

Санкт-Петербургский государственный университет

СИДЕЛЬНИКОВ Арсений Артурович

Выпускная квалификационная работа

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА И ПОТЕНЦИАЛА
КАЗИМИРА-ПОЛДЕРА ДЛЯ СИСТЕМ С РЕЗКИМИ
ГРАНИЦАМИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа: ВМ.5511.2021 «Физика»

Научный руководитель:
профессор, кафедра квантовой механики, д.ф.-м.н., **Марачевский В.Н.**

Рецензент:
заместитель руководителя Отделения физики высоких энергий, Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова Национального исследовательского центра "Курчатовский институт",
д.ф.-м.н. **Ким В.Т.**

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1	Введение	2
2	Потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома над диэлектрическим полупространством с граничным слоем Черна-Саймонса	4
3	Потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя диэлектрическими полупространствами с граничными слоями Черна-Саймонса	10
4	Потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя слоями Черна-Саймонса в вакууме	13
5	R-нечетные вакуумные эффекты	16
6	Заключение	18
A	Идеально проводящие параллельные плоскости	19
B	Асимптотики	20
C	Список литературы	21

1 Введение

Эффект Казимира [1,2]—это квантовый эффект взаимодействия между макроскопическими объектами в их основном состоянии. Взаимодействие между двумя диэлектрическими полупространствами, разделенными вакуумной щелью, определяется формулой Лифшица [3]. Теоретическое изучение эффекта Казимира получило новые возможности в рамках подхода рассеяния, формализм был эффективно применен к неплоским геометриям, включая дифракционные решетки [4–6], сферы и цилиндры [7–11]. Подробности теоретических и экспериментальных исследований можно найти в различных обзорах и книгах [12–32].

Действие Черна-Саймонса существенно модифицирует взаимодействие Казимира, его изучение в рамках $2 + 1$ абелевой электродинамики с членом Черна-Саймонса было начато в работе [33]. Константы Черна-Саймонса слоев в случае $3+1$ являются безразмерными. Жесткие непроницаемые граничные условия, модифицированные членом Черна-Саймонса в случае $3 + 1$, были рассмотрены в работах [34, 35], проводимость Холла не описывается этими условиями. Энергия Казимира двух плоских слоев Черна-Саймонса в вакууме была получена в работах [36, 37]. Притяжение и отталкивание Казимира, обусловленные слоями Черна-Саймонса на границе диэлектрических и металлических полупространств, были изучены в работах [38, 39].

Потенциал Казимира-Полдера для анизотропного атома получен прямым применением квантовой электродинамики во втором порядке теории возмущений в работах [40–44]. Эффект Казимира-Полдера для проводящих плоскостей был рассмотрен в работах [45, 46], эффект Казимира-Полдера для проводящих плоскостей с тензорной проводимостью [47] был рассмотрен в работах [12, 48, 49]. Потенциал Казимира-Полдера нейтрального анизотропного атома при наличии плоского слоя Черна-Саймонса был получен в работе [50], эффекты нарушения зарядовой четности из-за слоя Черна-Саймонса были исследованы в работе [51].

В низкоэнергетической эффективной теории топологических изоляторов существует член, пропорциональный $\theta \vec{E} \vec{H}$ в дополнение к стандартной плотности электромагнитной энергии, это действие может быть проинтегрировано по объему топологического изолятора в действие Черна-Саймонса на границе. Параметр a из действия Черна-Саймонса квантуется в этом случае следующим образом: $a = \alpha\theta/(2\pi)$, $\theta = (2m + 1)\pi$, α - постоянная тонкой структуры КЭД, m - целое число [52]. Различные аспекты Казимировского взаимодействия топологических изоляторов были исследованы в работах [53–58].

Теоретическое описание изоляторов Черна [59–61] при отсутствии дисперсии дается действием Черна-Саймонса с параметром $a = C\alpha$, C — число Черна —топологический инвариант. Взаимодействие Казимира с изоляторами Черна изучается в работах [37, 62, 63].

Квантовые слои Холла во внешнем магнитном поле также приводят к квантованной силе Казимира, параметр действия Черна-Саймонса $a = \nu\alpha$, ν - целое или дробное число, характеризующее плато квантового эффекта Холла [38, 64, 65].

