

Санкт-Петербургский государственный университет

Айсин Арман Мухамедянович

Выпускная квалификационная работа

Учет продольных корреляций флуктуаций среды при исследовании  
статистических моментов распространяющегося волнового поля

Уровень образования: бакалавриат

Направление 03.03.03 «Радиофизика»

Основная образовательная программа СВ.5113.

«Электромагнитные и акустические процессы»

Научный руководитель:  
Доцент кафедры радиофизики  
СПбГУ,  
к. ф.-м. н. В. Э. Герм

Рецензент:  
Доцент кафедры высшей  
математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,  
к. ф.-м. н. А. А. Битюков

Санкт-Петербург  
2023

## Содержание

Содержание.....	2
1. Введение.....	3
2. Постановка и методы решения задачи.....	4
2.1. Физическая постановка задачи.....	4
2.2. Параболическое уравнение для комплексной амплитуды распространяющегося поля.....	5
2.3. Марковское приближение для статистических моментов случайного поля .6	
2.4. Метод множественных фазовых экранов.....	8
2.5. Генерация флуктуаций для двух методов.....	11
2.6. Вычисление статистических моментов флуктуаций поля.....	14
3. Результаты моделирования и их обсуждение.....	18
4. Заключение.....	26
Список литературы.....	28

## 1. Введение

Задача распространения электромагнитных волн в ионосфере – одна из важнейших задач теории распространения радиоволн. Сложностью данной задачи является случайные изменения параметров ионосферы. Одним из методов решения является нахождение статистических моментов распространяющегося поля.

Ионосфера представляет собой слабо ионизированный слой атмосферы, одной из главных характеристик которой является электронная концентрация. Ее значения влияют на показатель преломления среды, что в свою очередь напрямую отражается на полученном решении. Как уже отмечалось, особенность электронной концентрации состоит в том, что она имеет как детерминированную, так и стохастическую составляющие, из-за чего мы и считаем нашу среду также стохастической, т. е. флуктуирующей.

Исследованию статистических характеристик распространяющегося поля посвящено много работ (например [1], [2], [3], [4]). В основном, они предполагают малый радиус корреляции показателя преломления в направлении распространения волны. Использование таких предположений соответствует случаю марковского приближения. В [5], [6] произведен учет конечных значений продольного радиуса корреляции флуктуаций показателя преломления в рамках решения интегральных уравнений для нелокального марковского приближения для среднего поля и двухпозиционной одночастотной функции когерентности.

В данной работе задача о распространении волн в случайных средах рассматривается для случая конечных значений продольного радиуса корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости. Рассмотрение такой задачи будет проведено в терминах метода множественных фазовых экранов, специально расширенного для более реалистичного случая конечных значений продольного масштаба корреляций среды. Затем будет проведено сравнение результатов, полученных с помощью марковского приближения и классического и расширенного метода множественных фазовых экранов.

## 2. Постановка и методы решения задачи

### 2.1. Физическая постановка задачи

Рассматриваемая задача ставится следующим образом: монохроматическая плоская волна с единичной амплитудой распространяется вертикально перпендикулярно границе раздела из вакуума в полупространство, содержащее статистически однородные флуктуации электронной плотности. Флуктуации электронной плотности являются

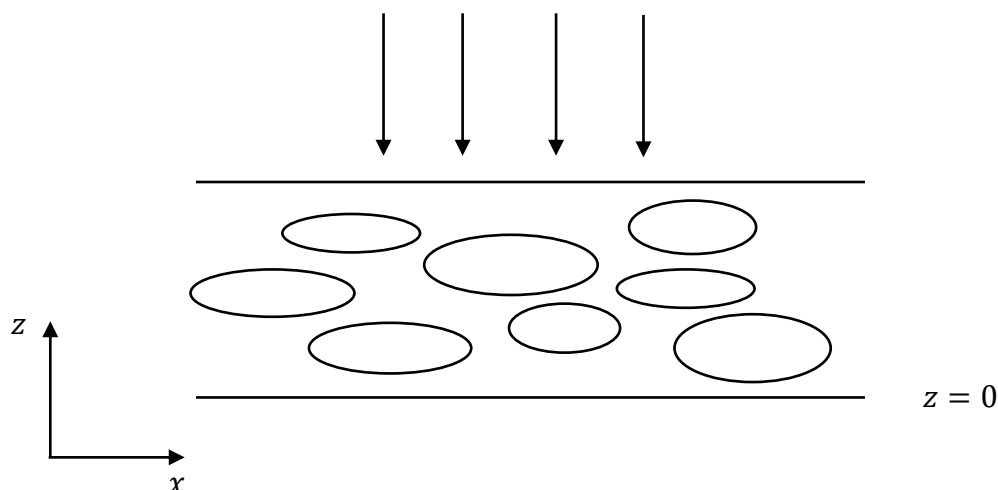


Рис. 1. Геометрия задачи. Плоская монохроматическая волна падает на ионосферный слой с флуктуациями.

стохастическим гауссовским полем и могут быть охарактеризованы автокорреляционной функцией, или ее спектром.

Будем считать ионосферные неоднородности сильно вытянутыми в направлении магнитного поля Земли. Это позволяет рассматривать двумерную задачу распространения вместо полного трехмерного случая [1], [2]. Такая постановка задачи оправдана, например, в области вокруг геомагнитного экватора, где магнитное поле направлено горизонтально, и поэтому при вертикальном распространении задачу можно рассматривать в двумерной постановке.

В данной работе будет рассматриваться случай однородной ионосферы с изотропными и анизотропными неоднородностями электронной концентрации. Изучение однородного слоя обусловлено тем, что эффекты, связанные с учетом продольного радиуса корреляции показателя преломления, проявляются на небольшом, относительно всей толщины ионосферы, участке при входе в полупространство, имеющие флуктуации относительной электронной плотности [5], [6].

Целью работы является построение обобщенного метода дробных шагов, позволяющего учесть продольные корреляции флуктуаций показателя преломления, на

основе уже имеющихся метод моделирования и сравнение статистических характеристик поля, полученных тремя различными методами: классическим – стандартная техника дробных шагов; приближенным – в условиях диффузионного марковского приближения; и обобщенным – полученным с помощью расширенного метода множественных фазовых экранов, учитывающего продольные корреляции показателя преломления.

## 2.2. Параболическое уравнение для комплексной амплитуды распространяющегося поля

Как нам уже известно, волна при распространении в среде может испытывать многократное рассеяние на ионосферных неоднородностях. Нас интересует случай, когда характерный масштаб неоднородностей электронной концентрации превосходит длину волны на несколько порядков ( $kl_\epsilon \gg 1$ ), т. е. рассеяние происходит преимущественно вперед. Использование таких ограничений позволяет упростить рассматриваемое уравнение Гельмгольца, преобразовав его в параболическое уравнение для комплексной амплитуды, как показано в [7].

Пусть  $u$  – комплексная амплитуда монохроматической компоненты распространяющегося поля,  $\bar{\epsilon}$  – диэлектрическая проницаемость фоновой среды,  $\tilde{\epsilon}(\vec{r}) = \frac{\epsilon(\vec{r}) - \bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}}$  – относительная величина флуктуаций диэлектрической проницаемости,  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon}$  – квадрат среднего волнового числа. Так как в поставленной задаче рассматривается случай однородной среды, то фоновая диэлектрическая проницаемость для плазмы без внешнего магнитного поля является величиной постоянной и принимает вид [8]  $\bar{\epsilon} = 1 - \frac{f_{pl}^2}{f^2}$ , где  $f_{pl}$  – плазменная частота в фоновой среде,  $f$  – частота падающего поля. Используя введенные обозначения, мы можем записать уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2[1 + \tilde{\epsilon}(\vec{r})]u = 0 \quad (1)$$

Представим искомое поле в виде

$$u(\vec{r}) = v(\vec{r}) \exp(ikz) \quad (2)$$

Где  $i$  – мнимая единица,  $v(\vec{r})$  – функция, являющаяся комплексной амплитудой плоской волны, учитывающая наличие флуктуаций. Тогда подставив (2) в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial^2 v(\vec{r})}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial v(\vec{r})}{\partial z} + \Delta_\perp v(\vec{r}) + k^2 \tilde{\epsilon}(\vec{r}) v(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

Здесь  $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  оператор Лапласа в поперечном направлении задачи. Необходимо оценить первую и вторую производную по координате  $z$ . Для случая крупномасштабных неоднородностей ( $kl_\epsilon \gg 1$ ) можно показать, что обратное рассеяние имеет малый вклад, так как большая часть рассеянной энергии сосредотачивается в узком телесном угле,

создаваемым данными неоднородностями. С учетом всех условий можем записать оценку производных по  $z$

$$\frac{\partial^2 v(\vec{r})}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial v(\vec{r})}{\partial z} \sim 2ik \frac{\partial v(\vec{r})}{\partial z} \left(1 + \frac{1}{2ikl_\epsilon}\right) \quad (4)$$

Так как рассматривается случай, когда  $kl_\epsilon \gg 1$ , то второй член в скобках в соотношении (4) стремится к нулю, значит им можно пренебречь. Тогда исходное уравнение Гельмгольца (1) примет вид

$$2ik \frac{\partial v(\vec{r})}{\partial z} + \Delta_\perp v(\vec{r}) + k^2 \tilde{\epsilon}(\vec{r}) v(\vec{r}) = 0 \quad (5)$$

Как упоминалось выше, в данной работе рассматривается двумерная задача, т. е. предполагается, что зависимости от координаты  $y$  нет. Это предположение может быть связано с сильно вытянутыми неоднородностями вдоль оси  $OY$ . В результате получаем параболическое уравнение для комплексной амплитуды  $v(x, z)$

$$2ik \frac{\partial v(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, z) + k^2 \tilde{\epsilon}(x, z) v(x, z) = 0 \quad (6)$$

### 2.3. Марковское приближение для статистических моментов случайного поля

Одним из основных подходов к решению задачи является построение и решение марковских уравнений для статистических моментов распространяющейся волны. В данной работе с помощью марковского приближения будут рассмотрены моменты, имеющие аналитическое решение такие как среднее поле и одночастотная двухпозиционная функция когерентности.

