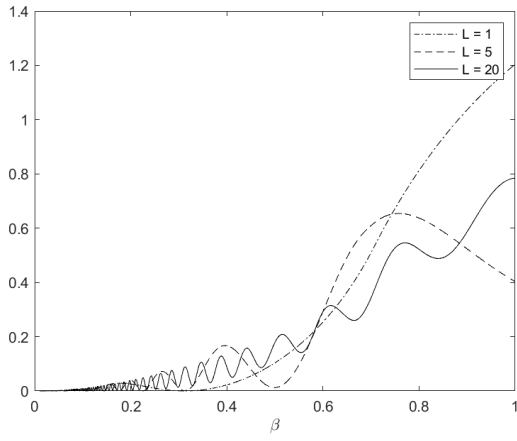


Рис. 4: $\frac{d^2W}{dzd\omega}$ в единицах $\frac{q_1^2\omega_r^2}{c^2}$ в зависимости от частоты. Все параметры указаны на графиках.

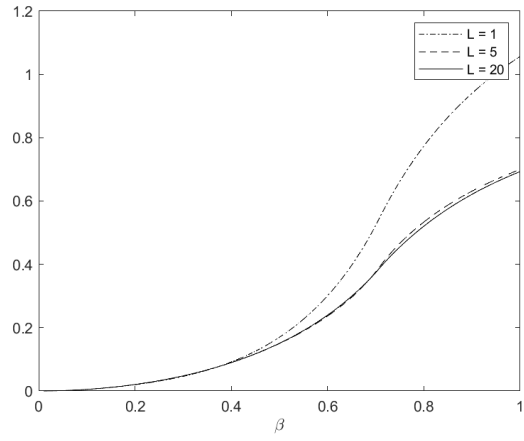
только за счет функции Бесселя, частота которых нарастает с ростом $\tilde{\omega}$ и стремится к бесконечности в окрестности единицы. С ростом L их амплитуда уменьшается, что говорит о меньшем взаимодействии между зарядами. Сравнивая рис. 3 и рис. 4, можно сказать, что при α , отличных от нуля, поведение кривых качественно схоже.

Как правило, данные зависимости являются немонотонными. Осцилляции спектральной плотности энергии излучения являются наиболее выраженными в том случае, когда заряды движутся по одной линии. С увеличением α данные осцилляции становятся менее выраженными из-за ослабления взаимодействия зарядов при увеличении расстояния между их траекториями.

Далее построим графики полных потерь энергии на излучение на единицу пути $\frac{dW}{dz}$ в единицах $\frac{q_1^2\omega_r^2}{c^2}$ при разных параметрах системы.

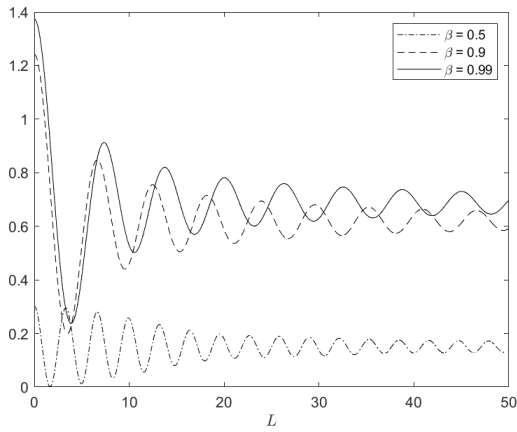


$q = 1, \alpha = 0$. (а)

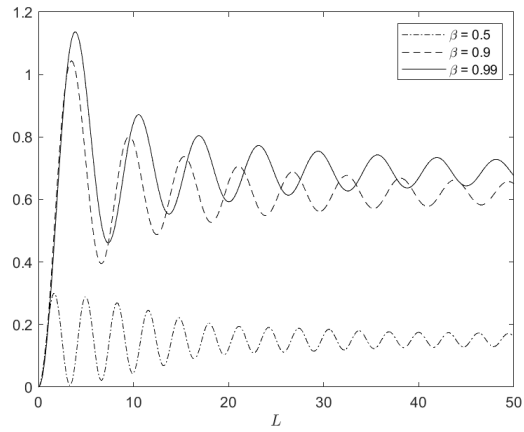


$q = 1, \alpha = \pi/2$. (б)

