

Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет  
Кафедра радиофизики

**Григорьев Степан Геннадьевич**

**Выпускная квалификационная работа**

**“Аналитическое исследование и моделирование электромагнитного поля  
токового цилиндра, расположенного в вакуумном канале в диэлектрике”**

Уровень образования: бакалавриат  
Направление 03.03.03 «Радиофизика»  
Основная образовательная программа СВ.5113.2019 «Электромагнитные и  
акустические процессы»

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент Галямин Сергей Николаевич

Рецензент:  
к.ф.-м.н., доцент Альтмарк А.М.

Санкт-Петербург

2023

## СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение	4
II. Электромагнитное поле равномерно движущегося заряда в изотропной среде	7
III. Поле равномерно заряженного диска (цилиндрического тока)	15
IV. Электромагнитное поле равномерно движущегося заряда в открытом ленточном волноводе.	18
V. Электромагнитное поле равномерно движущегося заряженного диска в открытом волноводе из кольцевых проводников круглого сечения	24
VI. Заключение	28
Список литературы	30

## I. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы взаимодействия равномерно движущихся заряженных сгустков с диэлектрическими средами привлекает внимание исследователей с момента открытия в 1934 г. эффекта Вавилова-Черенкова [1] и построения классической электродинамической теории данного явления [2–4]. В последующие годы излучение Вавилова-Черенкова (ИВЧ) нашло широкое применение в физике элементарных частиц при создании черенковских детекторов и счетчиков [5, 6].

В последние десятилетия активно исследуется генерация ИВЧ релятивистскими электронными сгустками в волноведущих структурах с диэлектрическим заполнением. В этом случае ИВЧ рассматривается, например, как инструмент для создания нового типа ускорителей – так называемых “кильватерных” ускорителей – в которых т.н. “ведомый” (т.е. ускоряемый) сгусток ускоряется в поле волны ИВЧ (эта волна обычно называется “кильватерной”, откуда и получил название метод), создаваемой в волноводе “ведущим” сгустком, несущим как правило значительный заряд. Аналогичные “кильватерные” структуры оказываются перспективными также и для создания узкополосных источников излучения в том числе и в терагерцовом диапазоне частот [7]. Другим направлением современных исследований является анализ ИВЧ от диэлектрических объектов конечных размеров, имеющих форму конуса, шара, призмы и т.д. (и как правило имеющих вакуумный канал для пропускания заряда): сгенерированное излучение предлагается использовать для маловозмущающей диагностики заряженных сгустков на ускорительных установках [8–11].

При расчете излучения от упомянутых объектов сложной формы приходится сталкиваться с существенными трудностями, т.к. соответствующие задачи не могут быть решены аналитически ввиду сложности геометрии (несколько граничных поверхностей, наличие угловых областей и т.д.). Поэтому конструктивным подходом к данному вопросу является построение надежного приближенного метода, позволяющего получать результат с контролируемой точностью в наиболее интересной (с точки зрения генерации ИВЧ) области пространства. На протяжении последних лет такой метод активно развивался научной группой, в которой выполнялась данная квалификационная работа [12–16]. Одним из важных аспектов описанной деятельности является апробация метода путем проведения численного моделирования (симуляций) с последующим сопо-

ставлением результатов [17]. В рамках этой работы был разработан соответствующий метод численного моделирования в частотной области (frequency domain) широкого круга задач с источником в виде равномерно движущегося заряда в радиочастотном модуле пакета Comsol Multiphysics. Нить тока (Фурье-образ движущегося точечного заряда) заменялась на цилиндр с равномерным распределением объемной плотности тока, а амплитуда тока подбиралась из условия равенства полного тока. Важной практической задачей является исследование влияния поперечного размера токового цилиндра на амплитуды создаваемых полей, т.к. при симуляциях нежелательно иметь этот размер слишком малым (это приводит к умелчанию расчетной сетки и возрастанию объема требуемой для расчетов памяти). Анализ этого вопроса посвящена первая часть данной квалификационной работы.

Как известно, генерация ИВЧ возможна не только в диэлектрике, но и в любой замедляющей структуре. Замедляющие структуры из “проводов” (т.е. протяженных проводников различного поперечного сечения) активно исследуются по крайней мере с середины прошлого века. Прежде всего необходимо упомянуть т.н. “проволочную среду” (wire medium), которая обсуждалась в связи с моделированием ионосферной плазмы в СВЧ диапазоне [18], а в недавнее время она рассматривалась также в контексте генерации ИВЧ и развития методов диагностики заряженных ступков [19–21]. Также проволочная среда неизменно присутствовала в теоретических и экспериментальных работах по “левым” средам (left-handed media) [22–24]. Двумерные проволочные структуры также привлекали существенное внимание исследователей [25, 26]. Например, близкими к тематике данной квалификационной работе являются статьи по генерации ИВЧ в волноводе с сетчатой стенкой из перекрещивающихся проводов [27, 28]. Отметим, что в вышеупомянутых работах рассматривались тонкопроволочные структуры (поперечный размер проводников мал по сравнению с расстоянием между ними) в длинноволновом приближении (длина волны существенно больше расстояния между проводниками), что позволяет использовать для их описания “эффективную проницаемость” (трехмерные структуры) [29] или усредненные граничные условия (двумерные структуры) [30]. Вторая часть данной квалификационной работы посвящена анализу аналогичных задач (с источником в виде движущегося заряда) в длинноволновом приближении для ряда сетчатых структур, которые не являются тонкопроволочными (поперечный размер проводников может даже равняться периоду, что приводит к смы-

канию проводников). В таком приближении двумерные сетки целесообразно описывать в рамках т.н. эквивалентных граничных условий (условий Вайнштейна-Сивова) [31]. Отметим, что генерация ИВЧ в родственных мелкоффрированных структурах (они описываются теми же условиями Вайнштейна-Сивова) активно анализировалась в последнее время [32], однако сетки из “толстых” проводников в данном контексте не рассматривались.

## II. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В первую очередь было рассмотрено поле равномерно движущегося заряда  $q$ , в однородной, изотропной среде, с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $z$  (Рис. 1). Изложение этого раздела носит ознакомительный характер и соответствует пособию [33]

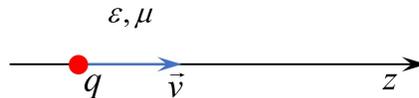


Рис. 1: Геометрия задачи с равномерно движущимся точечным зарядом.

Электромагнитное поле в среде определяется системой дифференциальных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{dB}{dt}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{dD}{dt} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4)$$

Как известно, всякий вектор, дивергенция которого равна нулю, может быть представлен в виде ротора некоторого другого вектора, а вектор, ротор которого равен нулю, является градиентом некоторого скаляра. Поэтому из уравнения (4) следует, что существует некоторый вектор (называемый векторным потенциалом) такой, что

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение для  $\vec{B}$  в уравнение (1), получаем:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{A})}{\partial t} = \operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6)$$

Из уравнения выше следует, что стоящая под общим знаком ротора величина является градиентом некоторого скаляра, который мы обозначим через  $\Phi$ :

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi. \quad (7)$$

Тогда  $\Phi$  есть скалярный потенциал,  $\vec{A}$  – векторный потенциал. Подставим полученные выражения в неоднородные уравнения Максвелла. Используя равенство  $\text{rot rot} = \nabla \text{div} - \Delta$ , приведем систему уравнений к виду:

$$\begin{cases} -\Delta\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \\ \nabla \left( \text{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \end{cases} \quad (8)$$

Введем обозначение  $\square = \Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , тогда получим:

$$\begin{cases} \square\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \\ \square\vec{A} + \nabla \left( \text{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \end{cases} \quad (9)$$

Наложим на потенциалы условие калибровки Лоренца:

$$\text{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

и получим систему

$$\begin{cases} \Delta\vec{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}, \\ \Delta\Phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \end{cases} \quad (11)$$

Для вычисления потенциалов используем выражение для плотности заряда в декартовой системе координат (ДСК)

$$\rho = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt), \quad (12)$$

где  $\delta(\xi)$  – дельта-функция Дирака, и найдем его Фурье-образ:

$$\rho_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q\delta(x)\delta(y) \frac{\delta(t - z/v)}{v} e^{i\omega t} dt = \frac{\delta(x)\delta(y)}{2\pi v} e^{i\frac{\omega z}{v}}. \quad (13)$$

Выразим скалярный потенциал через его Фурье-образ:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad (14)$$

Подставляя выражения для  $\Phi_\omega$  – уравнение (14) – и  $\rho_\omega$  – уравнение (13) – во 2-е уравнение системы (11), получим

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) \Phi_\omega = -2 \frac{q}{\varepsilon v} \delta(x)\delta(y). \quad (15)$$

Для решения уравнения (15) воспользуемся методом Фурье. Вычислим Фурье-образ скалярного потенциала по времени и координатам  $\Phi_{\omega\vec{k}}$ :

$$\Phi_{\omega} = \iiint \Phi_{\omega\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (16)$$

$$\Phi_{\omega\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \Phi_{\omega} e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}. \quad (17)$$

Рассмотрим сначала левую часть уравнения (15):

$$\iiint \left( \Delta + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) \Phi_{\omega\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = \iiint \left( -k^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) \Phi_{\omega\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}. \quad (18)$$

Обозначим правую часть как  $F_{\omega}$ , тогда её Фурье-образ будет равен:

$$F_{\omega\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \left( -\frac{2q}{\varepsilon v} \right) \iiint \delta(x)\delta(y) e^{i\frac{\omega z}{v} - i\vec{k}\vec{r}} dx dy dz \quad (19)$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2q}{\varepsilon v} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{\omega}{v} - k_z)z} dz = -\frac{q}{2\pi^2 \varepsilon v} \delta\left(k_z - \frac{\omega}{v}\right). \quad (20)$$