Как было описано в [7] марковское приближение соответствует случаю дельта-коррелированных флуктуаций показателя преломления вдоль направления распространения волны. Стоит заметить, что уравнение (6) можно переписать в виде

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} \left[ \exp\left(-\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right) v(x, z) \right] = - \exp\left(-\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, z) \quad (7)$$

Проинтегрировав уравнение (7) от 0 до  $z$  и умножив его на  $\exp\left(\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right)$  получим

$$\begin{aligned} 2ikv(x, z) - 2ik \exp\left(\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right) v(x, 0) = \\ = - \int_0^z dz' \exp\left(\frac{ik}{2} \int_{z'}^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, z') \end{aligned} \quad (8)$$

Перед усреднением полученного уравнения стоит обратить внимание на выражение в правой части. Искомое поле  $v(x, z')$  зависит от  $z' \leq z$ , а в поставленной задаче с крупномасштабными неоднородностями ( $kl_\epsilon \gg 1$ ) рассеяние назад пренебрежимо мало,

следовательно поле функционально зависит лишь от предыдущих значений  $\tilde{\epsilon}(x, q')$ . В то же время в экспоненте аргумент лежит в пределах  $z' \leq q \leq z$ , что с учетом дельта-коррелированности относительных флуктуаций диэлектрической проницаемости позволяет сделать вывод, что обе функции в правой части являются независимыми. Тогда уравнение для среднего поля примет вид

$$\begin{aligned} 2ik\bar{v} - 2ik \left\langle \exp\left(\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right) \right\rangle v_0 = \\ = - \int_0^z dz' \left\langle \exp\left(\frac{ik}{2} \int_{z'}^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right) \right\rangle \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{v}(x, z') \end{aligned} \quad (9)$$

Где  $\bar{v}$  – среднее поле,  $\langle \cdot \rangle$  – оператор усреднения,  $v_0 = v(x, 0)$  – детерминированное поле в начале неоднородного слоя. Чтобы найти среднее от данной величины  $\left\langle \exp\left(\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right) \right\rangle$ , необходимо вспомнить формулу  $\langle \exp(ia) \rangle = \exp\left(\frac{\overline{a^2}}{2}\right)$  полученную в предположении гауссова поведения функции  $a$  и равенству нулю его среднего значения. Это верно если  $\tilde{\epsilon}$  имеет гауссово поведение и нулевое среднее значение. Тогда получаем

$$\left\langle \exp\left(\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{\epsilon}(x, q) dq\right) \right\rangle = \exp\left(-\frac{k^2}{8} A_0(z - z')\right) \quad (10)$$

Где  $A_0$  поперечная функция корреляции  $\tilde{\epsilon}$  в точке 0, определяющаяся по формуле

$$A_0 = A(x)|_{x=0} = \left(\int \Psi_\epsilon(x, z) dz\right)|_{x=0} \quad (11)$$

Здесь  $\Psi_\epsilon(x, z) = \langle \tilde{\epsilon}(x + x', z + z') \tilde{\epsilon}(x', z') \rangle$  функция корреляции флуктуаций относительной диэлектрической проницаемости. Теперь, умножая уравнение (9) на  $\exp\left(\frac{k^2}{8} A_0 z\right)$  и дифференцируя его по  $z$ , можно получить

$$2ik \exp\left(\frac{k^2 A_0}{8} z\right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + 2ik \frac{k^2 A_0}{8} \exp\left(\frac{k^2 A_0}{8} z\right) \bar{v} = -\exp\left(\frac{k^2 A_0}{8} z\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{v} \quad (12)$$

После сокращения на  $\exp\left(\frac{k^2 A_0}{8} z\right)$  можно получить искомое марковское уравнение для среднего поля

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{k^2 A_0}{8} \bar{v} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{v} = 0 \quad (13)$$

Для получения подобного уравнения для функции когерентности 2-го порядка, определяемой следующим образом

$$\Gamma(x', x'', z) = \langle v(x', z) v^*(x'', z) \rangle \quad (14)$$

Необходимо записать параболическое уравнение для  $v^*$ . Оно примет вид

$$2ik \frac{\partial v^*(x'', z)}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x''^2} v^*(x'', z) - k^2 \tilde{\epsilon}(x'', z) v^*(x'', z) = 0 \quad (15)$$

Теперь умножив уравнение (6) на  $v^*$  и уравнение (15) на  $v$  можно записать уравнение для функции  $v^*(x'', z) v(x', z) = \gamma(x', x'', z)$

$$2ik \frac{\partial \gamma(x', x'', z)}{\partial z} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x''^2} \right) \gamma(x', x'', z) + k^2 \mu(x', x'', z) \gamma(x', x'', z) = 0 \quad (16)$$

Здесь  $\mu(x', x'', z) = \tilde{\epsilon}(x', z) - \tilde{\epsilon}(x'', z)$ . Легко заметить, что уравнение (16) соответствует уравнению (6) при замене  $v \rightarrow \gamma, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x''^2} \right), \tilde{\epsilon} \rightarrow \mu$ . Следовательно, если сделать преобразования аналогичные формулам (7) – (12), можно получить уравнение для функции когерентности 2-го порядка

$$\frac{\partial \Gamma(x', x'', z)}{\partial z} + \frac{\pi k^2}{4} H(x' - x'') \Gamma(x', x'', z) - \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x''^2} \right) \Gamma(x', x'', z) = 0 \quad (17)$$

Здесь  $H(x' - x'')$  определяются по формулам

$$H(x' - x'') = \frac{1}{\pi} [A_0 - A(x' - x'')] \quad (18)$$

Как видно, коэффициенты уравнения (17) зависят от разности поперечных координат.

Вследствие этого введем две новые переменные  $X = \frac{x' + x''}{2}$  и  $x = x' - x''$ . Тогда уравнение (17) примет вид

$$\frac{\partial \Gamma(X, x, z)}{\partial z} + \frac{\pi k^2}{4} H(x) \Gamma(X, x, z) - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 \Gamma(X, x, z)}{\partial x' \partial x''} = 0 \quad (19)$$

Решения уравнения (13) для среднего поля и уравнения (19) для двухпозиционной функции когерентности также приведены в [7]. Запишем его сразу с учетом нашей постановки задачи о том, что вертикально на границу раздела падает плоская монохроматическая волна с единичной амплитудой, тогда решение примет вид

$$\bar{v}(z) = \exp\left(-\frac{k^2 A_0}{8} z\right) \quad (20)$$

$$\Gamma(X, x, z) = \Gamma(x, z) = \exp\left[-\frac{\pi k^2 z}{4} H(x)\right] \quad (21)$$

#### 2.4. Метод множественных фазовых экранов

Хотя было приведено основное уравнение (6), описывающее изменение функции  $v(x, z)$ , его чрезвычайно трудно решить аналитически. Решение параболического уравнения [8] требует включения дополнительных асимптотических или численных приближений для изучения различных статистических свойств флуктуирующего волнового поля. Вследствие вышесказанного для решения уравнения (6) будут использоваться методы численного моделирования.

В данной работе будет использоваться метод множественных фазовых экранов, зарекомендовавший себя высокой точностью результатов, полученных в ходе численного эксперимента [3]. Здесь будет представлено дополнение данного метода, позволяющее



учесть продольные корреляции флуктуаций показателя преломления (будем называть его обобщенным методом), после чего проведено сравнение классического и обобщенного вариантов.

Основная идея данного подхода описана в [2], [3], [4] и состоит в следующем. Вся случайная среда заменяется некоторым количеством численно сгенерированных случайных фазовых экранов, расположенных на разной высоте в одинаковом удалении друг от друга вдоль пути распространения, добавляющих случайные фазы волне по мере ее распространения через них. При этом между экранами волна испытывает дифракцию. В результате построения данной модели и пошагового учета эффектов фазовых флуктуаций и дифракции можно получить значение реализации случайного поля, а следовательно, и его статистических характеристик. Стоит учесть, что статистика флуктуаций добавочной фазы на экране определяется флуктуациями показателя преломления. Эту связь также необходимо определить для осуществления стандартного метода множественных фазовых экранов.

Разобьем моделируемую область на некоторое количество слоев. Будем считать, что толщина слоев одинакова. Тогда для классического случая толщина должна соответствовать условию (22а), в то время как обобщенному необходимо выполнения условия (22б)

$$\Delta z \gg l_\epsilon \quad (22a)$$

$$\Delta z \ll l_\epsilon \quad (22б)$$

Где  $\Delta z$  – толщина слоя,  $l_\epsilon$  – характерный продольный масштаб неоднородностей. Отличие условий связано с концептуальной разницей между рассматриваемыми здесь подходами. В первом, флуктуирующая среда представляется в виде статистически независимых слоев, что представляется возможным при большой, относительно эффективного размера неоднородностей, толщине каждого слоя. Во втором, необходимо учесть продольные корреляции электронной плотности, что выполняется, если имеется большое количество фазовых экранов в продольном масштабе неоднородностей среды.