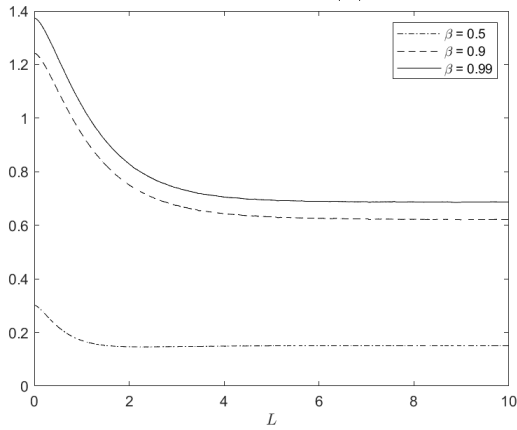
Рис. 5: $\frac{dW}{dz}$ в единицах $\frac{q_1^2 \omega_r^2}{c^2}$ от скорости движущихся зарядов. Все параметры указаны на графиках.



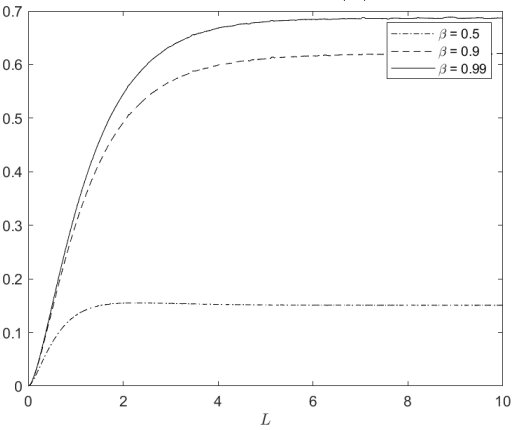
$\alpha = 0, q = 1$. (а)



$\alpha = 0, q = 1$. (б)



$\alpha = \pi/2, q = 1$. (в)



$\alpha = \pi/2, q = 1$. (г)

Рис. 6: $\frac{dW}{dz}$ в единицах $\frac{q_1^2 \omega_r^2}{c^2}$ от расстояния между зарядами. Все параметры указаны на графиках.

Интересно также рассмотреть угловое распределение потерь энергии, т. е. потери энергии с единицы пути заряда, приходящиеся на единичный угол φ . Данная величина равна подынтегральному выражению в формуле (7), которое для среды с проницаемостью (21) имеет вид

$$\frac{d^2W}{dzd\varphi} = \frac{F_0}{2\pi} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \int_{\text{Re}\tilde{\omega}_c}^1 \tilde{\omega} \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_c^2}{\varepsilon_0 - \tilde{\omega}^2} \times \left[1 + q^2 + 2q \exp\left(\frac{i\tilde{\omega}L \sin \alpha}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_c^2}{1 - \tilde{\omega}^2}} \cos \varphi\right) \cos\left(\frac{\tilde{\omega}L \cos \alpha}{\beta}\right) \right] d\tilde{\omega}. \quad (24)$$