Мы воспользовались уравнением (14) и известным интегральным представлением дельта функции

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega.$$

Подставив полученные выражения в уравнение (15) получим:

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) \Phi_{\omega\vec{k}} = -\frac{q}{2\pi^2 \varepsilon v} \delta\left(k_z - \frac{\omega}{v}\right) \quad (21)$$

$$\Phi_{\omega\vec{k}} = -\frac{q}{2\pi^2 \varepsilon v} \frac{1}{-k^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2}} \delta\left(k_z - \frac{\omega}{v}\right). \quad (22)$$

Получим теперь  $\Phi_{\omega}$ :

$$\Phi_{\omega} = \iiint -\frac{q}{2\pi^2 \varepsilon v} \frac{1}{-k^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2}} \delta\left(k_z - \frac{\omega}{v}\right) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = \quad (23)$$

$$= \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon v} \iint e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \int \frac{\exp(ik_z z)}{k^2 - \frac{\omega^2 n^2}{c^2}} \delta\left(k_z - \frac{\omega}{v}\right) dk_z = \quad (24)$$

$$= \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon v} \int dk_x \int dk_y \frac{\exp\left[i\left(k_x x + k_y y + \frac{\omega z}{v}\right)\right]}{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2 n^2}{c^2}}. \quad (25)$$

Перейдём в цилиндрическую систему координат (ЦСК) используя соотношение  $\vec{r}\vec{k} = rk_r \cos(\phi_k - \phi)$ , тогда уравнение (25) примет вид

$$\Phi_{\omega} = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon v} \int_0^{2\pi} d\phi_k \int_0^{\infty} dk_r k_r \frac{\exp\left[ik_r r \cos(\phi_k - \phi) + i\frac{\omega}{v} z\right]}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - n^2 \beta^2)}. \quad (26)$$

Используя следующий табличный интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_r r \cos(\phi_k - \phi)} d\phi_k = 2\pi J_0(k_r r), \quad (27)$$

получим:

$$\Phi_\omega = \frac{qe^{i\frac{\omega}{v}z}}{\pi\varepsilon v} \int_0^\infty dk_r \frac{k_r J_0(k_r r)}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - n^2\beta^2)}. \quad (28)$$

Вычислим интеграл в (28), для чего перейдём к интегрированию по всей вещественной оси, воспользовавшись связью функций Бесселя и Ханкеля:  $J_0(z) = \frac{1}{2}(H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z))$ :

$$I = \int_0^\infty dk_r \frac{k_r J_0(rk_r)}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - n^2\beta^2)} dk_r = \frac{1}{2} \int_0^\infty dk_r \left( \frac{k_r H_0^{(1)}(rk_r)}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - n^2\beta^2)} + \frac{k_r H_0^{(2)}(rk_r)}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - n^2\beta^2)} \right). \quad (29)$$

Учтём, что  $H_0^{(2)}(rk_r) = -H_0^{(1)}(-rk_r)$ , тогда  $I$  примет вид:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty dk_r \frac{k_r H_0^{(1)}(rk_r)}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - n^2\beta^2)} - \frac{1}{2} \int_0^\infty dk_r \frac{k_r H_0^{(1)}(rk_r)}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - n^2\beta^2)}. \quad (30)$$

Приведём второе слагаемое в уравнении (30) к интегрированию по отрицательной части вещественной оси и получим:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dk_r \frac{k_r H_0^{(1)}(rk_r)}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - n^2\beta^2)}. \quad (31)$$

Рассмотрим асимптотику интегранда при  $r|k_r| \gg 1$ :

$$H_0^{(1)}(rk_r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi rk_r}} e^{i(rk_r - \frac{\pi}{4})} \Rightarrow \left| \frac{k_r H_0^{(1)}(rk_r)}{k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - n^2\beta^2)} \right| \simeq \frac{e^{-rk_r''}}{|k_r|^{3/2}}, r|k_r| \gg 1. \quad (32)$$

Т.к подинтегральное выражение имеет асимптотику (32), то мы можем перейти к интегрированию по замкнутому контуру, состоящему из вещественной оси, деформированной вверх или вниз в малой окрестности точки  $i\sigma$  или  $-i\sigma$ , и полуокружности бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости. Ниже мы установим взаимное расположение этого контура и полюсов.

Для этого предположим, что среда обладает потерями, т.е.

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_m, \\ \mu = \mu_r + i\mu_m, \\ n^2 = \varepsilon\mu = n_r^2 + in_m^2. \end{cases} \quad (33)$$

Известно, что  $\Phi(t) = 2\text{Re} \int_0^{\infty} \Phi_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega$ , т.е. обратный интеграл Фурье по всей вещественной оси может быть сведен к интегралу по положительным частотам. Пользуясь этим свойством, в дальнейшем считаем  $\omega > 0$  (т.е. рассматриваем только положительную часть спектра), при этом  $n_m^2 > 0$ . Введём обозначения:

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - n^2 \beta^2), \quad (34)$$

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (n^2 \beta^2 - 1), \quad (35)$$

т.е.  $s^2 = -\sigma^2$ . Рассмотрим два варианта:

$$\text{а) } 1 - n_r^2 \beta^2 > 0,$$

$$\text{б) } 1 - n_r^2 \beta^2 < 0,$$

и введём  $\delta = \frac{n_m^2 \beta^2}{1 - n_r^2 \beta^2}$ . Сначала рассмотрим случай когда потери малы, но не равны нулю, т.е.  $0 < |\delta| \ll 1$ .

В случае а)  $1 - n_r^2 \beta^2 > 0$  удобно работать с  $\sigma = \pm \sqrt{\sigma^2}$  и определять знак из условия  $\text{Re} \sigma > 0$ :

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} (1 - n_r^2 \beta^2) (1 - i\delta)} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} (1 - n_r^2 \beta^2)} \left(1 - \frac{i}{2} \delta\right), \quad (36)$$

т.е. необходимо выбрать знак +.

В случае б)  $1 - n_r^2 \beta^2 < 0$ ,  $\delta < 0$  удобно работать с  $s = \pm \sqrt{s^2}$  и определять знак из условия  $\text{Im} s > 0$ :

$$s = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} (n_r^2 \beta^2 - 1) (1 + i|\delta|)} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} (n_r^2 \beta^2 - 1)} \left(1 + \frac{i}{2} |\delta|\right), \quad (37)$$

т.е. также необходимо выбрать знак +.

Учитывая условия для выбора знака в каждом из случаев, окончательно получим:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - n_r^2 \beta^2} \left(1 - \frac{i}{2} \delta\right), & n_r^2 \beta^2 < 1, \\ s = \frac{\omega}{v} \sqrt{n_r^2 \beta^2 - 1} \left(1 + \frac{i}{2} |\delta|\right), & n_r^2 \beta^2 > 1. \end{cases} \quad (38)$$

Устремим потери к 0, тогда  $n_m^2 \rightarrow 0$ ,  $|\delta| \rightarrow 0$ ,  $n_r^2 \rightarrow n^2$ , и

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - n^2 \beta^2}, & n^2 \beta^2 < 1, \\ s = \frac{\omega}{v} \sqrt{n^2 \beta^2 - 1}, & n^2 \beta^2 > 1, \end{cases} \quad (39)$$

где по выводу радикалы считаются положительными. Отметим однако, что если расширить наше определение и считать, что радикалы в (39) либо положительны (в случае положительности подкоренного выражения), либо имеют положительную мнимую часть (в случае отрицательности подкоренного выражения), то мы сразу получим, что  $\sigma$  и  $s$  связаны соотношением

$$s = i\sigma, \quad (40)$$

которое удобно использовать в дальнейшем.

Вычислим интеграл  $I$  в случае а)  $n^2\beta^2 < 1$ :

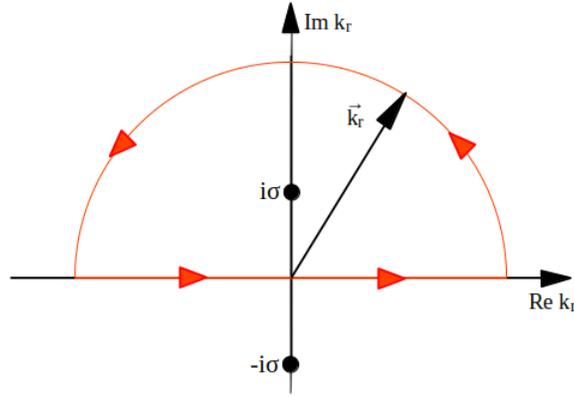


Рис. 2: Контур интегрирования в случае мнимых полюсов.

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_r \frac{k_r H_0^{(1)}(rk_r)}{(k_r + i\sigma)(k_r - i\sigma)} = \pi i \operatorname{Res}_{k_r=i\sigma} \frac{k_r H_0^{(1)}(k_r r)}{(k_r + i\sigma)(k_r - i\sigma)} = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i\sigma r) = K_0(\sigma r). \quad (41)$$

В случае б)  $n^2\beta^2 > 1$  имеем: Отметим, что мы провели контур так, что левый полюс не входит внутрь замкнутого контура интегрирования: при  $\delta \neq 0$  этот полюс находится ниже вещественной оси, а при стремлении  $\delta \rightarrow 0$  топология расположения полюса и контура остаются неизменными. С физической точки зрения при попадании внутрь контура интегрирования полюса  $k_r = -s$  волновой вектор соответствующей волны будет отрицательным, т.е. вклад этого полюса описывает волны, идущие к источнику из бесконечности, что нефизично.