Теперь можно рассмотреть эволюцию комплексной амплитуды волны при прохождении сквозь один тонкий слой. На каждом слое волна испытывает, в соответствии с параболическим уравнением (6), два различных эффекта: набег фазы за счет распространения и дифракцию между фазовыми экранами. Чтобы вычислить набег фазы, временно пренебрежем дифракционным эффектом, положив в уравнении (6)  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, z) = 0$ , также введем флуктуацию показателя преломления [8]  $\Delta n$ , определяющуюся формулой (23)

$$\Delta n \cong -\frac{f_{pl}^2 \Delta N}{2f^2 N} = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \bar{\epsilon} \quad (23)$$

Здесь  $\frac{\Delta N}{N}$  – относительные флуктуации плотности электронов. Тогда решение примет вид

$$v\left(x, z^+ + \frac{\Delta z}{2}\right) = v\left(x, z^- + \frac{\Delta z}{2}\right) \exp\left(\frac{ik}{\bar{\epsilon}} \int_{z^- + \frac{\Delta z}{2}}^{z^+ + \frac{\Delta z}{2}} \Delta n(x, z') dz'\right) \quad (24)$$

Здесь  $z^-$  и  $z^+$  – поле до и после слоя. Сдвиг на величину  $\frac{\Delta z}{2}$  обоснован предположением, что в середине слоя находится тонкий фазовый экран. Стоит отметить, что в классическом методе предполагают, статистическую независимость флуктуаций диэлектрической проницаемости в продольном направлении, или дельта-коррелированность. В таком случае при учете формулы (23) последовательно на каждом слое будет генерироваться независимая реализация фазы равная

$$\Delta\varphi(x) = \frac{k}{2} \int_{z^- + \frac{\Delta z}{2}}^{z^+ + \frac{\Delta z}{2}} \tilde{\epsilon}(x, z') dz' \quad (25)$$

Различие этих двух подходов состоит в том, что набег фазы в (24) для каждого слоя вычисляется по двумерной пространственной реализации флуктуаций показателя преломления с учетом их продольных ( и поперечных) корреляций, в то время как в (25) независимо для каждого слоя генерируется поперечное распределение флуктуаций набег фазы, исходя из поперечной функции корреляции неоднородностей, полученной в предположении дельта-коррелированности флуктуаций диэлектрической проницаемости. Подробнее техника моделирования стохастических распределений будет изложена в разделе Генерация флуктуаций для двух методов.

Далее рассмотрим распространение волны в фоновой среде между тонкими экранами. Для учета дифракции необходимо в параболическом уравнении для комплексной амплитуды поля положить  $\tilde{\epsilon}(x, z) = 0$ . Тогда уравнение решается с помощью преобразования Фурье по поперечной координате. В итоге получим формулу для Фурье образа поля

$$\hat{v}(\chi_x, z^+) = \exp\left(-\frac{i\chi_x^2}{2k} \Delta z\right) \hat{v}(\chi_x, z^-) \quad (26)$$

Где  $\hat{v}(\chi_x, z)$  – Фурье образ комплексной амплитуды поля по координате  $x$ . Если предположить, что в формуле (26) начальное условие на входе в каждый слой определяется как

$$\hat{v}(\chi_x, z^-) = \hat{v}\left(\chi_x, z^- - \frac{\Delta z}{2}\right) \quad (27)$$

В таком случае результирующее поле в конце одного слоя представляется как обратное Фурье преобразование от формулы (26) с применением начального условия (27)

$$v(x, z + \Delta z) = F^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{i\chi_x^2}{2k} \Delta z \right) F \left[ \exp \left( \frac{ik}{2} \tilde{\epsilon}(x, z) \Delta z \right) v(x, z) \right] \right\} \quad (28a)$$

$$v(x, z + \Delta z) = F^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{i\chi_x^2}{2k} \Delta z \right) F [\exp(i\Delta\varphi(x)) v(x, z)] \right\} \quad (28б)$$

Здесь  $F[\cdot]$  и  $F^{-1}\{\cdot\}$  – прямое и обратное преобразование Фурье соответственно. Применяя представление (28) для прохождения через каждый экран, можно получить итоговую комплексную амплитуду в конце неоднородного слоя.

Стоит отметить, что формулы, полученные в этом разделе, являются обоснованными при выполнении условия малости толщины слоев, на которые разбивается область моделирования. Этого требует условие применимости метода дробных шагов, когда эффекты набега фазы и дифракции можно рассматривать приближенно независимо. Хотя для каждого метода толщина слоя выбирается из условий (22), но в обоих случаях следует выбирать наименьшее разрешимое значения данного параметра, для повышения точности полученного решения.

## 2.5. Генерация флуктуаций для двух методов

В формулах (28a), (28б) присутствуют случайные величины  $\tilde{\epsilon}(x, z)$  и  $\Delta\varphi(x)$ , необходимые для получения результатов моделирования. Как говорилось выше, будут рассмотрены два подхода численного моделирования, каждому из которых соответствует своя случайная величина. Начнем с рассмотрения обобщенного случая.

Для реализации расширенного метода множественных фазовых экранов необходимо иметь процедуру генерации стохастической реализации флуктуаций относительной диэлектрической проницаемости  $\tilde{\epsilon}(x, z)$  во всей области моделирования. Флуктуации электронной плотности непосредственно влияют на волны, распространяющиеся в среде, так как по формуле (23) они прямо пропорциональны флуктуациям показателя преломления. В качестве спектра флуктуаций электронной концентрации воспользуемся формулой, описывающей степенной спектр [8] с внешним и внутренним масштабом  $L = \frac{2\pi}{k_0}$  и  $r_0$  соответственно. Выбор степенной зависимости обусловлен результатами зондовых измерений для одномерного спектра, отлично работающим при пространственных масштабах неоднородностей, лежащих в пределах до 7 км.

Во избежание накопления ошибок связанных с машинной точностью следует задавать функцию корреляции флуктуаций, а не их спектр. Напомним, что в данной работе будет рассмотрен случай двумерной задачи, следовательно, везде опущена зависимость от

координаты  $y$ . Если также положить внутренний масштаб неоднородностей равным нулю, тогда функция корреляции флуктуаций электронной плотности примет вид

$$B_{\frac{\Delta N}{N}} = \frac{\alpha_x \alpha_z \sigma_N^2 \left( k_0 \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha_x}\right)^2 + \left(\frac{z}{\alpha_z}\right)^2} \right)^{\frac{p-3}{2}}}{2^{\frac{p-5}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{p-3}{2}\right)} K_{\frac{p-3}{2}} \left( k_0 \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha_x}\right)^2 + \left(\frac{z}{\alpha_z}\right)^2} \right) \quad (29)$$

Где  $\vec{\alpha} = \alpha_x \vec{e}_x + \alpha_z \vec{e}_z$  – безразмерный масштабный вектор коэффициентов,  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_z$  – единичные векторы вдоль оси OX и OZ соответственно,  $p$  – спектральный индекс,  $\Gamma(x)$  – гамма-функция,  $K_\nu(x)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка  $\nu$  (функция Макдональда). Введенный параметр  $\vec{\alpha}$  предназначен для изменения внешнего масштаба относительно продольного и поперечного направления для учета анизотропии флуктуаций концентрации путем введения различных внешних масштабов, т. е., в случае если  $\alpha_x = \alpha_z$  функция корреляции становится изотропной. Также следует заметить, что  $\alpha_x$  прямо пропорционально поперечному внешнему масштабу  $L_\perp$ , соответственно аналогичная связь имеется для  $\alpha_z$  и  $L_\parallel$ . В связи с линейной зависимостью между флуктуациями относительной диэлектрической проницаемости и флуктуациями электронной концентрации (23) достаточно сгенерировать поле флуктуаций электронной плотности, после чего домножить его на  $\frac{(f_{pl}/f)^2}{(f_{pl}/f)^2 - 1}$ . В результате получаем формулу для двумерного спектра.

$$\Phi_{\frac{\Delta N}{N}} = \frac{\alpha_x \alpha_z \sigma_N^2 (p-3)}{2k_0^2 \pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\chi}}{k_0}\right)^2\right)^{\frac{p-1}{2}}} \quad (30)$$

Где  $\vec{\chi}$  – вектор пространственных спектральных переменных.

В классическом случае необходимо генерировать стохастическую реализацию добавочной фазы. Для этого найдём связь спектра фазы на экране со спектром флуктуаций электронной плотности. Тогда как нам уже известно, из формул (23, 25) флуктуации оптического пути и флуктуации электронной плотности имеют прямо пропорциональную зависимость, а следовательно их спектры тоже [3]

$$\Phi_{\Delta\varphi}(\chi_x) = \frac{\pi \alpha_z \Delta z k^2}{2} \frac{f_{pl}^4}{f^4} \Phi_{\frac{\Delta N}{N}}(\chi_x, 0) \quad (31)$$

Где  $\chi_x$  – спектральная переменная к пространственной координате  $x$ , перпендикулярной направлению распространения. Так как мы считаем случайное поле статистически однородным, то дисперсию можно восстановить по теореме Винера-Хинчина, как значение корреляционной функции при нулевом аргументе

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\alpha_z \Delta z \sigma_N^2 k^2 \sqrt{\pi} (p-3) f_{pl}^4}{4k_0 \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) f^4} \Gamma\left(\frac{p}{2} - 1\right) \quad (32)$$

Теперь укажем различия в методике генераций реализаций флуктуационных полей. Генерация флуктуаций фазы с заданным спектром (31) и распределением Гаусса для классического случая осуществляется следующим образом: в поперечном направлении области расчёта вводится пространственная сетка и соответствующая ей сетка в области волновых чисел. На сетке в области волновых чисел задаются значения спектра флуктуаций фазы в соответствии с (31). Стохастическая реализация фазы  $G_\varphi$  на пространственной сетке генерируется по следующей формуле

$$G_\varphi = F^{-1} \left( \left| \Phi_{\Delta\varphi}(\chi_x) \right|^{\frac{1}{2}} \xi(\chi_x) \right) \quad (33)$$

Где  $\xi(\chi_x)$  – заданный на сетке волновых чисел комплексный совершенно случайный, т. е. последовательность независимых случайных величин, гауссов процесс с нулевым средним и единичной дисперсией. Как показано в [4], задаваемый таким образом статистический ансамбль реализаций флуктуаций фазы имеет спектр мощности флуктуаций равный формуле (30). Так как реализация фазы генерируется независимо на каждом экране, получается, что между экранами имеется дельта-корреляция.