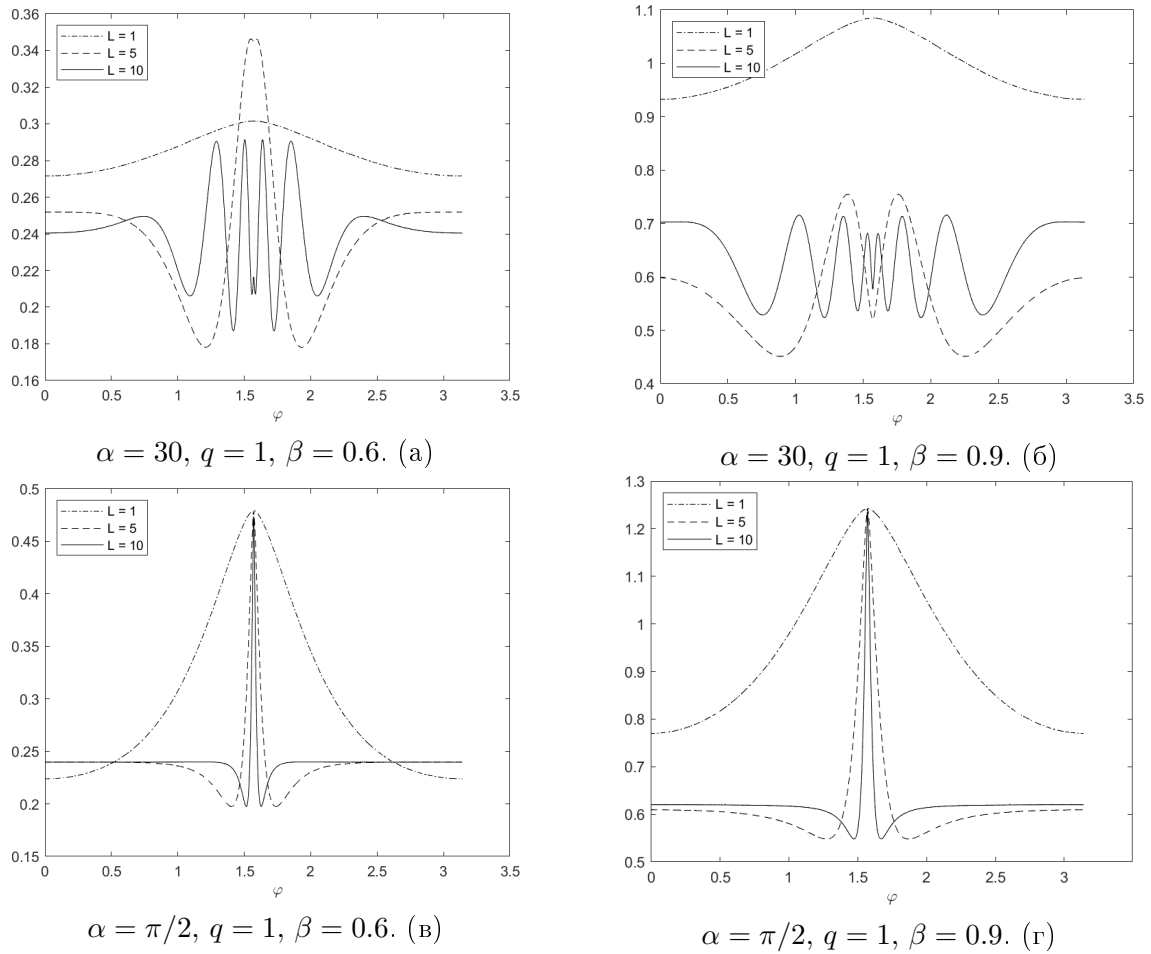


Рис. 7: Угловое распределение радиационных потерь энергии в единицах $F_0/2\pi$. Все параметры указаны на графиках.

Заметим, что в случае $\alpha = \pi/2$ качественное поведение графика не меняется в зависимости от расстояния между зарядами. График имеет характерный пик при $\varphi = \pi/2$, который с ростом скорости становится уже. В случае $\alpha = \pi/6$ график имеет осциляции, число которых становится больше с ростом L .

4. Анализ интегралов, определяющих поле одиночного заряда

В данном разделе будет описан общий подход к анализу интегралов, определяющих компоненты поля заряда, равномерно движущегося в изотропной среде с частотной дисперсией. Этот подход описан, в частности, в пособии [1] на примере среды с резонансной частотной дисперсией. Здесь он будет обобщен на случай среды с произвольной частотной дисперсией. В отличие от традиционного в теории ИВЧ подхода, рассматривающего интегралы по вещественной оси частот, здесь будут использоваться методы теории функций комплексного переменного. Как будет видно из дальнейшего, такой подход дает существенные преимущества для аналитического описания полей.

Суть предложенного метода исследования интегралов заключается в том, чтобы рассмотреть их на комплексной плоскости ω . Для этого, прежде всего, необходимо рассмотреть на комплексной плоскости функцию $s(\omega)$. Функция $s(\omega)$ должна быть определена таким образом, чтобы на вещественной оси при учете диссипации в среде было выполнено требование $\text{Im}s > 0$. При этом возможны различные варианты проведения разрезов. Представляется целесообразным провести их по таким отрезкам, где $\text{Im}s = 0$, фиксируя «физический» лист римановой поверхности требованием

$$\text{Im}s(\omega) > 0. \quad (25)$$

Отметим существенные для дальнейшего анализа свойства функций $s(\omega)$. Воспользуемся известным соотношением

$$n^2(-\omega^*) = (n^2(\omega))^*, \quad (26)$$

где $*$ означает операцию комплексного сопряжения (это свойство вытекает из вещественности компонент электромагнитного поля). Тогда из (25) и (4) вытекает, что

$$s(-\omega^*) = e^{i\pi} s^*(\omega). \quad (27)$$

Рассмотрим функции на мнимой оси. Так как функция n^2 не имеет точек ветвления, то из выражения (26) при $\omega = i\tilde{\omega}$ получим $n^2(i\tilde{\omega}) = (n^2(\tilde{\omega}))^*$, где $\tilde{\omega}$ — вещественная величина. Откуда следует, что функция $s^2(i\tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\omega}^2}{V^2} (1 - \beta^2 n^2(i\tilde{\omega}))$ тоже принимает вещественные значения при вещественных $\tilde{\omega}$. Тогда, действуя аналогично [1, с.27-28], для функции s на мнимой оси можно