Отталкивание Казимира привлекает особое внимание в исследованиях эффекта Казими-

ра, отталкивание является многообещающим режимом с точки зрения технологии. Вращение поляризации после отражения электромагнитной волны от плоского слоя Черна-Саймонса является важным свойством, которое приводит к режимам притяжения и отталкивания в давлении Казимира между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса в вакууме и на границах диэлектриков или металлов [36–39]. Давление Казимира в режиме отталкивания до сих пор экспериментально не исследовалось в этой геометрии.

Дополнительным способом изучения эффекта Казимира является локальное зондирование вакуума нейтральным атомом в его основном состоянии. Представляет интерес изучение вакуума между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса локально из-за нетривиальных свойств этой системы. Таким образом, потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома является естественным теоретическим инструментом для проведения исследования перед экспериментальным исследованием. Эта работа заполняет пробел в важном направлении локального изучения вакуума в геометрии двух слоев Черна-Саймонса. Аналитические результаты для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса на границе диэлектрических полупространств впервые получены в работе [69].

Формализм, основанный на рассеянии функций Грина, был введен в работе [12]. В этом подходе выводятся электрические, магнитные функции Грина и давление Казимира в калибровочно-инвариантном по построению выводе. В работе [12] мы получили давление Казимира и потенциал Казимира-Полдера в системах без вращения поляризаций после отражения электромагнитных волн от границ между различными средами.

В настоящей работе разработано важное обобщение подхода к рассеянию функций Грина на общий случай отражения от границ пластин. При наличии нескольких слоев Черна-Саймонса невозможно выразить потенциал Казимира-Полдера в терминах двух коэффициентов отражения (для ТЕ и ТМ мод) даже для диагонального тензора атомной поляризуемости из-за вращения ТЕ и ТМ поляризаций после отражения электромагнитного поля от каждого слоя Черна-Саймонса. Матрица коэффициентов отражения имеет в данном случае недиагональный вид [37, 38]. Определение потенциала Казимира-Полдера при наличии нескольких слоев Черна-Саймонса потребовало разработки новой техники, представленной в этой работе. Получены новые формулы для потенциалов Казимира-Полдера для всех систем, рассмотренных в данной работе. Также обнаружены и исследованы новые вакуумные эффекты трех тел в системе атом - два слоя из-за поворота одного из слоев на 180 градусов.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 записываются выражения для поля точечного диполя в вакууме в терминах электрического и магнитного полей, следуя работе [12], и обобщается формализм рассеяния функций Грина на важный случай недиагональных матриц отражения. Затем получается результат для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома при наличии плоскопараллельного слоя Черна-Саймонса на границе диэлектрического полупространства. В разделе 3 получается общий результат для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя диэлектрическими

полупространствами с плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса на границах диэлектрических полупространств. В разделе 4 получаются результаты для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса в вакууме, выраженные через трансцендентные функции Лерча и полилогарифмы. Раздел 5 посвящен анализу Р-нечетных вакуумных эффектов трех тел, описаны эксперименты по измерению потенциала Казимира-Полдера в щели.

В работе магнитная проницаемость материалов $\mu = 1$. Мы используем $\hbar = c = 1$ и единицы измерения Хевисайда-Лоренца.

2 Потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома над диэлектрическим полупространством с граничным слоем Черна-Саймонса

Метод рассеяния функций Грина был представлен в работе [12], где он был применен для получения различных классических результатов для потенциала Казимира-Полдера и давления Казимира в геометриях с плоскими границами, был разработан калибровочно-инвариантный по построению вывод результатов. Все результаты в работе [12] выражены в терминах коэффициентов отражения для задач, где ТЕ и ТМ моды не перемешиваются после отражения электромагнитной волны от плоской границы между различными средами.

Граничный слой Черна-Саймонса вращает каждую поляризацию падающего электромагнитного поля после отражения от слоя, вращение поляризаций в данном случае описывается недиагональной матрицей отражения [37, 38]. Метод рассеяния функций Грина обобщен в этой работе на общую задачу недиагонального отражения применительно к получению потенциала Казимира-Полдера. Обобщенный формализм разработан и подробно представлен в данной работе.

Результат для потенциала Казимира-Полдера нейтрального анизотропного атома, взаимодействующего с плоским слоем Черна-Саймонса в вакууме, получен в работе [50]. В этом разделе обобщается результат [50] и выводится формула для потенциала Казимира-Полдера нейтрального анизотропного атома в его основном состоянии, расположенного на расстоянии z_0 от диэлектрического полупространства с плоским граничным слоем Черна-Саймонса.