Генерация флуктуаций плотности электронов с заданным спектром (30) и распределением Гаусса для обобщенного метода осуществляется следующим образом: во всем пространстве моделирования вводится пространственная сетка и соответствующая ей сетка в области волновых векторов. На сетке в области волновых векторов задаются значения спектра флуктуаций концентрации электронов в соответствии с (30). Стохастическая реализация флуктуаций электронной плотности  $G_N$  на пространственной сетке генерируется в соответствии со следующей формулой

$$G_N = F^{-1} \left( \left| \Phi_{\frac{\Delta N}{N}}(\vec{\chi}) \right|^{\frac{1}{2}} \xi(\vec{\chi}) \right) \quad (34)$$

Где  $\xi(\vec{\chi})$  – заданное в пространстве волновых векторов комплексное дельта-коррелированное случайное гауссово поле с нулевым средним и единичной дисперсией.

Также следует учесть, что относительные флуктуации электронной концентрации и добавочной фазы должны принимать вещественные значения. Для реализации этого условия можно рассматривать либо спектр случайного гауссова поля, который будет иметь все необходимые свойства, либо сразу задать комплексное поле и сделать его эрмитово-

сопряженным относительно нуля, т.е.  $\Phi_{\frac{\Delta N}{N}}(\vec{\chi}) = \left[ \Phi_{\frac{\Delta N}{N}}(-\vec{\chi}) \right]^*$  для генерации  $\frac{\Delta N}{N}$ , и  $\Phi_{\Delta\varphi}(\chi_x) = \left[ \Phi_{\Delta\varphi}(-\chi_x) \right]^*$  для генерации  $\Delta\varphi$ .

Как видно из формул (33) и (34), различие двух методов заключается в том, что в классическом случае последовательно генерируются независимые экраны, что уменьшает требования к вычислительным мощностям, в то время как для расширенного подхода приходится генерировать поля для всей области моделирования, что увеличивает требуемую память и время для реализации моделирования. Использование обобщенного подхода обуславливается более широкой областью применения, т. е. стандартный метод хорошо справляется с задачами с пренебрежимо малым продольным радиусом корреляции, тогда как для его учета необходимо использовать расширенный метод.

## 2.6. Вычисление статистических моментов флуктуаций поля

Разработав методику проведения численного эксперимента и разобравшись в условиях его применимости, можно приступить к подсчету, поставленных в цели работы, моментов сгенерированного случайного поля. Как говорилось выше, необходимо сравнить значения для средней комплексной амплитуды волны и функции когерентности второго порядка (двухпозиционной одночастотной и двухчастотной однопозиционной) полученной тремя разными способами.

В приближении Маркова были получены формулы (20) и (21) для среднего поля и двухпозиционной одночастотной функции когерентности соответственно. В них фигурирует поперечная функция корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости среды  $A(x)$  и функция  $H(x)$ , также пересчитываемая через поперечную функцию корреляции по формуле (18). Тогда для вычисления искомых статистических моментов поля необходимо задать функцию  $A(x)$ .

Для генерации случайных полей в обоих методах использовалась степенная зависимость спектра флуктуаций относительной электронной плотности, задаваемая формулой (30) и Фурье сопряженная ей функция корреляции (29). Чтобы получить формулу для искомой поперечной функции корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости, необходимо проинтегрировать полную функцию корреляции по продольной переменной. Тогда для функции  $A(x)$  получим

$$A(x) = \frac{\alpha_x \alpha_z \sigma_N^2 (p-3) \sqrt{\pi} \left( k_0 \frac{x}{\alpha_x} \right)^{\frac{p-2}{2}}}{2^{\frac{p-4}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) k_0} \frac{(f_{pl}/f)^4}{\left( (f_{pl}/f)^2 - 1 \right)^2} K_{\frac{p-2}{2}} \left( k_0 \frac{x}{\alpha_x} \right) \quad (35)$$

Отдельно зададим значение функции  $A(x)$  при нулевом аргументе, так как функция Макдональда в данной точке имеет особенность. В данном случае это решается с помощью формулы из [9]

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_\nu(x) = \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \quad (36)$$

Тогда поперечная функция корреляции в нуле примет значение

$$A(0) = \frac{\alpha_x \alpha_z \sigma_N^2 (p-3) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) k_0} \frac{(f_{pl}/f)^4}{\left((f_{pl}/f)^2 - 1\right)^2} \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right) \quad (37)$$

Теперь осталось получить значения функции когерентности и среднего поля из реализации численного моделирования сгенерированного с помощью классического и обобщенного методов. Необходимо также ввести индекс скинтилляций  $S_4$

$$S_4^2(z) = \frac{\langle I^2(z, x) \rangle - \langle I(z, x) \rangle^2}{\langle I(z, x) \rangle^2} \quad (38)$$

Где  $I(z, x)$  – интенсивность волны. Как известно, она является квадратом амплитуды волны, т. е.

$$I(z, x) = |v(z, x)|^2 \quad (39)$$

В зависимости от значения индекса скинтилляций флуктуации являются либо сильными ( $S_4 \sim 1$ ), либо слабыми ( $S_4 \ll 1$ ). Здесь хотелось бы реализовать оба этих варианта.

После проведения численного эксперимента имеем таблицу значений комплексной амплитуды случайного поля в узлах сетки области моделирования. Чтобы получить среднее значение необходимо, исходя из гипотезы эргодичности, провести усреднение (взять выборочное среднее) на каждом слое. Тогда  $\bar{v}(z)$  вычисляется по формуле

$$\bar{v}_r(z) = \text{mean}_x \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,nx} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{nz,1} & \cdots & v_{nz,nx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{nx} \sum_1^{nx} v_{1,i} \\ \vdots \\ \frac{1}{nx} \sum_1^{nx} v_{nz,i} \end{pmatrix} \quad (40)$$

Где  $nx$  и  $nz$  – количество узлов в поперечном и продольном направлениях соответственно, а индекс  $r$  указывает на вычисление внутри одной реализации. При каждой генерации метода вычисляется среднее значение комплексной амплитуды случайного поля, запоминается, после чего, для уменьшения итоговой погрешности методов, выполняется усреднение по выполненным реализациям. В результате для среднего поля получим

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \bar{v}_r(z) \quad (41)$$

Где  $R$  – количество учтенных реализаций.

Следующим будет индекс скинтилляций. Внимательно посмотрев на формулу (38), можно заметить, что в числителе стоит дисперсия интенсивности случайного поля. Тогда для одной реализации случайного поля индекс скинтилляций вычисляется по формуле

$$S_{4r}^2(z) = \frac{\text{var}_x \begin{pmatrix} I_{1,1} & \cdots & I_{1,nx} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{nz,1} & \cdots & I_{nz,nx} \end{pmatrix}}{\left[ \text{mean}_x \begin{pmatrix} I_{1,1} & \cdots & I_{1,nx} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{nz,1} & \cdots & I_{nz,nx} \end{pmatrix} \right]^2} = \frac{\frac{\sum_1^{nx} (I_{1,i} - \bar{I}_1)^2}{(nx-1)\bar{I}_1}}{\vdots}}{\frac{\sum_1^{nx} (I_{nz,i} - \bar{I}_{nz})^2}{(nx-1)(\bar{I}_{nz})^2}} \quad (42)$$

Где  $\bar{I}_i$  – выборочное среднее  $I$  на  $i$ -той высоте. Таким образом, используя формулу (42), можно сосчитать квадрат индекса скинтилляций на каждой реализации, после чего провести по ним усреднение. Тогда результирующий индекс скинтилляций примет вид

$$S_4(z) = \sqrt{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R S_{4r}^2(z)} \quad (43)$$

Для вычисления двухпозиционной одночастотной функции когерентности второго порядка необходимо выполнить процедуру аналогичную двум предыдущим параметрам. Начнем с рассмотрения формулы (14). Заметим, что функция когерентности зависит от трех аргументов, но в случае статистически однородных флуктуаций среды и вертикального падения на границу раздела плоской монохроматической волны функция когерентности будет зависеть лишь от двух переменных: продольной  $z$  и поперечной разностной  $x = x' - x''$ .

Теперь следует построить величину, усреднение которой будет давать функцию когерентности данной реализации случайного поля. Для этого из определения (14) введем функцию  $\gamma^{pos}$

$$\gamma^{pos}(z, x, x') = \frac{v(z, x') \cdot v^*(z, x' + x) + v(z, x') \cdot v^*(z, x' - x)}{2} \quad (44)$$

Такое определение функции  $\gamma^{pos}(z, x, x')$  обусловлено тем, что для статистически изотропных флуктуаций среды функция когерентности должна принимать вещественные значения. Идеологически же это соответствует учету сразу двух сопряженных реализаций. Стоит отметить, что на каждом слое ( $z = const$ ) функция  $\gamma^{pos}(z, x, x')$  является квадратной таблицей. Следовательно, на каждом слое можно выполнить операцию усреднения аналогичную формуле (40) для функции  $\gamma^{pos}(z, x, x')$  по переменной  $x'$ . В итоге получим

$$\overline{\gamma_r^{pos}}(z, x) = \text{mean}_{x'}(\gamma^{pos}(z, x, x')) = \begin{pmatrix} \overline{\gamma_{1,1}^{pos}} & \cdots & \overline{\gamma_{1,nx}^{pos}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\gamma_{nz,1}^{pos}} & \cdots & \overline{\gamma_{nz,nx}^{pos}} \end{pmatrix} \quad (45)$$



Последним шагом для вычисления двухпозиционной одночастотной функции когерентности второго порядка будет усреднение значений  $\overline{\gamma_r^{pos}}(z, x)$  по числу реализаций, совершенных в ходе выполнения численного моделирования

$$\Gamma(z, x) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \overline{\gamma_r^{pos}}(z, x) \quad (46)$$

Осталось разобраться с вычисление двухчастотной однопозиционной функции когерентности. Для начала введем определение данной функции

$$\Gamma(z, 0, \Delta f) = \langle v(z, x', \bar{f} + \Delta f) v^*(z, x', \bar{f} - \Delta f) \rangle \quad (47)$$

Где  $\bar{f}$  – средняя частота излученного импульса. Здесь отдельного внимания заслуживает процедура генерации случайных полей с разными частотами. Как и для предыдущих моментов, для увеличения точности полученного ответа будет необходимо произвести усреднение по реализациям, но стоит учесть, что для этого волны с разными частотами должны распространяться в одной и той же случайной среде.