записать:

$$s(i\omega) = \begin{cases} \frac{i|\omega|}{V} \sqrt{\beta^2 n^2(i\omega) - 1} & \text{для } \beta^2 n^2(i\omega) > 1, \\ \frac{\omega}{V} \sqrt{1 - \beta^2 n^2(i\omega)} & \text{для } \beta^2 n^2(i\omega) < 1, \end{cases} \quad (28)$$

где ω принимает вещественные значения. Можно заметить, что функция s не зависит от $\text{sgn}(\varepsilon)$, как это было на вещественной оси.

Из выражения (27) получим соотношения на разных сторонах разрезов

$$s(-\omega + i0) = e^{i\pi} s(\omega + i0) \quad (29)$$

для разрезов на вещественной оси и

$$s(i\omega - i0) = e^{i\pi} s(i\omega + 0) \quad (30)$$

для разрезов на мнимой оси.

Теперь выпишем асимптотику для функции s , учитывая, что при $|\omega| \rightarrow \infty$ $|n^2|$ стремится к единице снизу, а также $\text{Im}s > 0$, получим:

$$s(\omega) \xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{V} i\omega \text{sgn}(\text{Re}(\omega)) \quad (31)$$

Дальнейшие аналитические преобразования выражений сводятся к следующему. Как уже отмечалось, на основании свойств функции $s(\omega)$ исходный контур интегрирования (вещественную ось) можно дополнить полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной в области $\text{Im}\omega > 0$ при $\zeta > 0$ (перед зарядом) или в области $\text{Im}\omega < 0$ при $\zeta < 0$ (за зарядом), и образовать замкнутый контур интегрирования. После этого все компоненты могут быть записаны в виде сумм интегралов по разрезам и вычетов в полюсах. При $\zeta > 0$ вклад в интегралы вносит только контур, охватывающий разрез на мнимой положительной полуоси. Он дает «квазикулоновское» поле, представляющее собой предвестник, движущийся вместе с зарядом впереди него. При $\zeta < 0$ в интегралы вносит вклад как контур, охватывающий разрез на мнимой отрицательной полуоси («квазикулоновское» поле), так и контуры, которые охватывают разрезы, расположенные на вещественной оси (волновое поле, т. е. поле ИВЧ). Кроме того, если диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ является функцией частоты, то в компоненты E_r и E_z вносят вклад полюсы, являющиеся нулями функции $\varepsilon(\omega)$ (они определяют так называемый «плазменный след»). В результате ряда несложных преобразований можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}
E_r &= E_r^{(c)} + E_r^{(r)} + E_r^{(s)} \\
E_z &= E_z^{(c)} + E_z^{(r)} + E_z^{(s)} \\
H_\phi &= H_\phi^{(c)} + H_\phi^{(r)}
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
E_r^{(c)} &= \frac{q}{c\beta} \int_{\Omega_1} \frac{|s(i\omega)|}{\varepsilon(i\omega)} J_1(|s(i\omega)|r) \exp\left(-\frac{\omega|\zeta|}{V}\right) d\omega, \\
E_z^{(c)} &= \frac{q}{c^2} \operatorname{sgn}(\zeta) \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2(i\omega)} - 1\right) \omega \mu(i\omega) J_0(|s(i\omega)|r) \exp\left(-\frac{\omega|\zeta|}{V}\right) d\omega, \\
H_\phi^{(c)} &= \frac{q}{c} \int_{\Omega_1} |s(i\omega)| J_1(|s(i\omega)|r) \exp\left(-\frac{\omega|\zeta|}{V}\right) d\omega,
\end{aligned} \right. \tag{33}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
E_r^{(r)} &= -\frac{q}{c\beta} \Theta(-\zeta) \int_{\Omega_2} \frac{s(\omega)}{\varepsilon(\omega)} J_1(s(\omega)r) \sin\left(\frac{\omega\zeta}{V}\right) d\omega, \\
E_z^{(r)} &= \frac{q}{c^2} (\zeta) \Theta(-\zeta) \int_{\Omega_2} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} - 1\right) \omega |\mu(\omega)| J_0(s(\omega)r) \cos\left(\frac{\omega\zeta}{V}\right) d\omega, \\
H_\phi^{(r)} &= -\frac{q}{c} \Theta(-\zeta) \int_{\Omega_2} s(\omega) J_1(s(\omega)r) \sin\left(\frac{\omega\zeta}{V}\right) d\omega,
\end{aligned} \right. \tag{34}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
E_r^{(s)} &= \frac{4q}{c^2 \beta^2} \Theta(-\zeta) \sum_i \frac{\omega}{d\varepsilon/d\omega} K_1\left(\frac{r\omega}{V}\right) \sin\left(\frac{\omega\zeta}{V}\right) \Big|_{\omega=\omega_{si}}, \\
E_z^{(s)} &= -\frac{4q}{c^2} \Theta(-\zeta) \sum_i \frac{\omega}{d\varepsilon/d\omega} K_0\left(\frac{r\omega}{V}\right) \cos\left(\frac{\omega\zeta}{V}\right) \Big|_{\omega=\omega_{si}}, \\
H_\phi^{(s)} &= 0,
\end{aligned} \right. \tag{35}$$