Рассмотрим дипольный источник в точке $\mathbf{r}' = (0, 0, z_0)$, характеризующийся электрическим дипольным моментом $d^l(t)$ с компонентами плотности 4-тока [50]

$$\rho(t, \mathbf{r}) = -d^l(t)\partial_l\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1)$$

$$j^l(t, \mathbf{r}) = \partial_t d^l(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2)$$

Используем соотношение

$$D_{ij}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\langle T(\hat{E}_i(t, \mathbf{r})\hat{E}_j(t', \mathbf{r}')) \rangle \quad (3)$$

для полной электрической функции Грина. Полную электрическую функцию Грина можно найти из решения уравнений Максвелла в части электрического поля для электромагнитного поля, распространяющегося от дипольного источника (1),(2).

Определим атомную поляризуемость $\alpha_{ij}(\omega)$ согласно [66]:

$$\alpha_{ij}(t_1 - t_2) = i \langle T(\hat{d}_i(t_1), \hat{d}_j(t_2)) \rangle, \quad (4)$$

$$\alpha_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \alpha_{ij}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (5)$$

где $\hat{d}_i(t)$ в (4)—оператор электрического дипольного момента, а T указывает на то, что выражение должно быть вычислено путем упорядочения по времени. Чтобы найти потенциал Казимира-Полдера при нулевой температуре, можно использовать определение для изменения уровня энергии основного состояния ΔE_0 после добавления в действие взаимодействия \hat{V} в гамильтониан $H = H_0 + \hat{V}$ [67]:

$$\langle 0|\hat{S}|0\rangle = e^{-i\Delta E_0\tau}, \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

здесь $\tau = \tau_1 - \tau_2$ —временной интервал, который входит в стандартное определение $\hat{S}(\tau_1, \tau_2)$, \hat{S} -матрица, определенная в представлении взаимодействия [68]:

$$\hat{S}(\tau_1, \tau_2) \equiv \exp(iH_0\tau_1) \exp(-iH(\tau_1 - \tau_2)) \exp(-iH_0\tau_2), \quad (7)$$

$$\hat{S} \equiv \hat{S}(+\infty, -\infty) = T \exp(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{V}(t)). \quad (8)$$

Вакуумный элемент (6) содержит несвязанные диаграммы. Мы берем

$$\hat{V}(t) = \int d^3\mathbf{r} \hat{J}_\mu(t, \mathbf{r}) \hat{A}^\mu(t, \mathbf{r}) \quad (9)$$

с операторами $\hat{d}^l(t)$ в четырехтоковой плотности (1), (2) и получаем

$$\begin{aligned} \int dt \hat{V}(t) &= \int dt d^3\mathbf{r} \left(\hat{A}_l(t, \mathbf{r}) \partial_l \hat{d}^l(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \hat{A}_0(t, \mathbf{r}) \hat{d}^l(t) \partial_l \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) = \\ &= \int dt d^3\mathbf{r} ((\partial_l \hat{A}_0(t, \mathbf{r}) - \partial_0 \hat{A}_l(t, \mathbf{r})) \hat{d}^l(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = - \int dt \hat{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{d}}(t). \end{aligned} \quad (10)$$

В теории возмущений второго порядка мы используем (8)–(10), определения атомной поляризуемости(4), (5) и пропагатора электрического поля (3) для получения

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{S}^{(2)}|0\rangle &= \frac{1}{2} \iint dt dt' \alpha^{ij}(t - t') (D_{ij}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') - D_{ij}^{(0)}(t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')) \Big|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} = \\ &= \frac{\tau}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \alpha^{ij}(\omega) D_{ij}^E(|\omega|, \mathbf{r}', \mathbf{r}') = i\tau \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \alpha^{ij}(i\omega) D_{ij}^E(i\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (11)$$

В последнем равенстве (11) мы используем $\alpha_{ik}(\omega) = \alpha_{ki}(-\omega)$ [73] и после этого произведем поворот Вика. При выводе потенциала Казимира-Полдера нейтрального атома при наличии диэлектрического полупространства следует использовать разность между полным пропагатором с диэлектрическим полупространством и вакуумным пропагатором в положении

атома без диэлектрика. Этот расчет приводит к конечному значению потенциала Казимира-Полдера. В результате всегда требуется отраженная часть полного пропагатора, чтобы определить потенциал Казимира-Полдера. Отраженная часть пропагатора электрического поля определяется

$$D_{ij}^E(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') = D_{ij}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') - D_{ij}^{(0)}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (12)$$

Из (6) и (11) потенциал Казимира-Полдера определяется в терминах отраженной электрической функции Грина (12):

$$U(L) = - \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \alpha^{ij}(i\omega) D_{ij}^E(i\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'). \quad (13)$$