Чтобы осуществить эту идею, в качестве результата численного эксперимента следует получать трехмерный массив случайных полей (двумерные массивы) при разных частотах, сосчитанных на одной реализации случайных величин ( $\tilde{\epsilon}(x, z)$ ,  $\Delta\varphi(x)$  в зависимости от метода) моделируемого пространства.

По аналогии с двухпозиционной функцией когерентности введем  $\gamma^{fr}$

$$\gamma^{fr}(z, x', \Delta f) = v(z, x', \bar{f} + \Delta f) v^*(z, x', \bar{f} - \Delta f) \quad (48)$$

Тогда по одной реализации метода множественных фазовых экранов можно получить

$$\overline{\gamma_r^{fr}}(z, \Delta f) = \text{mean}_{x'} \left( \gamma^{fr}(z, x', \Delta f) \right) = \begin{pmatrix} \overline{\gamma_{1,1}^{fr}} & \cdots & \overline{\gamma_{1,nf}^{fr}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\gamma_{nz,1}^{fr}} & \cdots & \overline{\gamma_{nz,nf}^{fr}} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Где  $nf$  – количество различных частот падающей волны. Осталось лишь записать результирующую формулу для двухчастотной функции когерентности второго порядка, полученную усреднением по реализациям.

$$\Gamma(z, 0, \Delta f) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \overline{\gamma_r^{fr}}(z, \Delta f) \quad (50)$$

### 3. Результаты моделирования и их обсуждение

В этом разделе приводятся результаты моделирования поставленной в работе задачи полученных тремя способами: стандартным и обобщенным методом дробных шагов и в диффузионном марковском приближении. Как указывалось выше, сравнению подлежат два первых статистических момента флуктуирующего поля: среднее значение комплексной амплитуды поля в зависимости от высоты и функция когерентности второго порядка в зависимости от поперечной разностной координаты для двухпозиционной одночастотной и от разности частот для двухчастотной однопозиционной. Также будет представлен индекс сцинтилляций.

В связи с необходимостью моделирования, а в последствии и обработки большого количества данных, построение искомых моментов флуктуирующего поля было выполнено при различных параметрах моделирования. Неизменным оставались лишь общие параметры модели, такие как пространственная область расчета, частота падающей волны ( $f_1 = 500$  МГц,  $f_2 = 1000$  МГц) и т. д. Начнем рассмотрение результатов со среднего поля и индекса сцинтилляций.

Для получения этих функций были выбраны модели с наименьшими возможными значениями толщины слоев, так как они зависят лишь от продольной переменной  $z$ . В случае классического метода область моделирования разбивается на 50 одномерных фазовых экранов, каждый из которых содержит  $2^{12}$  узлов в поперечной сетке, в обобщенном случае –  $2^{12}$  горизонтальных слоев с  $2^{10}$  узлов на каждом слое. В обоих методах выполнено усреднение по 100 реализациям. Здесь будут представлены результаты для изотропного ( $\alpha_x = \alpha_z = 1$ ) и анизотропного ( $\alpha_x = 1, \alpha_z = 5$ ) спектров. Укажем остальные параметры.

Физические параметры модели:

- Высота моделируемого пространства – 100 км
- Ширина моделируемого пространства – 30 км
- Плазменная частота в фоновой среде – 10 МГц
- Частота распространяющегося поля – 0.5 и 1 ГГц

Параметры модели флуктуаций относительной электронной концентрации:

- Дисперсия флуктуаций относительной электронной плотности –  $10^{-1.6}$
- Спектральный индекс – 3.7
- Внешний масштаб  $L = 3$  км
- Внутренний масштаб  $r_0 = 0$

Когда приведены все параметры моделирования, можно приступить к обсуждению полученных результатов.

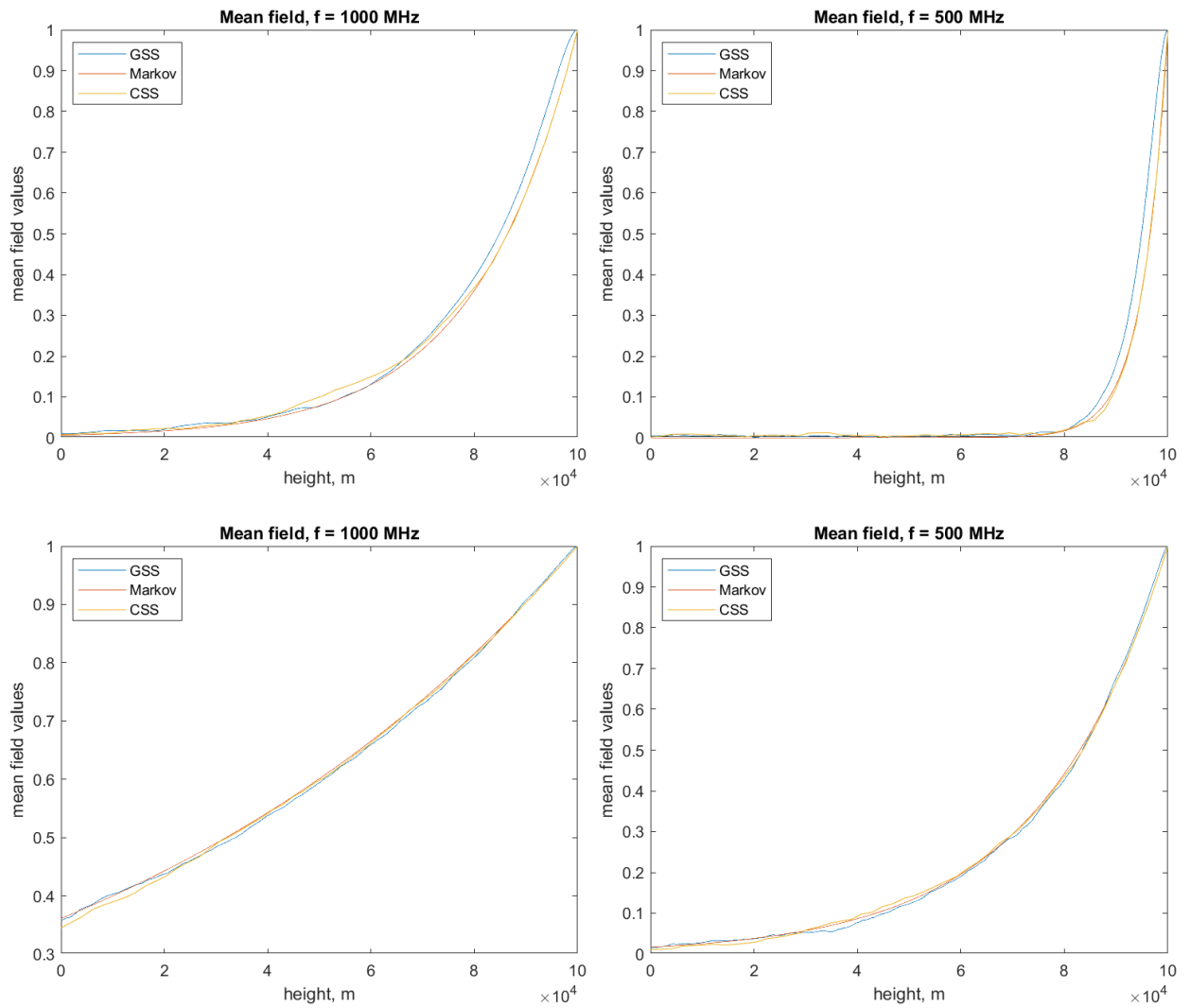


Рис. 2. Высотная зависимость модуля среднего значения комплексной амплитуды распространяющегося поля. Верхняя часть – продольный внешний масштаб  $L_{\parallel} = 15$  км, нижняя часть – продольный внешний масштаб  $L_{\parallel} = 3$  км.

На рис. 2–4 изображены средние значения флуктуаций поля (различные зависимости), полученное с помощью обобщенного – generalized split step (GSS) и классического – classical split step (CSS) метода множественных фазовых экранов (41) и в марковском приближении (20).

На рис. 2 представлены 4 графика среднего значения комплексной амплитуды случайного поля, полученные при разных частотах распространяющейся волны ( $f_1 = 1000$  МГц,  $f_2 = 500$  МГц) и различных значения продольного внешнего масштаба степенного спектра флуктуаций электронной концентрации ( $L_{\parallel} = 3$  км,  $L_{\parallel} = 15$  км). На графиках видны различия между средним полем полученном в предположении дельта-коррелированности флуктуаций показателя преломления (график CSS и Markov) и с учетом продольных корреляций (график GSS). Подробнее это можно рассмотреть на рис. 4, где приведены эти же графики, но в начале ионосферных неоднородностей. Легко заметить,

что независимо от параметров моделирования учет продольных корреляций флуктуаций показателя преломления приводит к менее быстрому убыванию среднего поля, но больших значениях продольного внешнего масштаба эффекты связанные с учетом конечности продольного радиуса корреляции флуктуаций электронной концентрации вносят весомый вклад, как и ожидалось в соответствии с [5].