где Ω_1 - это интервалы, где $\beta^2 n^2(i\omega) < 1$. В (33) проведена замена переменных, и интегрирование идет по таким вещественным ω , для которых выполнено $\beta^2 n^2(i\omega) < 1$. Ω_2 - это интервалы, где $\beta^2 n^2(\omega) > 1$, $J_0(\xi)$ и $J_1(\xi)$ - функции Бесселя нулевого и первого порядков, $\Theta(\xi)$ - функция Хэвисайда. В (28) суммиро-

вание и подстановка идет по всем нулям функции $\varepsilon(\omega)$, которые определяются уравнением $\varepsilon(\omega_{si}) = 0$.

Здесь индексом «с» снабжены «квазикулоновские» части компонент поля, индексом «г» – волновые составляющие, а индексом «s» – компоненты «плазменного следа». «Квазикулоновское» поле присутствует как позади, так и впереди движущегося заряда и быстро убывает по мере удаления от него. Волновое поле (поле ИВЧ) имеется только позади заряда. Аналогичным образом ведет себя «плазменный след», однако, в отличие от поля излучения, он сосредоточен в основном вблизи к траектории движения заряда и быстро (экспоненциально) убывает при удалении от нее.

Результаты (33) – (35) переходят в полученные в [1] для случая резонансной среды с проницаемостью (21).

5. Силы, действующие в системе из двух зарядов

Перейдем к анализу сил в системе из двух точечных зарядов величиной q_1 и q_2 . Как известно сила, действующая на движущийся со скоростью \vec{V} заряд q в электромагнитном поле, равна:

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{B}] \right). \quad (36)$$

Мы будем полагать, что среда, в которой происходит движение зарядов, не поглощает излучение. Рассматриваем, как и в предыдущих разделах, только два жестко связанных между собой заряда, движущихся в положительном направлении оси z . Продольное расстояние между ними равно $L = b \cos \alpha$, а поперечное $d = b \sin \alpha$.

Отметим, что, как видно из формул (26), квазикулоновская продольная компонента электрического поля является нечетной функцией ζ . Это означает, что данная компонента поля антисимметрична относительно частицы, вследствие чего не может тормозить ее. Поэтому при рассмотрении воздействия собственного поля частицы на нее саму эту часть поля следует исключить.

Обратим далее внимание на то, что поле плазменного следа (28) асимметрично и обращается в бесконечность на линии движения заряда, в том числе на нем самом. Это означает, что сила воздействия со стороны этого поля на саму частицу бесконечно велика. Это известный «парадокс» в теории излучения частиц в среде: учет частотной дисперсии позволяет получить правильные оценки только для силы со стороны поля излучения, но не поля плазменных волн. В то же время, от этой составляющей поля можно избавиться, если несколько усложнить рассматриваемую модель, а именно, считать, что заряд движется в вакуумном канале в среде. Если радиус канала много меньше характерных длин волн черенковского излучения, то на него канал практически не повлияет. А если радиус канала существенно превышает характерный масштаб убывания поля в формулах (28), то «след» практически не будет генерироваться. Поэтому, можно рассматривать силы, действующие на заряд, исключив плазменный след. Таким образом, далее мы будем рассматривать все силы, действующие на заряды, кроме силы воздействия на каждый заряд со стороны плазменного следа.

Исходя из результатов предыдущего пункта, сила, действующая на первый заряд, равна:

$$\vec{f}_1 = \vec{f}_{11} + \vec{f}_{12} = \vec{f}_{11}^{(r)} + \vec{f}_{12}^{(c)}. \quad (37)$$

Сила, действующая на второй заряд:

$$\vec{f}_2 = \vec{f}_{22} + \vec{f}_{21} = \overrightarrow{f}_{22}^{(r)} + \overrightarrow{f}_{21}^{(c)} + \overrightarrow{f}_{21}^{(r)}. \quad (38)$$

В (37) и (38) первый индекс означает, на какой заряд действует сила, а второй индекс поле какого заряда задает взаимодействие.