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_r H_0^{(1)}(k_r r)}{(k_r - s)(k_r + s)} = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(r\sigma). \quad (42)$$

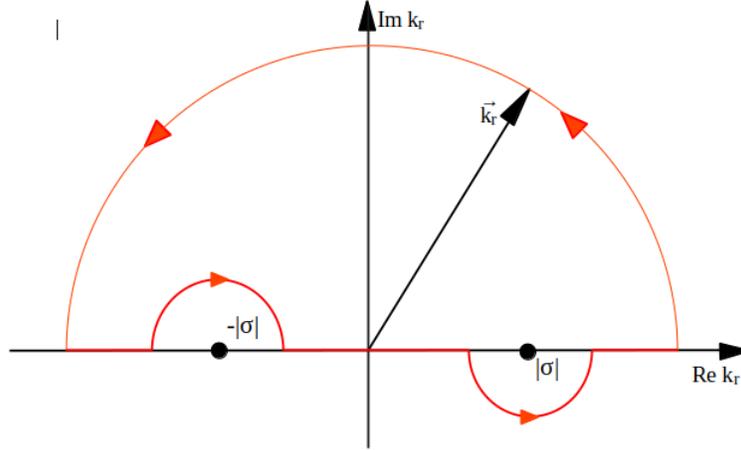


Рис. 3: Контур интегрирования в случае вещественных полюсов.

Окончательно получим значения  $I$ :

$$I = K_0(\sigma r), \quad n^2 \beta^2 < 1, \quad (43)$$

$$I = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(sr), \quad n^2 \beta^2 > 1. \quad (44)$$

Еще раз подчеркнем, что случае а)  $n^2 \beta^2 < 1$  имеем  $\sigma > 0$ , поэтому полученное выражение для  $I$  (43) обеспечивает экспоненциальное убывание поля при удалении от источника (т.е. при  $r \rightarrow \infty$ ). В случае б)  $n^2 \beta^2 > 1$  получили, что  $s > 0$ , и соответствующее выражение для  $I$  (44) обеспечивает уход волны по фазе от источника, т.е. выполнение принципа Зоммерфельда.

Найдём  $\Phi_\omega$  пользуясь формулой (28)

$$\begin{cases} \Phi_\omega = \frac{q}{\varepsilon v} \frac{1}{\pi} K_0(\sigma r) e^{i \frac{\omega}{v} z}, & n^2 \beta^2 < 1, \\ \Phi_\omega = \frac{q}{\varepsilon v} \frac{i}{2} H_0^{(1)}(sr) e^{i \frac{\omega}{v} z}, & n^2 \beta^2 > 1. \end{cases} \quad (45)$$

Для вычисления компонент поля найдём явную связь скалярного и векторного потенциала. Т.к. заряд движется вдоль оси  $z$ , то  $\vec{j} = j \vec{e}_z$ , и  $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$ . Найдём из системы (11) векторный потенциал:

$$\begin{cases} \Delta A_z - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} j, \\ \Delta \Phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \end{cases} \quad (46)$$

откуда при переходе к Фурье-гармоникам  $\Phi \rightarrow \Phi_\omega$  получим:

$$\begin{cases} \Delta A_{z\omega} + \frac{n^2\omega^2}{c^2} A_{z\omega} = -\frac{4\pi\mu}{c} j_\omega, \\ \Delta \Phi_\omega + \frac{n^2\omega^2}{c^2} \Phi_\omega = -\frac{4\pi\rho_\omega}{\varepsilon}, \end{cases} \quad (47)$$

откуда сразу видна искомая связь:

$$A_{z\omega} = \varepsilon v \frac{\mu}{c} \Phi_\omega. \quad (48)$$

Найдём Фурье-образ магнитного поля пользуясь уравнением (5), считая здесь и далее, что  $\mu = 1$ , тогда  $\vec{H}_\omega = \text{rot}(A_{z\omega} \vec{e}_z)$ ,

$$\vec{H}_\omega = -\varepsilon \frac{\mu}{c} v \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_\phi. \quad (49)$$

Получим Фурье-образ магнитного поля для обоих случаев:

$$\begin{cases} H_{\omega\phi} = \frac{q\sigma}{\pi c} e^{i\frac{\omega}{v}z} K_1(\sigma r), & n^2\beta^2 < 1, \\ H_{\omega\phi} = \frac{iqs}{2c} e^{i\frac{\omega}{v}z} H_1^{(1)}(sr), & n^2\beta^2 > 1. \end{cases} \quad (50)$$

Используя уравнение (7), преобразованное с учетом связи (48) и перехода к Фурье-образам ( $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ ), получим окончательное выражение для  $\vec{E}_\omega$

$$\vec{E}_\omega = \left( \frac{i\omega\varepsilon v}{c^2} \Phi_\omega - \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial z} \right) \vec{e}_z - \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_r. \quad (51)$$

Потенциал в первой строке в (50) соответствует случаю, когда скорость заряда меньше фазовой скорости в данной среде  $c/n$  (условие излучения Вавилова-Черенкова не выполнено), и дает поле, экспоненциально убывающее по  $r$ , т.е. “эванесцентные” волны. Потенциал во второй строке в (50) соответствует случаю, когда скорость заряда превышает  $c/n$  (условие излучения Вавилова-Черенкова выполнено), и дает осциллирующее по  $r$  поле, т.е. распространяющиеся волны излучения Вавилова-Черенкова, уносящие энергию от источника [33].

### III. ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ДИСКА (ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТОКА)

Вычислим поле источника, Фурье-образ плотности заряда которого имеет вид токового цилиндра радиуса  $a$ :

$$\rho_{\omega}^d = \rho_{\omega}^0 e^{i\frac{\omega}{v}z} \theta(a - r), \quad (52)$$

где  $\rho_{\omega}^0$  – это некоторая амплитудная константа (будет определена позднее), а  $\theta(x)$  – функция Хевисайда. Отметим очевидный факт, что данный Фурье-образ плотности заряда соответствует источнику в виде равномерно заряженного бесконечно тонкого диска, движущегося перпендикулярно себе (Фурье-преобразование по времени “размазывает” точечный заряд в нить тока, а заряженный диск – в токовый цилиндр).

Пользуясь уравнением (8), получим уравнение для Фурье-образов:

$$\Delta \Phi_{\omega}^d + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \Phi_{\omega}^d = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_{\omega}^d \quad (53)$$

Воспользуемся методом Фурье и рассмотрим более подробно вычисления для правой части уравнения (52).

$$F_{\omega \vec{k}}^d = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint dx dy dz \left( -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_{\omega}^d \right) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = \quad (54)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \left( -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_{\omega}^0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iz(\frac{\omega}{v} - k_z)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r \theta(a - r) e^{-ik_r r \cos(\phi_k - \phi)} dr = \quad (55)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{4\pi}{\varepsilon} \right) \rho_{\omega}^0 \delta\left(\frac{\omega}{v} - k_z\right) \int_0^a r J_0(r k_r) dr. \quad (56)$$

Отдельно преобразуем интеграл из уравнения (56), при этом воспользуемся табличным интегралом  $\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x)$  (см. [34], стр. 39, № 21):

$$F_{\omega \vec{k}}^d = -\frac{2\rho_{\omega}^0 a}{\varepsilon k_r} \delta\left(\frac{\omega}{v} - k_z\right) J_1(a k_r). \quad (57)$$

Придём к уравнению

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) \Phi_{\omega \vec{k}}^d = F_{\omega \vec{k}}^d, \quad (58)$$

откуда

$$\Phi_{\omega \vec{k}}^d = \frac{2\rho_{\omega}^0 a^2}{\varepsilon} \frac{\delta\left(\frac{\omega}{v} - k_z\right) J_1(a k_r)}{a k_r \left[ k^2 - \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right]}. \quad (59)$$

Теперь выпишем  $\Phi_\omega^d$ , аналогично тому, как это делалось для случая нити (28):

$$\Phi_\omega^d = \frac{4\pi\rho_\omega^0 a^2}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{J_0(rk_r)J_1(ak_r)}{k_r^2 + \sigma^2} dk_r. \quad (60)$$

Обозначим

$$I = \int_0^\infty \frac{J_0(rk_r)J_1(ak_r)}{k_r^2 + \sigma^2} dk_r$$

и вычислим этот интеграл в области  $r > a$  (вне источника). Для этого можно воспользоваться табличным интегралом ([34], стр. 213, № 11), либо этот интеграл может быть вычислен с помощью теоремы о вычетах путем замыкания контура в верхней полуплоскости с соответствующим обходом полюсов, показанным на Рис. 2 и 3:

$$I = \frac{1}{\sigma} I_1(a\sigma) K_0(r\sigma) = i\pi \frac{J_1(as)}{s} H_0^{(1)}(rs), \quad (61)$$

где переход от модифицированных функций Бесселя к обычным осуществляется с помощью соотношения  $s = i\sigma$  (40), которое следует из определения этих величин.