Подставим формулу Вейля [70]

$$\frac{e^{i\omega|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} = i \iint \frac{e^{i(k_x(x'-x)+k_y(y'-y)+\sqrt{\omega^2-k_x^2-k_y^2}(z'-z))}}{2\sqrt{\omega^2-k_x^2-k_y^2}} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2}, \quad (14)$$

справедливую для $z'-z > 0$, в решение уравнений для векторных потенциалов в калибровке Лоренца

$$(\Delta + \omega^2)\varphi(\omega, \mathbf{r}) = -\rho(\omega, \mathbf{r}), \quad (15)$$

$$(\Delta + \omega^2)\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = -\mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}). \quad (16)$$

Обозначим $\mathbf{k}_\parallel = (k_x, k_y)$. Тогда электрические и магнитные поля, распространяющиеся вниз от источника в точке $\mathbf{r}' = (0, 0, L)$, могут быть представлены в виде

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \int \left(\rho(\omega, \tilde{\mathbf{k}})\tilde{\mathbf{k}} - \omega\mathbf{j}(\omega, \tilde{\mathbf{k}}) \right) \frac{e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} e^{ik_z(L-z)}}{2k_z} \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2}, \quad (17)$$

$$\mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \int [\mathbf{j}(\omega, \tilde{\mathbf{k}}) \times \tilde{\mathbf{k}}] \frac{e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} e^{ik_z(L-z)}}{2k_z} \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2}, \quad (18)$$

где $k_z = \sqrt{\omega^2 - k_\parallel^2}$, $\tilde{\mathbf{k}} = (\mathbf{k}_\parallel, -k_z)$, $\rho(\omega, \tilde{\mathbf{k}})$ и $\mathbf{j}(\omega, \tilde{\mathbf{k}})$ —Фурье-компоненты источника.

Рассмотрим распространение электромагнитного поля от дипольного источника в точке $\mathbf{r}' = (0, 0, L)$ с электрическим дипольным моментом \mathbf{d} . В этом случае компоненты плотности тока дипольного источника должны быть записаны в виде (1), (2)

Заметим, что плотность тока (1), (2) удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_t \rho + \text{div} \mathbf{j} = 0$. Для точечного диполя (1), (2) следует подставить

$$\rho(\omega, \mathbf{k}) = -d^l \int \partial_l \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = i\mathbf{d} \cdot \mathbf{k} e^{ik_z L}, \quad (19)$$

$$j^l(\omega, \mathbf{k}) = -i\omega d^l \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = -i\omega d^l e^{ik_z L} \quad (20)$$

в уравнения (17) и (18).

Рассмотрим задачу дифракции на однородном диэлектрическом полупространстве $z < 0$ характеризующимся диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, и плоском граничном слое Черна-Саймонса при $z = 0$, описываемым действием

$$S_{CS} = \frac{a}{2} \int \varepsilon^{z\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma} dt dx dy. \quad (21)$$

Чтобы решить задачу дифракции, запишем электрическое и магнитное поля для $z > 0$ в виде

$$\mathbf{E}^1(\omega, \mathbf{r}) = \int \tilde{\mathbf{N}}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel}) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{-ik_z(z-z_0)} d^2\mathbf{k}_{\parallel} + \int \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel}) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{ik_z z} d^2\mathbf{k}_{\parallel}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{1}{\omega} \int [\tilde{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{N}}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel})] e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{-ik_z(z-z_0)} d^2\mathbf{k}_{\parallel} \\ &+ \frac{1}{\omega} \int [\mathbf{k} \times \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel})] e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{ik_z z} d^2\mathbf{k}_{\parallel}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\tilde{\mathbf{N}}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel}) = \frac{i}{8\pi^2 k_z} \left(-(\mathbf{d} \cdot \tilde{\mathbf{k}}) \tilde{\mathbf{k}} + \omega^2 \mathbf{d} \right). \quad (24)$$

Для $z < 0$ запишем электрическое и магнитное поля в виде

$$\mathbf{E}^2(\omega, \mathbf{r}) = \int \mathbf{u}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel}) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{-iK_z z} d^2\mathbf{k}_{\parallel}, \quad (25)$$

$$\mathbf{H}^2(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\omega} \int ([\mathbf{k}_{\parallel} \times \mathbf{u}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel})] - K_z [\mathbf{n} \times \mathbf{u}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel})]) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{-iK_z z} d^2\mathbf{k}_{\parallel}, \quad (26)$$