Выпишем каждое из слагаем отдельно. В теории ИВЧ [1] показано, что

$$\overrightarrow{f}_{11}^{(r)} = q_1 E_{11z}^{(r)} \vec{e}_z = -\frac{q_1^2}{c^2} \int_{\Omega_2} \omega |\mu(\omega)| \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) d\omega \vec{e}_z, \quad (39)$$

аналогично

$$\overrightarrow{f}_{22}^{(r)} = q_2 E_{22z}^{(r)} \vec{e}_z = -\frac{q_2^2}{c^2} \int_{\Omega_2} \omega |\mu(\omega)| \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) d\omega \vec{e}_z. \quad (40)$$

Это есть силы воздействия полей излучения зарядов на них самих, называемые обычно силами радиационного торможения (или радиационного трения). Они равны работе, совершаемой ими на единице длины пути, вследствие чего они совпадают с потерями энергии на единицу длины пути (8).

Теперь запишем силы, действующие на заряд со стороны другого заряда:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}_{21}^{(r)} &= q_2 \left(\left(E_{21r}^{(r)} - \beta B_{21\phi}^{(r)} \right) \vec{e}_r + E_{21z}^{(r)} \vec{e}_z \right) = \\ &= -\frac{2q_1 q_2 \beta}{c} \int_{\Omega_2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) s(\omega) |\mu(\omega)| J_1(s(\omega)d) \sin\left(\frac{\omega L}{V}\right) d\omega \vec{e}_r - \\ &- \frac{2q_1 q_2}{c^2} \int_{\Omega_2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right) \omega |\mu(\omega)| J_0(s(\omega)r) \cos\left(\frac{\omega L}{V}\right) d\omega \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}_{21}^{(c)} &= -\overrightarrow{f}_{12}^{(c)} = q_2 \left(\left(E_{21r}^{(c)} - \beta B_{21\phi}^{(c)} \right) \vec{e}_r + E_{21z}^{(c)} \vec{e}_z \right) = \\ &= \frac{q_1 q_2 \beta}{c} \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2(i\omega)} - 1 \right) |s(i\omega)| |\mu(i\omega)| J_1(|s(i\omega)|d) \exp\left(-\frac{\omega L}{V}\right) d\omega \vec{e}_r - \\ &- \frac{q_1 q_2}{c^2} \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{\beta^2 n^2(i\omega)} - 1 \right) \omega \mu(i\omega) J_0(|s(i\omega)|d) \exp\left(-\frac{\omega L}{V}\right) d\omega \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (42)$$

Как видим, силы кулоновского взаимодействия (42) взаимно противоположны по направлению и равны по величине, что объясняется симметрией квази-

кулоновского поля. Они содержат как радиальную, так и продольную составляющие. При этом, если первый заряд тормозится полем второго, то второй заряд будет ускоряться полем первого (или наоборот).

Принципиально иной (асимметричный) характер носит волновое (радиационное) взаимодействие зарядов, описываемое формулами (42): первый заряд воздействует на второй, в то время как волновое воздействие второго на первый отсутствует. При этом сила радиационного воздействия первого на второй может иметь любой знак, в зависимости от параметров задачи. Так, при наличии двух сгустков электронов передний сгусток может притягивать задний.

Стоит отметить, что поперечная компонента силы радиационного взаимодействия не совершает работы, но стремится отклонить задний заряд от направления движения. Эта сила обращается в нуль только при ориентации оси системы по скорости или перпендикулярно к ней.

Приведем некоторые результаты анализа сил взаимодействия зарядов для среды типа (21). При этом мы будем учитывать силы квазикулоновского и волнового взаимодействия, но силы, связанные с полем плазменного следа (35), учитываться не будут (по указанным выше причинам).