Теперь определим амплитудную константу  $\rho_\omega^0$ . Для этого потребуем, чтобы полный ток, создаваемый плотностью тока точечного заряда (12), совпадал с полным током, создаваемым токовым цилиндром (52):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j_\omega dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j_\omega^d dx dy, \quad (62)$$

$$\frac{q}{2\pi} e^{i\frac{\omega}{v}z} = v\rho_\omega^0 e^{i\frac{\omega}{v}z} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty r\theta(a-r) dr, \quad (63)$$

$$\frac{q}{2\pi} = \pi v\rho_\omega^0 a^2 \Rightarrow \rho_\omega^0 = \frac{q}{2\pi a^2 v}, \quad (64)$$

где  $j_\omega = v\rho_\omega$ ,  $j_\omega^d = v\rho_\omega^d$ . Теперь, зная  $\rho_\omega^0$ , найдём выражение для  $\Phi_\omega^d$ :

$$\Phi_\omega^d = \frac{q}{2\pi a^2 v} \frac{4\pi a^2}{\varepsilon} \frac{i\pi}{2} \frac{J_1(as)}{s} H_0^{(1)}(rs) = \frac{iq}{\varepsilon v} e^{i\frac{\omega}{v}z} \frac{J_1(as)}{as} H_0^{(1)}(rs). \quad (65)$$

Естественно ввести множитель, который назовём форм-фактором (нижний индекс обозначает радиус цилиндра):

$$F_a = 2 \frac{J_1(as)}{as} = 2 \frac{I_1(a\sigma)}{a\sigma}. \quad (66)$$

Тогда из системы (45) получим:

$$\Phi_\omega^d = F_a \Phi_\omega. \quad (67)$$

Получили явную связь Фурье-образов для случая, когда источник является заряженной нитью (случай движущегося точечного заряда) и когда источник – это цилиндр, по которому бежит волна тока (случай движущегося заряженного сгустка). Аналогичная простая связь будет иметь место и между компонентами полей.

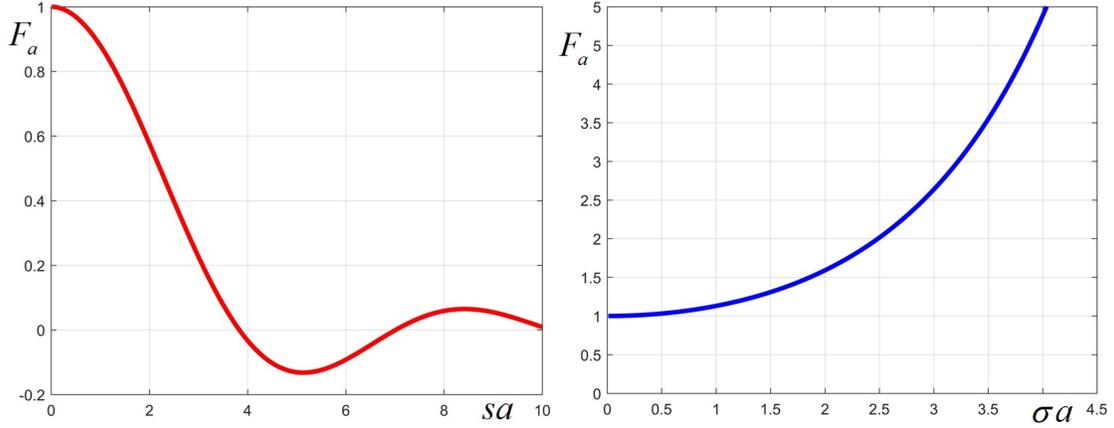


Рис. 4: Слева: зависимость форм-фактора  $F_a$  от  $sa$  при вещественном  $s$  (случай  $n^2\beta^2 > 1$ ). Справа: зависимость форм-фактора  $F_a$  от  $\sigma a$  при вещественном  $\sigma$  (случай  $n^2\beta^2 < 1$ ).

На Рис. 4 мы видим, что при вещественном  $s$  (случай б),  $n^2\beta^2 > 1$ ) форм-фактор равен 1 при  $sa = 0$ , далее осциллирует с убыванием и зануляется при значениях  $sa$ , равных нулям функции Бесселя  $J_1$  (поле источника в форме заряженного диска отсутствует при таких параметрах вследствие деструктивной интерференции). Также можно считать, что частотный спектр поля заряженного диска в этом случае ограничен сверху частотой, удовлетворяющей соотношению  $sa = j_{11} \approx 3.832$ , где  $j_{11}$  – первый нуль функции Бесселя  $J_1$ . При чисто мнимом  $s$  (или при вещественном  $\sigma$ , случай а),  $n^2\beta^2 < 1$ ) форм-фактор также равен 1 в нуле, однако дальше возрастает экспоненциально. Это связано с тем, что в данном случае складываются неосциллирующие “эванесцентные” волны, а амплитуды всех этих волн имеют один и тот же знак). Отметим также, что экспоненциальный рост  $F_a$  не приводит к физическому противоречию, т.к. потенциал поля точечного заряда сам по себе экспоненциально мал и убывает с ростом  $\sigma$  быстрее форм-фактора ( $\sim \exp(-\sigma r)$  против  $\sim \exp(-\sigma a)$ ,  $r > a$ ).

#### IV. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА В ОТКРЫТОМ ЛЕНТОЧНОМ ВОЛНОВОДЕ.

Рассмотрим задачу в которой равномерно заряженный диск радиуса  $a$  (Фурье-образ его плотности тока представляет собой токовый цилиндр радиуса  $a$ ) движется вдоль оси  $z$  внутри ленточного волновода (Рис. 5). На границе областей 1 и 2 располо-

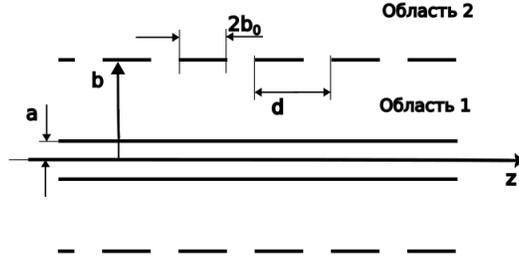


Рис. 5: Геометрия задачи о поле токового цилиндра радиуса  $a$ , расположенного на оси открытого ленточного волновода радиуса  $b$ .

жены идеально проводящие элементы шириной  $b_0$ , с периодичностью  $d$  на расстоянии  $b$  от оси. В исследовании применим эквивалентные граничные условия (ЭГУ), справедливые при выполнении следующих соотношений [31]:

$$d \ll \lambda \quad (kd \ll 1), \quad (68)$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число. Приведем здесь сначала общий вид ЭГУ для проводников произвольного поперечного сечения. Важно, что на соотношение между  $b_0$  (в случае произвольного поперечного сечения – это его размер в направлении  $z$ ) и  $d$  не накладывается никаких ограничений (это принципиально отличает ЭГУ от усредненных граничных условий, справедливых для тонкопроволочных сеток, см. [30]); мы будем считать, что  $b_0 \sim d$ . Отметим, что вообще ЭГУ выписываются для плоской решетки из проводников, однако “их можно считать приближенно выполненными и для неплоской периодической поверхности, при условии, что радиус искривления поверхности  $\rho$  много больше периода структуры” [31]. Применяя ЭГУ к цилиндрической поверхности волновода, мы будем считать данное условие на соотношение между  $\rho$  и  $d$  выполненным ( $\rho \gg d$ ). Также отметим, что приближение ЭГУ “приводит к вполне удовлетворительным результатам при  $d \approx 0.3\lambda$ ” [31], поэтому мы

можем использовать данное приближение вплоть до значений  $k \sim 2\pi/3/d \approx 2/d$  или вплоть до частот  $\omega \sim c/d$ .

Как было показано выше, электромагнитное поле рассматриваемого источника имеет только следующие ненулевые компоненты:  $E_{\omega r}$ ,  $E_{\omega z}$  и  $H_{\omega\phi}$ . Для такой поляризации (ТМ поляризации) ЭГУ, связывающие касательные компоненты магнитных и электрических полей при  $r = b$ , имеют следующий общий вид [31]:

$$H_{\omega\phi_2} - H_{\omega\phi_1} = \frac{-ikl_1}{1 - \frac{k^2 d^2}{\beta^2} \Delta_3} (E_{\omega z_2} + E_{\omega z_1}), \quad (69)$$

$$E_{\omega z_2} - E_{\omega z_1} = ik \left[ (H_{\omega\phi_2} + H_{\omega\phi_1}) l - \frac{il_2}{k} \frac{\partial}{\partial z} (E_{\omega r_2} + E_{\omega r_1}) \right]. \quad (70)$$

В уравнениях (69) и (70) величины  $l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  и  $\Delta_3$  – параметры, зависящие от геометрии задачи:  $l = \frac{S}{2d}$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения, а  $l_1$ ,  $l_2$  и  $\Delta_3$  в общем случае сложным образом выражаются через геометрические параметры. В частном случае лент имеем  $l = l_2 = 0$  ( $l = 0$  по причине нулевой площади поперечного сечения  $S$ , обращение в нуль  $l_2$  не так очевидно).

В дальнейшем мы будем интересоваться случаем близко расположенных элементов, когда коэффициент заполнения

$$g = \frac{2b_0}{d} \quad (71)$$

близок к единице, т.е.  $g \rightarrow 1$ . В этом случае справедлива асимптотика (независимо от вида поперечного сечения проводов):

$$\Delta_3 \approx \frac{l + l_2}{2\pi d} \ln(p - 1), \quad (72)$$

где параметр  $p$  в случае лент имеет вид

$$p = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi g}{2}\right)}, \quad (73)$$

т.е.  $p \rightarrow 1$  при  $g \rightarrow 1$ . Поскольку в рамках рассматриваемой нами задачи (ленточный волновод) параметры  $l$  и  $l_2$  обращаются в нуль, то  $\Delta_3 = 0$ . Тогда граничные условия (69), (70) упрощаются и принимают следующий вид:

$$H_{\omega\phi_2} - H_{\omega\phi_1} = -ikl_1 (E_{\omega z_2} + E_{\omega z_1}), \quad (74)$$

$$E_{\omega z_2} - E_{\omega z_1} = 0. \quad (75)$$

Скачок магнитного поля определяется параметром  $l_1$ , который для ленточного волновода определяется следующей формулой:

$$l_1 = \frac{\pi}{d} \ln [1/\cos(\pi q/2)]. \quad (76)$$

Перейдем к решению граничной задачи, изображенной на Рис. 5. Обозначим через  $\Phi_\omega^{(i)}$  потенциал поля равномерно движущегося заряженного диска в вакууме. Этот потенциал вычислен ранее, см. (45) и (67). Будем считать, что падающее поле, определяемое  $\Phi_\omega^{(i)}$ , задано в областях 1 и 2, т.е. всюду.