где $K_z = \sqrt{\varepsilon(\omega)\omega^2 - k_x^2 - k_y^2}$ и $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Неизвестные векторные функции $\mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel})$ и $\mathbf{u}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel})$ можно найти из системы уравнений на граничные условия, накладываемых на электрические и магнитные поля:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^0) = 0, \quad (27)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^2 = 0, \quad (28)$$

$$E_x^1|_{z=0} = E_x^2|_{z=0}, \quad (29)$$

$$E_y^1|_{z=0} = E_y^2|_{z=0}, \quad (30)$$

$$H_x^1|_{z=0+} - H_x^2|_{z=0-} = 2aE_x^1|_{z=0}, \quad (31)$$

$$H_y^1|_{z=0+} - H_y^2|_{z=0-} = 2aE_y^1|_{z=0}. \quad (32)$$

Граничные условия (31), (32) были рассмотрены при исследовании распространения плоской электромагнитной волны в среде с кусочно-постоянным аксионным полем [71] и в среде со слоями Черна-Саймонса [72]. Заметим, что параметр a пропорционален недиагональной части поверхностной проводимости [58]. При таком понимании частотная дисперсия $a(\omega)$ может быть рассмотрена в граничных условиях (31), (32). Чтобы упростить обозначения, мы не записываем явно частоту ω в $a(\omega)$ в дальнейшем. В формулах потенциала Казимира-Полдера мы неявно предполагаем зависимость $a(i\omega)$.

Удобно использовать полярные координаты в двумерном (k_x, k_y) импульсном пространстве и локальном ортогональном базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$, так что $\mathbf{k}_{\parallel} = k_r \mathbf{e}_r$, $k_r = |\mathbf{k}_{\parallel}|$. Запишем граничные условия в этом базисе

$$v_r k_r + k_z v_z = 0, \quad (33)$$

$$u_r k_r - K_z u_z = 0, \quad (34)$$

$$u_r = v_r + \tilde{N}_r e^{ik_z z_0}, \quad (35)$$

$$u_\theta = v_\theta + \tilde{N}_\theta e^{ik_z z_0}, \quad (36)$$

$$-k_z v_\theta + k_z \tilde{N}_\theta e^{ik_z z_0} - K_z u_\theta = 2\omega a u_r, \quad (37)$$

$$k_z v_r - k_r v_z - k_z \tilde{N}_r e^{ik_z z_0} - k_r \tilde{N}_z e^{ik_z z_0} + K_z u_r + k_r u_z = 2\omega a u_\theta \quad (38)$$

откуда

$$v_r = \left[-\frac{r_{TM} + a^2 T}{1 + a^2 T} \tilde{N}_r + \frac{k_z}{\omega} \frac{aT}{1 + a^2 T} \tilde{N}_\theta \right] e^{ik_z z_0}, \quad (39)$$

$$v_\theta = \left[-\frac{\omega}{k_z} \frac{aT}{1 + a^2 T} \tilde{N}_r + \frac{r_{TE} - a^2 T}{1 + a^2 T} \tilde{N}_\theta \right] e^{ik_z z_0}, \quad (40)$$

$$v_z = \frac{k_r}{k_z} \left[\frac{r_{TM} + a^2 T}{1 + a^2 T} \tilde{N}_r - \frac{k_z}{\omega} \frac{aT}{1 + a^2 T} \tilde{N}_\theta \right] e^{ik_z z_0}, \quad (41)$$

где r_{TM} , r_{TE} коэффициенты отражения Френеля

$$r_{TM}(\omega, k_r) = \frac{\varepsilon(\omega)k_z - K_z}{\varepsilon(\omega)k_z + K_z}, \quad r_{TE}(\omega, k_r) = \frac{k_z - K_z}{k_z + K_z} \quad (42)$$

и

$$T(\omega, k_r) = \frac{4k_z K_z}{(k_z + K_z)(\varepsilon(\omega)k_z + K_z)}. \quad (43)$$

Заметим, что зависимость коэффициентов отражения и пропускания от (ω, k_r) опускается в (39)-(41) для краткости.