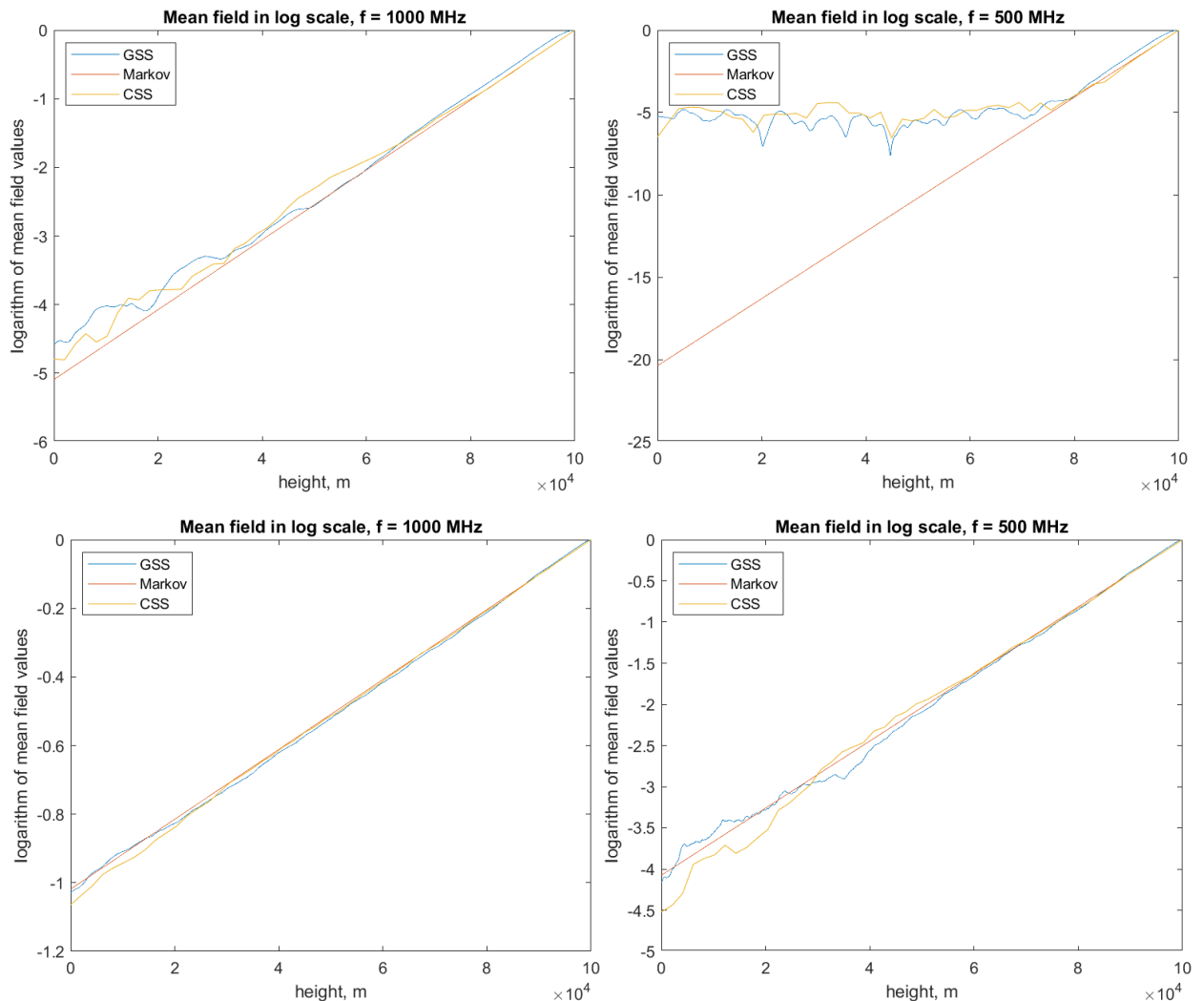


Рис. 3. Логарифм модуля среднего значения комплексной амплитуды распространяющегося поля в зависимости от высоты. Верхняя часть – продольный внешний масштаб  $L_{||} = 15$  км, нижняя часть – продольный внешний масштаб  $L_{||} = 3$  км.

Также нам известно, что среднее значение флуктуирующего поля в приближении Маркова убывает по экспоненциальному закону. Тогда будет интересно посмотреть на результаты моделирования в логарифмическом масштабе. Как видно из рис. 3, когда значения среднего поля лежат в диапазоне от 0.3 до 1, классический (CSS) и марковский (Markov) графики имеют вид прямых, что свидетельствует об экспоненциальном убывании. Это же верно и для GSS при  $L_{||} = 3$  км флуктуирующей среды, но при увеличении этого параметра до  $L_{||} = 15$  км можно сделать вывод, что при входе в ионосферные

неоднородности среднее поле, полученное с помощью GSS, убывает медленней экспоненциального закона. Поэтому в дальнейшем (для функции когерентности) будут приведены графики только с анизотропными неоднородностями. Стоит сказать, что серьезное отличие между логарифмом среднего поля, полученного с помощью моделирования, и теоретическим (рис. 3,  $L_{\parallel} = 15$ ,  $f = 500$  МГц) обосновывается большой статистической погрешностью при малых значениях искомой функции.

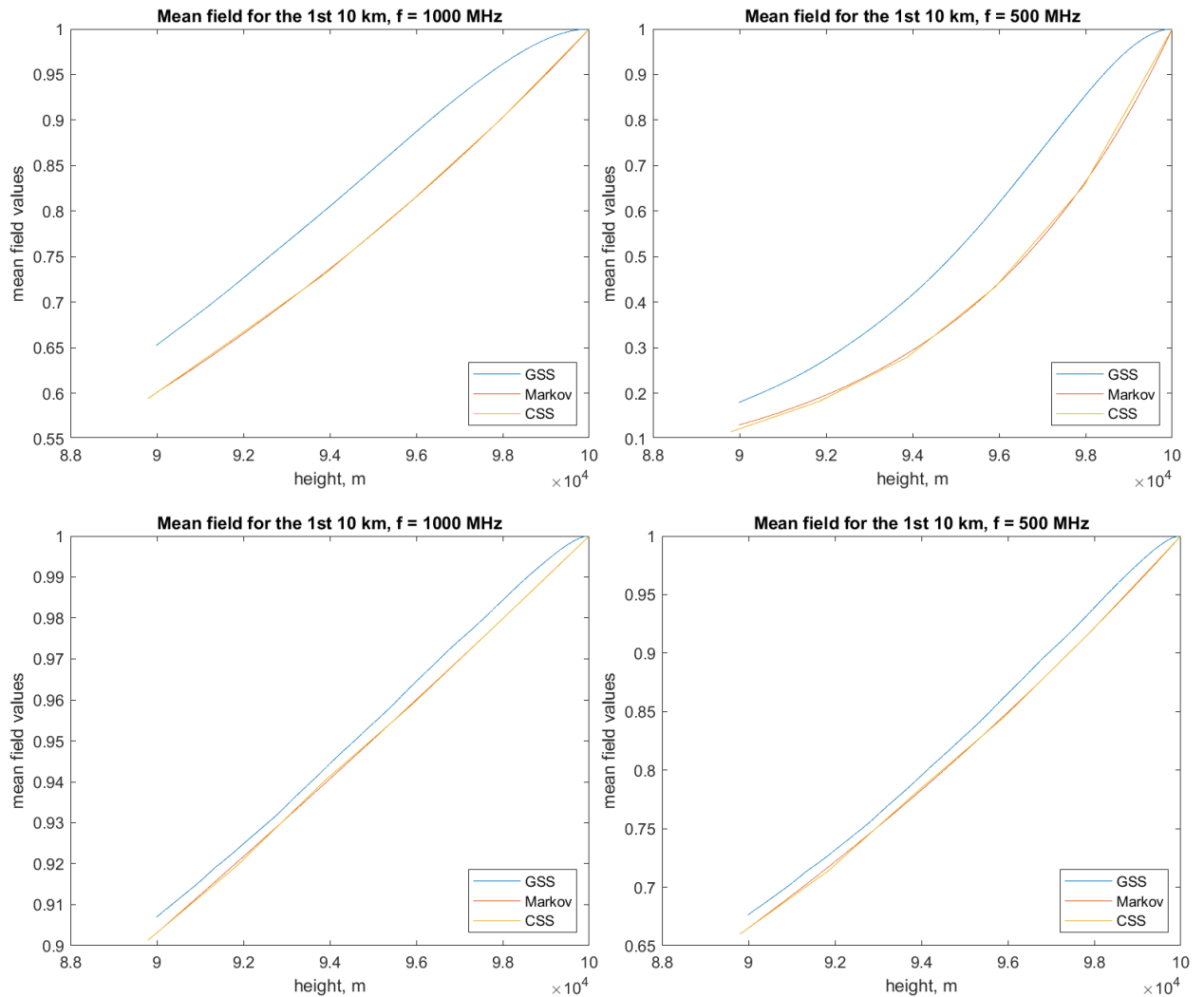


Рис. 4. Модуль среднего значения комплексной амплитуды распространяющегося поля на первых 10 км после входа в ионосферные неоднородности. Верхняя часть – продольный внешний масштаб  $L_{\parallel} = 15$  км, нижняя часть – продольный внешний масштаб  $L_{\parallel} = 3$  км.

Теперь рассмотрим какие значения принимает индекс сцинтилляций распространяющегося поля для изотропных и анизотропных неоднородностей среды (43). На рис. 5 представлены четыре графика высотной зависимости индекса сцинтилляций в случаях распространения волны с двумя разными частотами ( $f_1 = 1000$  МГц,  $f_2 = 500$  МГц) и различных значения продольного внешнего масштаба степенного спектра флуктуаций электронной концентрации ( $L_{\parallel} = 3$  км,  $L_{\parallel} = 15$  км). На каждом графике имеют

две кривые: обобщенный – GSS и классический – CSS методы множественных фазовых экранов. На графиках видно, что для любых параметров моделирования индекс сцинтилляций CSS всегда лежит выше, индекса сцинтилляций GSS. Это значит, что в более реалистичных условиях, когда продольный радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости принимает конечное значение, флуктуации распространяющегося поля будут слабее дельта-коррелированного случая.