Далее, обозначим через  $\Phi_\omega^{(2)}$  и  $\Phi_\omega^{(1)}$  искомые потенциалы дополнительного поля в областях 2 и 1 соответственно: эти потенциалы возникают в результате действия решётки на поле заряженного диска, они удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \Phi_\omega^{(1,2)} + k^2 \Phi_\omega^{(1,2)} = 0. \quad (77)$$

Полные потенциалы имеют вид:

$$\begin{cases} \Phi_{\omega 1} = \Phi_\omega^{(i)} + \Phi_\omega^{(1)}, \\ \Phi_{\omega 2} = \Phi_\omega^{(i)} + \Phi_\omega^{(2)}. \end{cases} \quad (78)$$

Поскольку задача регулярна по  $z$ , все величины должны иметь одинаковую зависимость от  $z$ , т.е. такую же, как в падающем поле. Учтем этот факт, введя потенциалы с тильдой по формуле

$$\Phi_\omega^{(1,2)} = \tilde{\Phi}_\omega^{(1,2)} \exp\left(i \frac{\omega z}{v}\right).$$

Уравнение (77) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \sigma^2\right) \tilde{\Phi}_\omega^{(1,2)} = 0 \quad (79)$$

Поделим правую и левую части уравнения (79) на  $\sigma^2$  и обозначим  $\xi = \sigma r$ , тогда:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - 1\right) \tilde{\Phi}_\omega^{(1,2)} = 0. \quad (80)$$

Таким образом,  $\tilde{\Phi}_\omega^{(1,2)}$  удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя нулевого значка ([35], стр. 782), поэтому общее решение (80) имеет вид суммы  $I_0(\xi)$  и  $K_0(\xi)$  с произвольными константами. Далее, используем асимптотики модифицированной функций Бесселя и Макдональда 0-го значка при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$  ([35], стр. 783). В области

$r < a$  решение однородного уравнения Гельмгольца не должно иметь особенности на оси, этому условию удовлетворяет только функция  $I_0$ . В области  $r > a$  решение должно иметь физически правильную асимптотику на бесконечности (т.е. должна иметь вид уходящей по фазе волны или обладать экспоненциальным затуханием), этому условию удовлетворяет только функция  $K_0$ .

В итоге получим:

$$\Phi_\omega^{(1)} = AI_0(r\sigma)e^{i\frac{\omega z}{v}}, \quad r < a, \quad (81)$$

$$\Phi_\omega^{(2)} = BK_0(r\sigma)e^{i\frac{\omega z}{v}}, \quad r > a, \quad (82)$$

а также для полных потенциалов

$$\Phi_{\omega 1} = \left( \frac{q}{\pi v} K_0(\sigma r) F_a + AI_0(\sigma r) \right) e^{i\frac{\omega z}{v}}, \quad r < a, \quad (83)$$

$$\Phi_{\omega 2} = \left( \frac{q}{\pi v} K_0(\sigma r) F_a + BK_0(\sigma r) \right) e^{i\frac{\omega z}{v}}, \quad r > a. \quad (84)$$

Найдём коэффициенты  $A$  и  $B$  из граничных условий (75), (75). Для этого выпишем связь между полями и скалярным потенциалом:

$$\vec{E}_\omega = -\frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial z} \vec{e}_z + \frac{i\omega}{z} \beta \Phi_\omega \vec{e}_z \quad (85)$$

$$\vec{H}_\omega = -\beta \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_r \quad (86)$$

Перепишем уравнение (85), сосчитав производные:

$$\vec{E}_\omega = \left( -\frac{i\omega}{v} \Phi_\omega + \frac{i\omega}{c} \beta \Phi_\omega \right) \vec{e}_z - \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_r = \quad (87)$$

$$= \left( -\frac{i\omega}{v} + \frac{i\omega}{c} \beta \right) \Phi_\omega \vec{e}_z - \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_r = \quad (88)$$

$$= \frac{i\omega}{v} (\beta^2 - 1) \Phi_\omega \vec{e}_z - \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_r = \quad (89)$$

$$= -\frac{i\omega}{v} (1 - \beta^2) \Phi_\omega \vec{e}_z - \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_r = \quad (90)$$

$$= -\frac{iv}{\omega} \sigma^2 \Phi_\omega \vec{e}_z - \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial r} \vec{e}_r. \quad (91)$$

В первую очередь воспользуемся условием (75)  $E_{\omega z 2} = E_{\omega z 1}$ :

$$AI_0(b\sigma) = BK_0(b\sigma) \quad \Rightarrow \quad B = A \frac{I_0(b\sigma)}{K_0(b\sigma)}. \quad (92)$$

Далее, введём обозначение

$$\alpha = -ikl_1 \quad (93)$$

и перепишем с учетом него условие (74):

$$-\beta \left( \frac{\partial \Phi_{\omega_2}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{\omega_1}}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} = \alpha (E_{\omega_{z_2}} + E_{\omega_{z_1}}) \Big|_{r=b} \quad (94)$$

$$-\beta \left( B \frac{\partial K_0(r\sigma)}{\partial r} - A \frac{\partial I_0(r\sigma)}{\partial r} \right) e^{i\frac{\omega z}{v}} \Big|_{r=b} = -\frac{iv\alpha}{\omega} \sigma^2 \left[ \frac{2q}{\pi v} F_a K_0(r\sigma) + A I_0(r\sigma) + B K_0(r\sigma) \right] e^{i\frac{\omega z}{v}} \Big|_{r=b} \quad (95)$$

$$\beta \sigma [B K_1(b\sigma) + A I_1(b\sigma)] = -\frac{iv\alpha}{\omega} \sigma^2 \left[ \frac{2q}{\pi v} F_a K_0(b\sigma) + A I_0(b\sigma) + B K_0(b\sigma) \right] \quad (96)$$

$$\beta \sigma \left[ A \frac{I_0(b\sigma)}{K_0(b\sigma)} K_1(b\sigma) + A I_1(b\sigma) \right] = -\frac{iv\alpha}{\omega} \sigma^2 \left[ \frac{2q}{\pi v} F_a K_0(b\sigma) + A I_0(b\sigma) + A \frac{I_0(b\sigma)}{K_0(b\sigma)} K_0(b\sigma) \right]. \quad (97)$$

При переходе от уравнения (95) к (96) воспользовались тем, что  $\frac{\partial K_0(r\sigma)}{\partial r} = -\sigma K_1(r\sigma)$ ,  $\frac{\partial I_0(r\sigma)}{\partial r} = \sigma I_1(r\sigma)$ . Выразим из уравнения (97) коэффициент  $A$  (далее все функции  $I_\nu$ ,  $K_\nu$  подразумеваются в точке  $r = b$ , т.е. имеют аргумент  $b\sigma$ ):

$$\beta A \left[ \frac{I_0 K_1 + I_1 K_0}{K_0} \right] = \alpha \sigma \frac{q}{\omega} F_a H_0^{(1)}(bs) - 2i\alpha \sigma \frac{v}{\omega} A I_0, \quad (98)$$

$$A = \frac{\frac{q\sigma}{vk} \alpha F_a H_0^{(1)}(bs) K_0}{I_0 K_1 + I_1 K_0 + 2i\frac{\sigma\alpha}{k} I_0 K_0}, \quad (99)$$

Получим выражение для  $A$ :

$$A = \frac{2qb\sigma^2 \alpha}{iv\pi} \frac{F_a K_0^2}{k + 2ib\sigma^2 \alpha I_0 K_0}. \quad (100)$$

Аналогично получим и коэффициент  $B$ :

$$B = \frac{2qb\sigma^2 \alpha}{iv\pi} \frac{F_a I_0 K_0}{k + 2ib\sigma^2 \alpha I_0 K_0}. \quad (101)$$

Воспользуемся выражениями (87), (86), и выпишем Фурье гармоники компонент поля в области 1, при  $r < b$ :

$$E_{\omega_{r_1}} = \sigma \left( \frac{q}{\pi v} F_a K_1(r\sigma) - A I_1(r\sigma) \right) e^{i\frac{\omega z}{v}}, \quad (102)$$

$$E_{\omega_{z_1}} = \frac{-i\omega}{v} \sigma^2 \left( \frac{q}{\pi v} F_a K_0(r\sigma) + A I_0(r\sigma) \right) e^{i\frac{\omega z}{v}}, \quad (103)$$

$$H_{\omega_\phi} = \beta \sigma \left( \frac{q}{\pi v} F_a K_1(r\sigma) - A I_1(r\sigma) \right), \quad (104)$$

$$(105)$$

и в области 2, при  $r > b$ :

$$E_{\omega r_1} = -\sigma \left( \frac{q}{\pi v} F_a + B \right) K_1(r\sigma) e^{i\frac{\omega z}{v}}, \quad (106)$$

$$E_{\omega z_1} = \frac{-i\omega}{v} \sigma^2 \left( \frac{q}{\pi v} F_a + B \right) K_0(r\sigma) e^{i\frac{\omega z}{v}}, \quad (107)$$

$$H_{\omega \phi} = -\beta\sigma \left( \frac{q}{\pi v} F_a + B \right) K_1(r\sigma) e^{i\frac{\omega z}{v}}. \quad (108)$$

Из формул для  $A$  и  $B$  очевидно, что не существует таких частот, при которых знаменатель  $k + 2ib\sigma^2\alpha I_0 K_0$  обращался бы в нуль. Как известно, такие нули соответствовали бы т.н. “черенковским полюсам”, т.е. полюсам, вклады которых определяют излучение Вавилова-Черенкова [28]. Другими словами, излучение Вавилова-Черенкова в рассматриваемом ленточном волноводе не возбуждается.