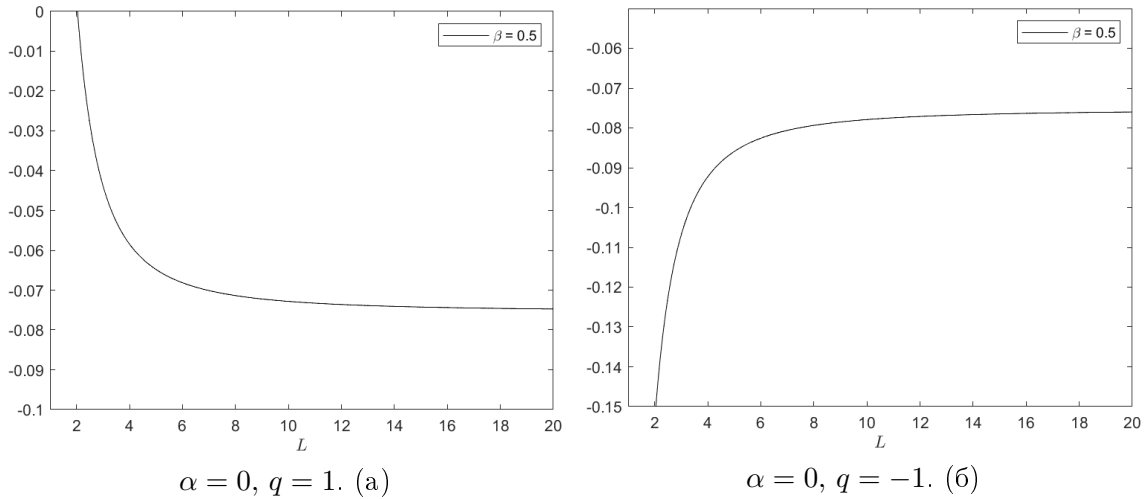


Рис. 8: Продольная компонента силы, действующей на первый заряд в (единицах $q_1^2 \omega_r^2 / c^2$) в зависимости от расстояния между зарядами (в единицах c / ω_r). Все параметры указаны на графиках ($q = q_2 / q_1$).

Рис. 8 показывает силу, действующую на первый заряд. Она состоит из собственной силы радиационного торможения и сил квазикулоновского воздействия второго заряда на первый (радиационное воздействие второго на первый отсутствует). Как видим, оба графика представляют собой монотонные функции. Если заряды имеют один знак, то при достаточно малом расстоянии между зарядами сила положительна за счет кулоновского расталкивания, то есть

заряд испытывает ускоряющую силу. При больших расстояниях преобладает торможение за счет собственного радиационного трения. Если же знаки зарядов разные, то первый заряд всегда испытывает тормозящую силу, так как при этом обе составляющие силы его тормозят.

Рис. 9 показывает силу, действующую на второй заряд. Она состоит из собственной силы радиационного торможения и сил квазикулоновского и волнового воздействия первого заряда на второй. Квазикулоновская сила монотонно убывает с расстоянием, а зависимость радиационной силы более сложная: для нее характерны осцилляции с выходом на константу (силу собственного радиационного торможения) при бесконечно большом расстоянии. Как видим, существуют такие области значений L , где суммарная сила, действующая на второй заряд, положительна, то есть стремится его ускорять. С ростом скорости число таких областей падает, а "ширина" таких областей - возрастает.