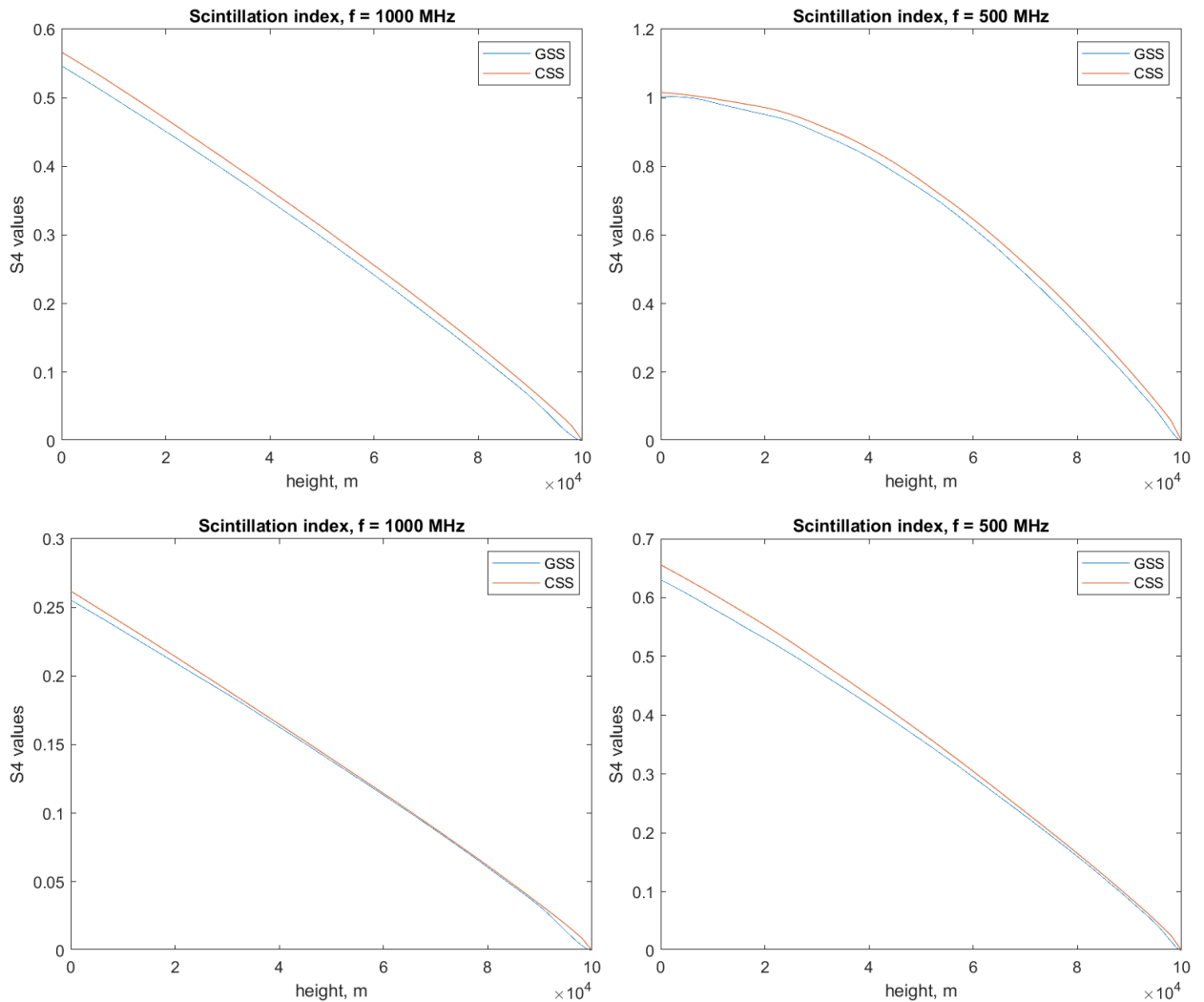


Рис. 5. Индекс сцинтилляций в зависимости от высоты. Верхняя часть – продольный внешний масштаб  $L_{\parallel} = 15$  км, нижняя часть – продольный внешний масштаб  $L_{\parallel} = 3$  км.

Также рис. 5 позволяет сказать, что удалось достичь реализации всех случаев сцинтилляций: слабого ( $f = 1000$  МГц,  $L_{\parallel} = 3$  км), сильного ( $f = 500$  МГц,  $L_{\parallel} = 15$  км) и промежуточного ( $f = 1000$  МГц,  $L_{\parallel} = 15$  км или  $f = 500$  МГц,  $L_{\parallel} = 3$  км).

После того как были получены некоторые выводы относительно среднего флуктуирующего поля, следует приступить к сравнению функций когерентности второго порядка. Как двухпозиционная одночастотная, так и двухчастотная однопозиционная функция когерентности зависят от двух аргументов, следовательно для их вычисления

потребуется большие вычислительные мощности. Но так как исследованию подлежит лишь ее значение на выходе из неоднородного слоя, можно не вычислять зависимость функции когерентности от продольной координаты  $z$ . Исходя из этих рассуждений, можно показать, что сложность вычисления двухпозиционной одночастотной функции когерентности эквивалентна вычислению среднего поля. Сказать подобное для двухчастотной однопозиционной функции когерентности нельзя, так как для ее нахождения необходимо генерировать трехмерный массив (продольная, поперечная координаты и частота падающего поля).

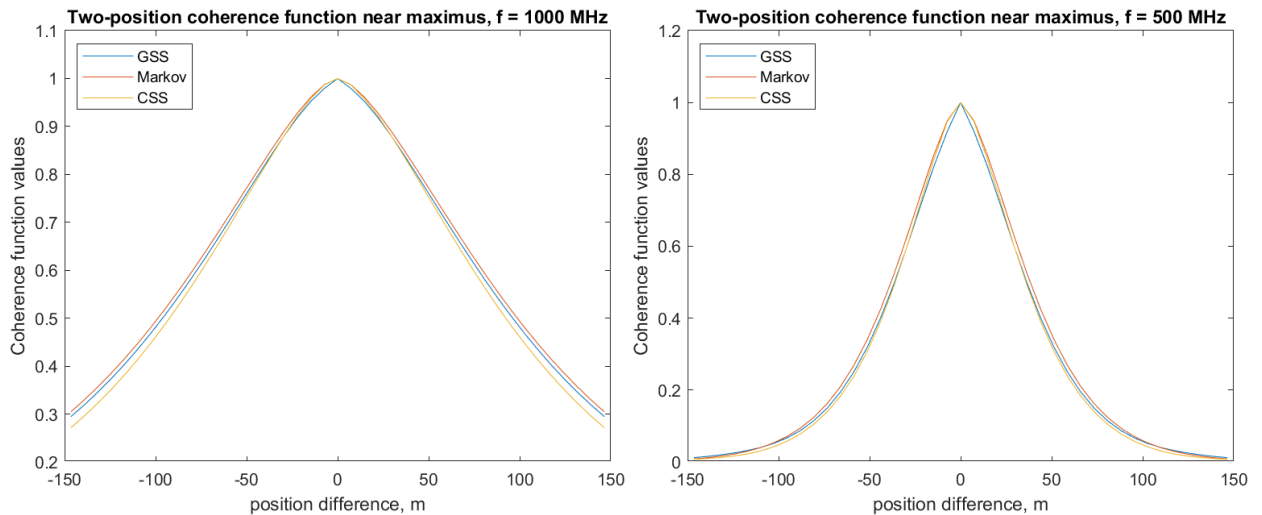
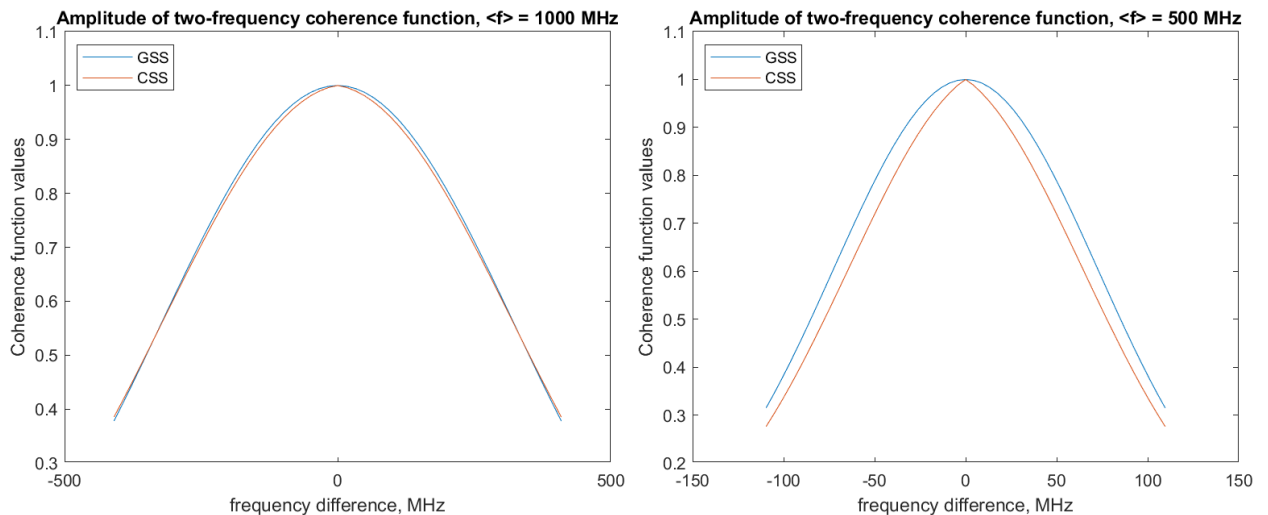


Рис. 6. Двухпозиционная одночастотная функция когерентности в зависимости от поперечной разностной переменной. Продольный внешний масштаб  $L_{\parallel} = 15$  км.