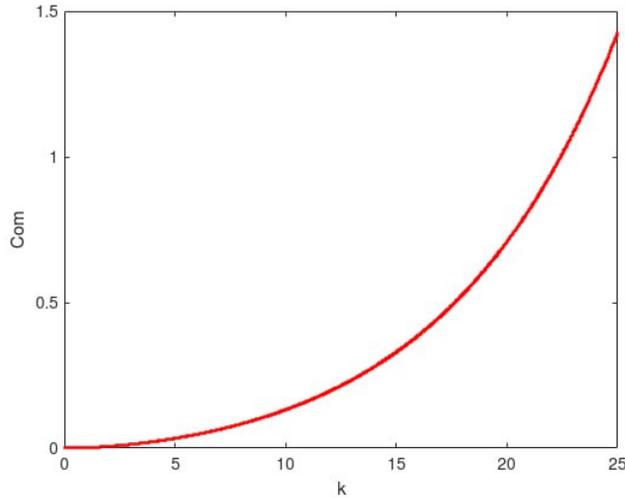


Рис. 6: Зависимость величины Com (109) от  $k$  ( $k \in (0, 1/d]$ ) при  $a = b/20$ ,  $b = 1\text{см}$  и следующих параметрах ленточного волновода:  $d = 4\text{см}$ ,  $b_0 = 1.94\text{см}$ ,  $g = 0.97$ ,  $p \approx 1$ ,  $l_1 = 0.65\text{см}^{-1}$ .

Исследуем влияние ленточного волновода на поле заряженного диска в области 2. Для этого На Рис. 6 представлена зависимость величины

$$\text{Com} = \left| \frac{B}{\frac{q}{\pi v} F_a} \right|, \quad (109)$$

которая, согласно (106), определяет отношение дополнительного поля в области 2 к падающему. Как видно, на низких частотах волновод практически не возмущает поля заряда, в то время как на частотах  $\sim c/d$  дополнительное поле даже превышает по модулю падающее.

**V. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ  
ЗАРЯЖЕННОГО ДИСКА В ОТКРЫТОМ ВОЛНОВОДЕ ИЗ КОЛЬЦЕВЫХ  
ПРОВОДНИКОВ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ**

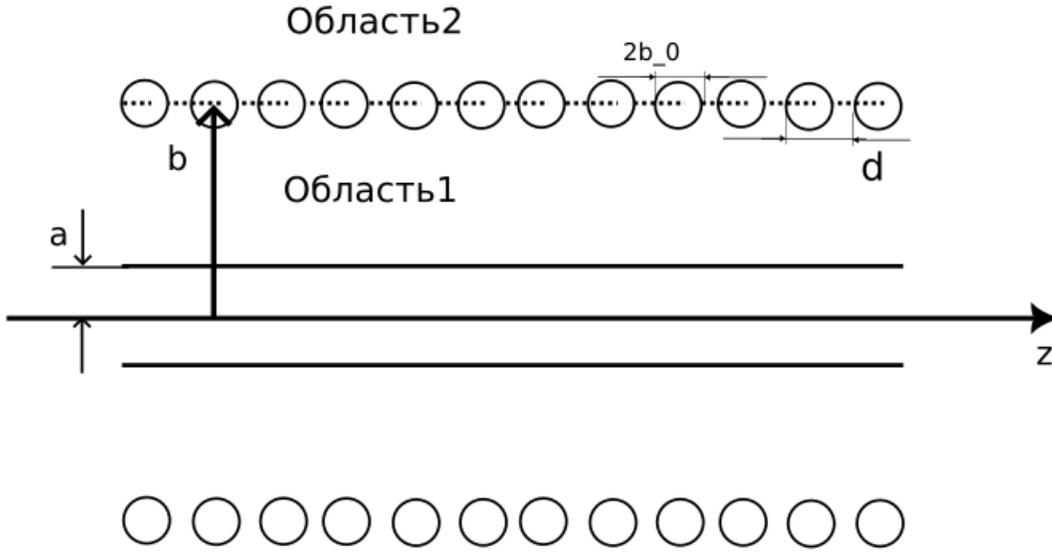


Рис. 7: Геометрия задачи о поле токового цилиндра радиуса  $a$ , расположенного на оси открытого волновода радиуса  $b$ , образованного кольцевыми проводниками круглого поперечного сечения диаметром  $b_0$ .

Как было выяснено, в случае ленточного волновода излучение Вавилова-Черенкова не возбуждается. Исследуем возможность его генерации в более сложной структуре из проводящих колец круглого сечения (Рис. 7). Данная структура описывается общим случаем ЭГУ (69), (70). Зависимость параметров  $l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  и  $\delta_3$  от  $g$  уа Рис. (8) [31], однако более удобно будет пользоваться расчетными формулами? приведенными ниже. Перепишем ЭГУ с учетом (86) и (87):

$$\beta\sigma \left[ A \frac{I_0(b\sigma)}{K_0(b\sigma)} K_1(b\sigma) + AI_1(b\sigma) \right] = -\frac{iv\alpha}{\omega} \sigma^2 \left[ \frac{iq}{v} F_a H_0^{(1)}(bs) + AI_0(b\sigma) + A \frac{I_0(b\sigma)}{K_0(b\sigma)} K_0(b\sigma) \right], \quad (110)$$

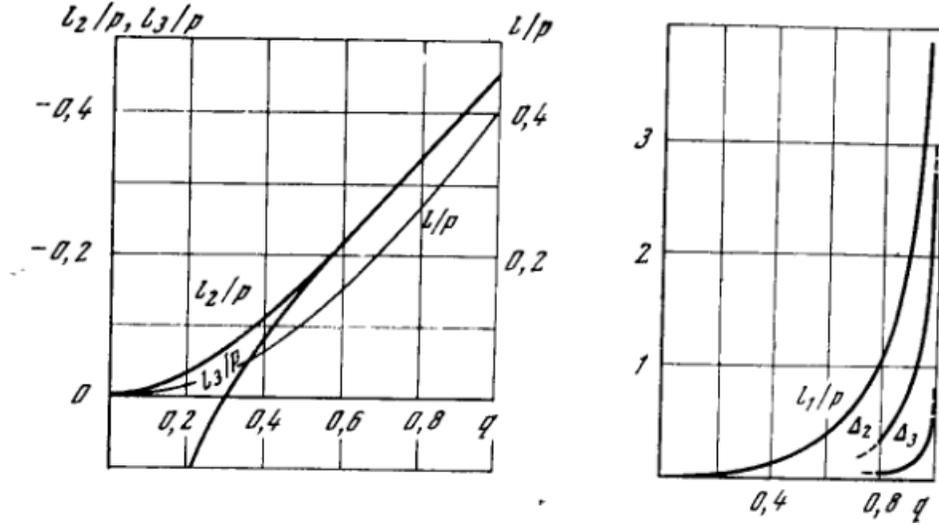


Рис. 8: Графики из [31], позволяющие оценить параметры ЭГУ для проводников круглого сечения  $l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $\Delta_3$ .

$$-\frac{iv\sigma^2}{\omega} (\Phi_{\omega_2} - \Phi_{\omega_1}) = ik \left[ -\beta l \left( \frac{\partial \Phi_{\omega_2}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_{\omega_1}}{\partial r} \right) + \frac{il_2}{k} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi_{\omega_2}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_{\omega_1}}{\partial r} \right) \right], \quad (111)$$

$$-\frac{iv\sigma^2}{\omega} (BK_0(b\sigma) - AI_0(b\sigma)) = ik \left( \beta l + \frac{l_2\omega}{kv} \right) \left( \frac{iq}{v} F_a H_1^{(1)}(bs) - A\sigma I_1(b\sigma) + B\sigma K_1(b\sigma) \right). \quad (112)$$

Введем коэффициенты дополнительного поля  $A$  и  $B$  так же, как и в случае ленточного волновода. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \beta\sigma \left[ A \frac{I_0(b\sigma)}{K_0(b\sigma)} K_1(b\sigma) + AI_1(b\sigma) \right] = -\frac{iv\alpha}{\omega} \sigma^2 \left[ \frac{iq}{v} F_a H_0^{(1)}(bs) + AI_0(b\sigma) + A \frac{I_0(b\sigma)}{K_0(b\sigma)} K_0(b\sigma) \right], \\ -\frac{iv\sigma^2}{\omega} (BK_0(b\sigma) - AI_0(b\sigma)) = ik \left( \beta l + \frac{l_2\omega}{kv} \right) \left( \frac{iq}{v} F_a H_1^{(1)}(bs) - A\sigma I_1(b\sigma) + B\sigma K_1(b\sigma) \right), \end{cases} \quad (113)$$