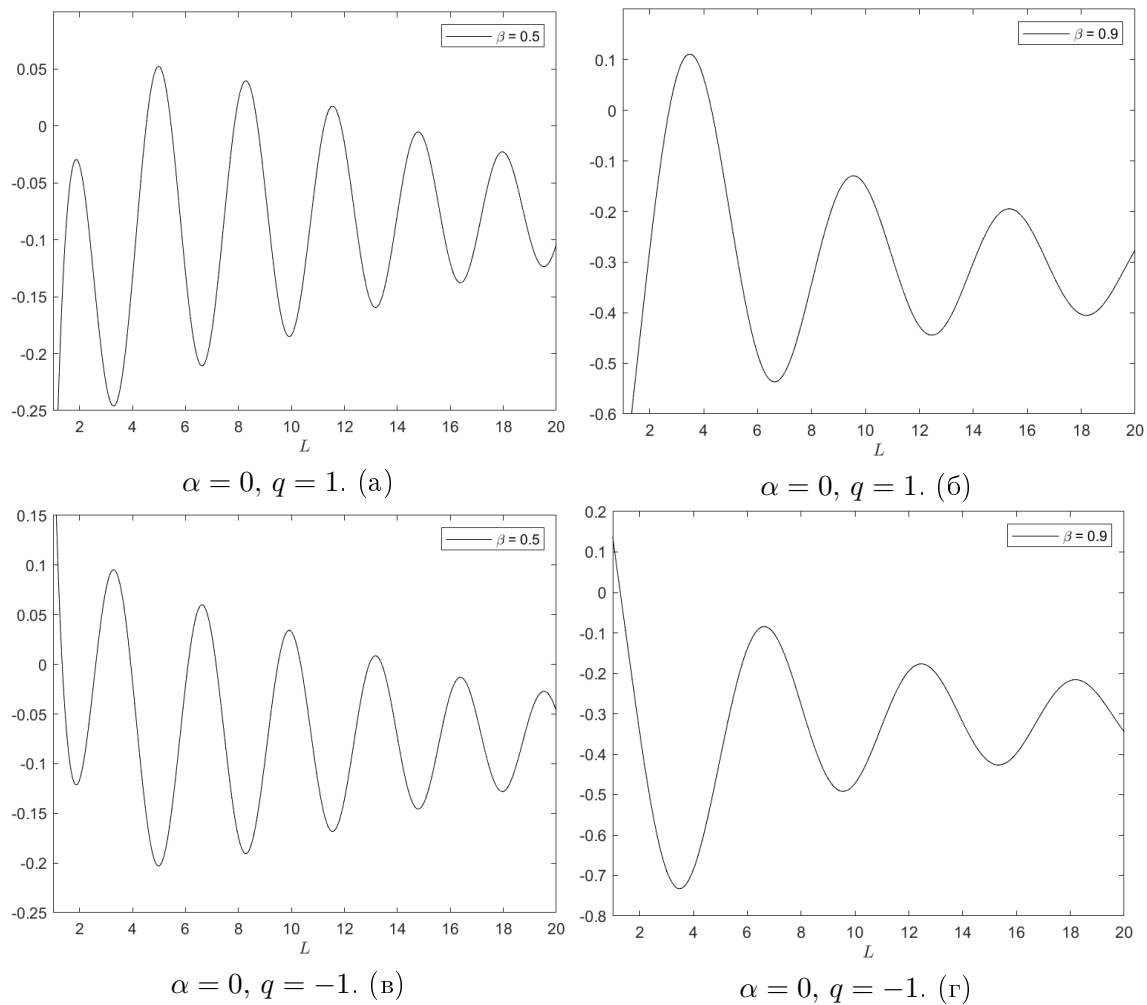


Рис. 9: Продольная компонента силы, действующей на второй заряд (в единицах $q_1^2 \omega_r^2 / c^2$) в зависимости от расстояния между зарядами (в единицах c / ω_r). Все параметры указаны на графиках ($q = q_2 / q_1$).

Заключение

В работе были рассмотрены электромагнитное поле и силы взаимодействия в системе двух точечных зарядов, движущихся с одинаковыми постоянными скоростями в линейной однородной изотропной среде, обладающей частотной дисперсией. Получена формула для радиационных потерь энергии данной системы при любом расположении зарядов по отношению к вектору скорости их движения. Далее был рассмотрен случай среды с резонансной дисперсией, для которой был построен ряд иллюстраций, характеризующих зависимость потерь энергии от параметров задачи.

Был проведен анализ интегралов, определяющих поле отдельного заряда в среде с произвольной частотной дисперсией. При этом использовались методы теории функции комплексного переменного. Полное поле было представлено в виде суммы квазикулоновского поля, волнового поля и поля плазменных колебаний.

Был проведен анализ сил взаимодействия зарядов в случае среды с резонансной частотной дисперсией. Показано, что существуют диапазоны параметров, при которых суммарная сила, действующая на задний заряд, является ускоряющей.

Список литературы

- [1] Тюхтин А. В. *Излучение Вавилова-Черенкова в изотропной среде*. СПб, СОЛО, 2019.
- [2] С. Н. Галямин, А. В. Тюхтин. *Взаимодействие точечных зарядов, движущихся в резонансно диспергирующей диэлектрике*. Вестник СПбГУ. Сер. 4. 2006. Вып.1, с. 21–30.
- [3] С. Н. Галямин. *Электромагнитные поля движущихся заряженных частиц в присутствии сред со сложными дисперсионными характеристиками*.
- [4] Франк И. М. *Излучение Вавилова-Черенкова*. М., Наука, 1988.
- [5] Зрелов В. П. *Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий*. Ч. 1,2. М., 1968
- [6] Болотовский Б. М., *Теория эффекта Вавилова-Черенкова // Успехи физических наук*, т. 62, № 3, с. 201 – 246 (1957).
- [7] Afanasiev G. N., *Vavilov-Cherenkov and Synchrotron Radiation: Foundations and Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. 491 с.
- [8] Galyamin S.N., Tyukhtin A.V. *Electromagnetic field of a moving charge in the presence of a left handed medium // Physical Review B*, v. 81, 235134 (2010).