Укажем выбранные параметры моделирования. Для классического метода область моделирования разбивается на 50 одномерных фазовых экранов, каждый из которых содержит  $2^{12}$  узлов в поперечной сетке для двух функций когерентности, в обобщенном случае –  $2^{10}$  горизонтальных слоев с  $2^{12}$  узлов на каждом слое для двухпозиционной функции когерентности и  $2^9$  горизонтальных слоев с  $2^9$  узлов на каждом слое для двухчастотной функции когерентности. В обоих методах выполнено усреднение по 100 реализациям. Можно заметить, что параметры модели классического подхода остались теми же, в то время как для обобщенного варианта в случае вычисления двухчастотной функции когерентности пришлось уменьшить количество узлов как вдоль направления распространения волны, так и вдоль перпендикулярной ей оси. Это подтверждает вывод, сделанный в конце раздела Генерация флуктуаций для двух методов, о том, что учет продольных корреляций среды требует значительного увеличения вычислительной мощности.

На рис. 6 изображены двухпозиционная одночастотная функция когерентности, полученная с помощью обобщенного (GSS) и классического (CSS) метода множественных

фазовых экранов (46) и в марковском приближении (21) для случая распространения волны с двумя разными частотами ( $f_1 = 1000$  МГц,  $f_2 = 500$  МГц) и продольного внешнего масштаба степенного спектра флуктуаций электронной концентрации  $L_{\parallel} = 15$  км. На представленных графиках видно, что искомым момент случайного поля вычисленные тремя способами приблизительно одинаковое поведение. Небольшие различия имеются лишь в маленьком диапазоне (порядка 10–15 метров) и при больших значениях разности поперечных координат. В первом случае, если обратить внимание на правый график рис.6, можно заметить, что в метод GSS, т. е. при учете продольных корреляций флуктуаций среды, двухпозиционная функция когерентности имеет более быстрое убывание в диапазоне от -15 до +15 метров, после чего начинает приближаться к функциям когерентности полученных другими способами. Второй случай, лучше виден на графике двухпозиционной функции когерентности при частоте падающего поля  $f = 1000$  МГц. Видно, что при уменьшении функции когерентности в два раза функция когерентности, полученная с помощью CSS, имеет большую скорость убывания, по сравнению с другими методами.





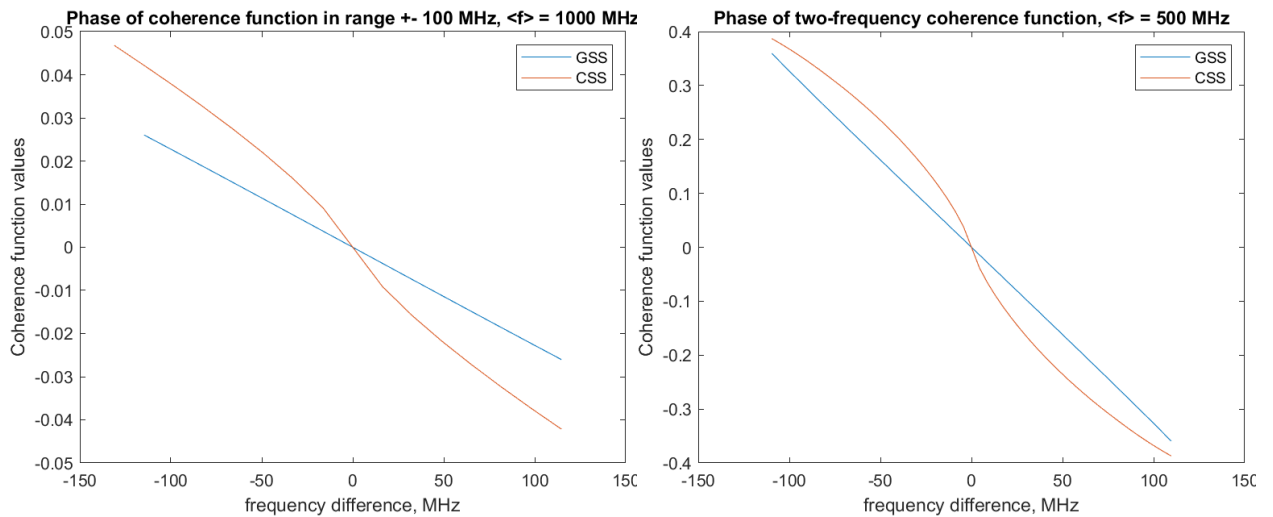


Рис. 7. Амплитуда и фаза двухчастотной однопозиционной функции когерентности на выходе из последнего слоя в зависимости от разности частот. Продольный внешний масштаб  $L_{\parallel} = 15$  км.

На рис. 7 изображены двухчастотные однопозиционные функции когерентности, вычисленные по формуле (50) для GSS и CSS, при двух значениях средней частоты ( $\langle f \rangle_1 = 1000$  МГц,  $\langle f \rangle_2 = 500$  МГц) и при продольном внешнем масштабе степенного спектра флуктуаций электронной концентрации  $L_{\parallel} = 15$  км. На графиках приведены амплитуда и фаза данной функции. На двух верхних графиках изображена амплитуда двухчастотной однопозиционной функции когерентности. По ним видно, что кривая в методе GSS всегда лежит выше кривой CSS. Это говорит о том, что учет конечности продольного радиуса корреляции флуктуаций электронной концентрации приводит к выводу об увеличении ширины частотной когерентности. На нижних графиках изображены фазы двухчастотной однопозиционной функции когерентности. Видно, что обе функции имеют одинаковое поведение, но также имеются значимые различия в ее значениях. Рассмотрев диапазон  $\pm 50$  МГц (что намного превышает реально используемую полосу частот в прикладных задачах), можно сделать вывод, что различия фаз функции когерентности, вычисленной двумя численными методами, составляет около 25%. Следовательно, для более точного решения необходимо учитывать эффекты, связанные с конечностью продольного радиуса корреляции флуктуаций концентрации электронов.

#### 4. Заключение

В данной работе была поставлена задача учета конечных значений продольного радиуса корреляции флуктуаций показателя преломления в теории распространения радиоволн в случайных средах. Ее решением представляется расширение техники метода множественных фазовых экранов для учета продольных корреляций среды. В ходе ее решения были получены соотношения, дополняющие классический метод.

Была выбрана физическая задача вертикального распространения плоской волны в неоднородной плоскостростой среде с флуктуациями электронной плотности. Она решалась методами численного моделирования, после чего сравнивались результаты двух численных методов и теоретического решения. Для сравнения были выбраны два первых статистических момента флуктуирующего поля: среднее значение комплексной амплитуды и функция когерентности второго порядка.

Численное моделирование проводилось в среде программирования MATLAB. Для этого был создан ряд программ, в которых реализуются два, описанных в данной работе, варианта метода множественных фазовых экранов. По их результатам были полученные данные представленные на рис. 2–7.

На основе проведённых численных исследований были получены зависимости среднего поля и индекса сцинтилляций от высоты и пространственной и частотной функции когерентности от пространственной и частотной разности соответственно. Из сравнения численных и аналитических данных для среднего значения случайного поля сделан вывод, что учет радиуса корреляции флуктуаций показателя преломления приводит к заметным расхождениям результатов полученных обобщенным и классическим методом множественных фазовых экранов и в марковском приближении.

Для индекса сцинтилляций учет конечных значений продольного радиуса корреляции флуктуаций относительной диэлектрической проницаемости привел к тому, что значения, полученные обобщенным методом, независимо от режима сцинтилляций имеют меньшие значения, чем аналогичные, полученные классическим подходом.

Также найдены различия между двухчастотными однопозиционными функциями когерентности, вычисленными двумя численными методами. Из графиков для амплитуды двухчастотной функции когерентности выявлено, что при учете продольных корреляций среды частотная ширина когерентности получается больше. Значения фазы также имеют заметные расхождения в случае конечных значений продольного радиуса корреляции флуктуаций электронной плотности.

Следовательно, для более точного решения задачи распространения радиоволн в стохастически неоднородной среде эффект конечного продольного радиуса корреляции флуктуаций показателя преломления может вносить существенные различия для среднего поля и двухчастотной однопозиционной функции когерентности.

## Список литературы

- [1] M. Spivack и В. J. Uscinsky, «The split-step solution in random wave propagation,» *Journal of Computational and Applied Mathematics*, № 27, 1989.
- [2] Y.-W. Kiang и С.-Н. Liu, «Multiple phase-screen simulation of HF wave propagation in the turbulent stratified ionosphere,» № 20, 1985.
- [3] W. A. Coles, J. P. Filice, R. G. Frehlich и M. Yadlowsky, «Simulation of wave propagation in three-dimensional random media,» № 34, 1995.
- [4] D. L. Knepp, «Multiple phase-screen calculation of the temporal behavior of stochastic waves,» *Proceedings of the IEEE.*, 1983.
- [5] М. А. Бисырин и N. N. Zernov, «Nonlocal Markov approximation for mean field propagating in a medium with dielectric permittivity fluctuations in case of finite values of longitudinal correlation radius 1. Homogeneous background medium,» *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 2021.
- [6] М. Бисырин, V. Ghern и N. Zernov, «Extended Treatment of Statistical Moments of Random Fields in Nonlocal Markov Approximation,» в 2022 *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, Cape Town, South Africa, 2022.
- [7] С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов и В. И. Татарский, Введение в статистическую радиофизику часть 2, Москва: "Наука", 1978.
- [8] Kung Chie Yeh и Chao-Han Liu, «Radio Wave Scintillations in the Ionosphere,» *Proceedings of the IEEE.*, 1982.
- [9] М. Абрамовиц и И. Стиган, Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, Москва: Наука, 1979.