Решение системы (113) получено с помощью системы символьных вычислений Wolfram Mathematica:

$$A = \frac{qF_a \left[ \left( H_1^{(1)} \omega (klv\beta + l_2\omega) (iK_0v\alpha\sigma + K_1\beta\omega) - iH_0v\alpha\sigma^2 (K_0v^2\sigma + K_1\omega (klv\beta + l_2\omega)) \right) \right]}{v\sigma (f_1 + f_2)} \quad (114)$$

$$B = \frac{iqF_a \left[ \left( H_1^{(1)} \omega (klv\beta + l_2\omega) (I_0v\alpha\sigma - iI_1\beta\omega) + H_0v\alpha\sigma^2 (I_0v^2\sigma + I_1\omega (klv\beta + l_2\omega)) \right) \right]}{v\sigma (f_1 + f_2)}, \quad (115)$$

где

$$f_1 = I_1\omega (-2iK_1\beta\omega (klv\beta + l_2\omega) + K_0v\sigma (v\beta (-i + kl\alpha) + l_2\alpha\omega)) \quad (116)$$

$$f_2 = I_0v\sigma (2K_0v^2\alpha\sigma + K_1\omega (v\beta (-i + kl\alpha) + l_2\alpha\omega)) \quad (117)$$

или

$$f_1 = \frac{-iI_1\omega}{\beta^2 - k^2d^2\Delta_3} [2K_1\beta\omega (klv\beta + l_2\omega) (\beta^2 - k^2d^2\Delta_3)] \quad (118)$$

$$- \frac{iI_1\omega}{\beta^2 - k^2d^2\Delta_3} [K_0\omega\sqrt{1 - \beta^2} (\beta^2c (\beta^2 - k^2d^2\Delta_3) + \beta^2ck^2l_1 (l\beta^2 + l_2))] \quad (119)$$

$$f_2 = \frac{-iI_0v\sigma}{\beta^2 - k^2d^2\Delta_3} [2K_0v^2\sigma kl_1\beta^2 + K_1\omega (\beta c^2 (\beta^2 - k^2d^2\Delta_3) + \beta^2k^2cl_1 (l\beta^2 + l_2))] \quad (120)$$

Введём обозначения  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ :

$$\tilde{f}_1 = I_1\omega [2K_1\beta\omega (klv\beta + l_2\omega) (\beta^2 - k^2d^2\Delta_3)] \quad (121)$$

$$+ I_1\omega [K_0\omega\sqrt{1 - \beta^2} (\beta^2c (\beta^2 - k^2d^2\Delta_3) + \beta^2ck^2l_1 (l\beta^2 + l_2))] \quad (122)$$

$$\tilde{f}_2 = I_0v\sigma [2K_0v^2\sigma kl_1\beta^2 + K_1\omega (\beta c^2 (\beta^2 - k^2d^2\Delta_3) + \beta^2k^2cl_1 (l\beta^2 + l_2))] \quad (123)$$

Если

$$\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 = 0,$$

на некоторой частоте, то выражения для  $A$  и  $B$  имеют полюс, физический смысл которого заключается в генерации излучения Вавилова-Черенкова. Исследуем этот вопрос.

Выпишем явно параметры  $l, l_1, l_2, \Delta_3$  для данного случая (см. [31]):

$$l = \frac{\pi b_0^2}{2d}, \quad (124)$$

$$l_1 = mh \frac{g^2d}{4}, \quad (125)$$

$$l_2 = l_1 - \frac{d}{\pi} \ln(\text{sh}(\varrho)), \quad (126)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{2\pi d} (l_1 + l_2) \ln(p - 1), \quad (127)$$

где  $h, m, \varrho$  найдём из следующих уравнений, верных в случае  $g \rightarrow 1$ :

$$\frac{\text{sh}^2(\frac{\pi g}{2}) + \sin^2(\frac{\pi gh}{2})}{\sin \pi gh} \ln \frac{\sin(\frac{\pi g}{2}(1+h))}{\sin(\frac{\pi g}{2}(1-h))} = \frac{\pi g}{2}, \quad (128)$$

$$\varrho = \frac{\pi g}{2} \left[ 1 + \frac{m}{\pi} \text{arctg} \left( \text{tg} \frac{\pi gh}{2} \text{ctg} \frac{\pi g}{2} \right) \right], \quad (129)$$

$$m = \frac{2\pi}{\ln \frac{\sin(\frac{\pi g}{2}(1+h))}{\sin(\frac{\pi g}{2}(1-h))}}. \quad (130)$$

Решение трансцендентного уравнения (128) (из него находится  $h$  при заданном  $g$ ) будем искать на промежутке  $[0, 1]$ , т.к.  $g \in [0, 1]$ . На Рис. 9 показана левая (синяя линия) и правая (красная прямая) части уравнения (128), решение  $h = h_0$  находится на их пересечении. Выражения для параметров, входящих в ЭГУ, имеют следующий вид

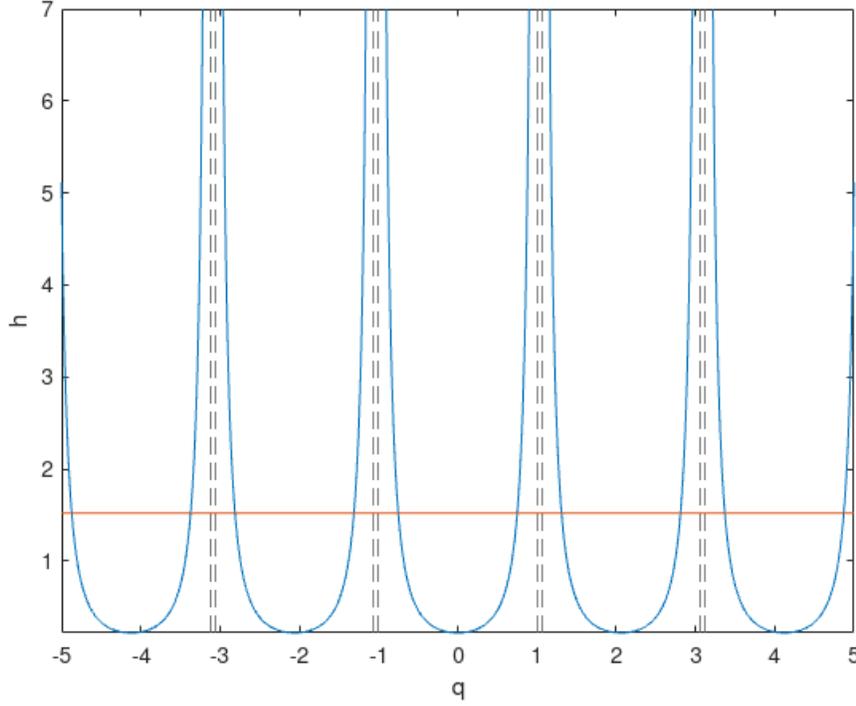


Рис. 9: Зависимость левой (синяя линия) и правой (красная прямая) частей уравнения (128) от  $g$ , решение  $h = h_0$  имеется при  $q = 0.9706$ .

(считается, что  $g \rightarrow 1$ ):

$$\varrho = \operatorname{arcch} \left( \exp \pi \left( \frac{mg^2 h_0}{4} + 0.4 \right) \right) \quad (131)$$

$$p = 1 + 4e^{-2\varrho}, \quad (132)$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{2\pi d} (l + l_2) (\ln(4) - 2\varrho). \quad (133)$$

Построим зависимость  $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$  от  $k$  (Рис. 10) и убедимся, что их сумма действительно обращается в ноль на некоторой частоте  $\omega_0$ :

Таким образом показано, что в рассматриваемом случае имеет место генерация излучения Вавилова-Черенкова на частотах, которые допускают применение ЭГУ.

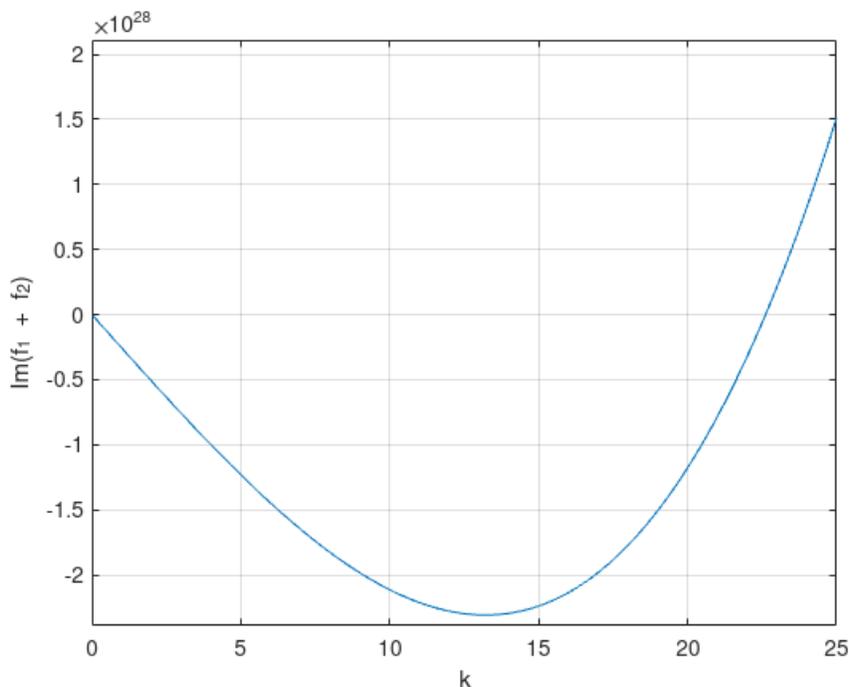


Рис. 10: Зависимость  $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$  от  $k$  при тех же параметрах, что и на Рис. 6,  $g = 0.97$ ,  $h = 0.747$ ,  $m = 30.7$ ,  $\varrho = 53.1$ ,  $l = 0.0148\text{см}$ ,  $l_2 = -0.0168\text{см}$ .

## VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части данной квалификационной работы было исследовано электромагнитное поле равномерно заряженного диска, равномерно движущегося ортогонально себе в изотропной среде. В частотной области (т.е. для Фурье-гармоник по времени) этот источник представляется в виде “токового цилиндра” – цилиндрической области, вдоль которой бежит волна тока с постоянным распределением плотности тока по сечению и со скоростью, равной скорости диска. Были получены выражения для фурье-гармоник компонент поля вне токового цилиндра и показано, что они связаны с соответствующими Фурье-компонентами поля точечного заряда множителем, который обычно называют форм-фактором. При выполнении условия излучения Вавилова-Черенкова (ИВЧ) форм-фактор имеет осциллирующее и убывающее поведение, что связано с интерференцией распространяющихся по поперечной координате волн ИВЧ, порожденных различными частями токового цилиндра. Когда условие ИВЧ в среде не выполнено, форм-фактор монотонно возрастает.

Во второй части работы было исследовано электромагнитное поле того же источника (равномерно заряженного диска), движущегося в открытом волноводе, образованном кольцами из проводящих лент. Предполагалось, что период, с которым расположены ленты, мал по сравнению с рассматриваемыми длинами волн, что позволило описывать поверхность такого волновода с помощью эквивалентных граничных условий (ЭГУ) Вайнштейна-Сивова. Основное внимание уделялось случаю близкого расположения колец друг к другу. В ходе решения было показано, что движущийся сгусток не возбуждает ИВЧ в такой структуре. Однако было показано, что структура оказывает все более существенное влияние на “вакуумное” поле сгустка при увеличении частоты и особенно при ее стремлении к пределу применимости ЭГУ (эта частота по порядку величины равна отношению скорости света к периоду структуры)

В третьей части работы была рассмотрена аналогичная задача, но для случая кольцевых проводников круглого сечения. Было показано, что в этом случае сгусток возбуждает ИВЧ, т.к. соответствующие выражения для Фурье-гармоник поля имеют особенность в виде “черенковского полюса”.

- 
- [1] P. A. Čerenkov, Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light, *Phys. Rev.* **52**, 378 (1937).
- [2] I. E. Tamm and I. M. Frank, Coherent radiation of fast electron in medium, *Compt. Rend. Acad. Sci. URSS* **14**, 109 (1937).
- [3] B. M. Bolotovskii, Theory of the vavilov-cherenkov effect, *Physics-Uspekhi* **62**, 201 (1957).
- [4] B. M. Bolotovskii, Theory of cherenkov radiation (iii), *Soviet Physics Uspekhi* **4**, 781 (1962).
- [5] J. V. Jelley, *Čerenkov Radiation and its Applications* (Pergamon, 1958).
- [6] V. P. Zrelov, *Vavilov-Cherenkov Radiation in High-Energy Physics* (Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1970).
- [7] B. D. O’Shea, G. Andonian, S. Barber, K. Fitzmorris, S. Hakimi, J. Harrison, P. D. Hoang, M. J. Hogan, B. Naranjo, O. B. Williams, V. Yakimenko, and J. Rosenzweig, Observation of acceleration and deceleration in giga-electron-volt-per-metre gradient dielectric wakefield accelerators, *Nature Communications* **7**, 12763 (2016).
- [8] A. P. Potylitsyn, S. Y. Gogolev, D. V. Karlovets, G. A. Naumenko, Y. A. Popov, M. V. Shevelev, and L. G. Sukhikh, Coherent cherenkov radiation from a short bunch passing near a target and possibility of a bunch length diagnostics, in *Proceedings of IPAC’10* (2010) pp. 1074–1076.
- [9] A. P. Potylitsyn, Y. A. Popov, L. G. Sukhikh, G. A. Naumenko, and M. V. Shevelev, Investigation of coherent Čerenkov radiation generated by 6.1 mev electron beam passing near the dielectric target, *J. Phys.: Conf. Ser.* **236**, 012025 (2010).
- [10] R. Kieffer, L. Bartnik, M. Bergamaschi, V. V. Bleko, M. Billing, L. Bobb, J. Conway, M. Forster, P. Karataev, A. S. Konkov, R. O. Jones, T. Lefevre, J. S. Markova, S. Mazzoni, Y. Padilla Fuentes, A. P. Potylitsyn, J. Shanks, and S. Wang, Direct observation of incoherent cherenkov diffraction radiation in the visible range, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 054802 (2018).
- [11] A. Curcio, M. Bergamaschi, R. Corsini, W. Farabolini, D. Gamba, L. Garolfi, R. Kieffer, T. Lefevre, S. Mazzoni, K. Fedorov, J. Gardelle, A. Gilardi, P. Karataev, K. Lekomtsev, T. Pacey, Y. Saveliev, A. Potylitsyn, and E. Senes, Noninvasive bunch length measurements exploiting cherenkov diffraction radiation, *Phys. Rev. Accel. Beams* **23**, 022802 (2020).
- [12] E. S. Belonogaya, A. V. Tyukhtin, and S. N. Galyamin, Approximate method for calculating

- the radiation from a moving charge in the presence of a complex object, *Phys. Rev. E* **87**, 043201 (2013).
- [13] A. V. Tyukhtin, S. N. Galyamin, and V. V. Vorobev, Peculiarities of cherenkov radiation from a charge moving through a dielectric cone, *Phys. Rev. A* **99**, 023810 (2019).
- [14] A. V. Tyukhtin, V. V. Vorobev, S. N. Galyamin, and E. S. Belonogaya, Radiation of a charge moving along the boundary of dielectric prism, *Phys. Rev. Accel. Beams* **22**, 012802 (2019).
- [15] A. V. Tyukhtin, S. N. Galyamin, V. V. Vorobev, and A. A. Grigoreva, Cherenkov radiation of a charge flying through the inverted conical target, *Phys. Rev. A* **102**, 053514 (2020).
- [16] A. V. Tyukhtin, S. N. Galyamin, V. V. Vorobev, and A. A. Grigoreva, Cherenkov radiation of a charge flying through the inverted conical target, *Phys. Rev. A* **102**, 053514 (2020).
- [17] A. V. Tyukhtin, E. S. Belonogaya, S. N. Galyamin, and V. V. Vorobev, Radiation of charge moving through a dielectric spherical target: ray optics and aperture methods, *Journal of Instrumentation* **15** (5), C05043.
- [18] W. Rotman, Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media, *IRE Transactions on Antennas and Propagation* **10**, 82 (1962).
- [19] V. V. Vorobev and A. V. Tyukhtin, Nondivergent cherenkov radiation in a wire metamaterial, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 184801 (2012).
- [20] A. V. Tyukhtin and V. V. Vorobev, Cherenkov radiation in a metamaterial comprised of coated wires, *J. Opt. Soc. Am. B* **30**, 1524 (2013).
- [21] A. V. Tyukhtin and V. V. Vorobev, Radiation of charges moving along the boundary of a wire metamaterial, *Phys. Rev. E* **89**, 013202 (2014).
- [22] T. Koschny, M. Kafesaki, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis, Effective medium theory of left-handed materials, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 107402 (2004).
- [23] S. N. Galyamin, A. V. Tyukhtin, A. Kanareykin, and P. Schoessow, Reversed cherenkov-transition radiation by a charge crossing a left-handed medium boundary, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 194802 (2009).
- [24] S. N. Galyamin and A. V. Tyukhtin, Electromagnetic field of a moving charge in the presence of a left-handed medium, *Phys. Rev. B* **81**, 235134 (2010).
- [25] A. V. Tyukhtin, V. V. Vorobev, and S. N. Galyamin, Radiation excited by a charged-particle bunch on a planar periodic wire structure, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **17**, 122802 (2014).
- [26] V. V. Vorobev, A. V. Tyukhtin, and S. N. Galyamin, Surface waves generated by charged

- particle bunch moving along the edge of semi-infinite planar wire grid, *Radiation Physics and Chemistry* **133**, 91 (2017).
- [27] Э. Г. Доильницына and А. В. Тюхтин, ОСОБЕННОСТИ СЕЛЕКТИВНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ ВОЛНОВОДНЫХ МОД СИСТЕМОЙ ДВУХ СЕТОК С КВАДРАТНЫМИ ЯЧЕЙКАМИ, *Радиотехника и электроника* **54**, 1232 (2009).
- [28] А. Туухтин, Method of particle energy determination based on measurement of waveguide mode frequencies, *Journal of Physics: Conference Series* **357**, 012003 (2012).
- [29] А. В. Туухтин and Е. Г. Доилнитсина, Effective permittivity of a metamaterial from coated wires, *Journal of Physics D: Applied Physics* **44**, 265401 (2011).
- [30] М. И. Конторович, М. И. Астрахан, В. П. Акимов, and Г. А. Ферсман, *Электродинамика сетчатых структур* (Радио и связь, М., 1987).
- [31] Е. И. Нефедов and А. Н. Сивов, *Электродинамика периодических структур* (Наука, М., 1977).
- [32] А. В. Туухтин, V. V. Vorobev, Е. R. Akhmatova, and S. Antipov, Radiation of charged particle bunches in corrugated waveguides with small period, *Journal of Instrumentation* **13** (4), C04009.
- [33] А. В. Тюхтин, *Излучение Вавилова-Черенкова в изотропной среде* (Соло, СПб, 2019).
- [34] А. Р. Prudnikov, Y. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integrals and Series*, Vol. 2, Special functions (Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 1986).
- [35] Г. Корн and Т. Корн, *Справочник по математике* (Наука, М., 1974).