На этом этапе удобно определить локальную матрицу R , полученную из уравнений (39), (40):

$$R(a, \varepsilon(\omega), \omega, k_r) \equiv \frac{1}{1 + a^2 T} \begin{pmatrix} -r_{TM} - a^2 T & \frac{k_z}{\omega} aT \\ -\frac{\omega}{k_z} aT & r_{TE} - a^2 T \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Чтобы найти отраженную часть электрического поля, следует использовать вращение между двумя локальными базисами и произвести замены

$$d_r = d_x \cos \theta + d_y \sin \theta, \quad (45)$$

$$d_\theta = d_x \sin \theta - d_y \cos \theta, \quad (46)$$

$$v_x = v_r \cos \theta + v_\theta \sin \theta, \quad (47)$$

$$v_y = v_r \sin \theta - v_\theta \cos \theta \quad (48)$$

для каждого \mathbf{k}_\parallel в отраженной части поля в выражении (22) с помощью (24), (39), (40), (41).

Поступая таким образом и отмечая, что

$$\tilde{N}_r = \frac{i}{8\pi^2} (k_z (d_x \cos \theta + d_y \sin \theta) + k_r d_z), \quad (49)$$

$$\tilde{N}_\theta = \frac{i}{8\pi^2} \frac{\omega^2}{k_z} (d_x \sin \theta - d_y \cos \theta), \quad (50)$$

мы получаем локальные вклады в декартовы компоненты отраженных электрических функций Грина для совпадающих аргументов в точке дипольного источника:

$$D_{xx}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\left(R_{11}k_z \cos \theta + R_{12} \frac{\omega^2}{k_z} \sin \theta \right) \cos \theta + \left(R_{21}k_z \cos \theta + R_{22} \frac{\omega^2}{k_z} \sin \theta \right) \sin \theta \right] e^{2ik_z z_0}, \quad (51)$$

$$D_{yy}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\left(R_{11}k_z \sin \theta - R_{12} \frac{\omega^2}{k_z} \cos \theta \right) \sin \theta - \left(R_{21}k_z \sin \theta - R_{22} \frac{\omega^2}{k_z} \cos \theta \right) \cos \theta \right] e^{2ik_z z_0}, \quad (52)$$

$$D_{zz}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = -\frac{i}{8\pi^2} \frac{k_r^2}{k_z} R_{11} e^{2ik_z z_0}, \quad (53)$$

$$D_{xy}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\left(R_{11}k_z \sin \theta - R_{12} \frac{\omega^2}{k_z} \cos \theta \right) \cos \theta + \left(R_{21}k_z \sin \theta - R_{22} \frac{\omega^2}{k_z} \cos \theta \right) \sin \theta \right] e^{2ik_z z_0}, \quad (54)$$

$$D_{yx}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[\left(R_{11}k_z \cos \theta + R_{12} \frac{\omega^2}{k_z} \sin \theta \right) \sin \theta - \left(R_{21}k_z \cos \theta + R_{22} \frac{\omega^2}{k_z} \sin \theta \right) \cos \theta \right] e^{2ik_z z_0}, \quad (55)$$

$$D_{xz}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[R_{11}k_r \cos \theta + R_{21}k_r \sin \theta \right] e^{2ik_z z_0}, \quad (56)$$

$$D_{zx}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[-R_{11}k_r \cos \theta + R_{21}k_r \sin \theta \right] e^{2ik_z z_0}, \quad (57)$$

$$D_{yz}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[R_{11}k_r \sin \theta - R_{21}k_r \cos \theta \right] e^{2ik_z z_0}, \quad (58)$$

$$D_{zy}^E(\omega, k_r, \theta, z = z' = z_0) = \frac{i}{8\pi^2} \left[-R_{11}k_r \sin \theta - R_{21}k_r \cos \theta \right] e^{2ik_z z_0}. \quad (59)$$

Потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома над диэлектрическим полупространством с плоским граничным слоем Черна-Саймонса определяется путем интегрирования выражений (51)-(59) в полярных координатах и использования формулы (13) (запишем отдельно вклады в потенциал Казимира-Полдера от различных компонент $\alpha_{ij}(i\omega)$):

$$U_{xx}(z_0) + U_{yy}(z_0) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty d\omega (\alpha_{xx}(i\omega) + \alpha_{yy}(i\omega)) \times \int_0^\infty dk_r k_r e^{-2k_z z_0} \left(\frac{r_{TM} + a^2 T}{1 + a^2 T} k_z - \frac{r_{TE} - a^2 T \omega^2}{1 + a^2 T} \frac{\omega^2}{k_z} \right), \quad (60)$$

$$U_{zz}(z_0) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \alpha_{zz}(i\omega) \int_0^\infty dk_r \frac{k_r^3}{k_z} e^{-2k_z z_0} \frac{r_{TM} + a^2 T}{1 + a^2 T}, \quad (61)$$

$$U_{xy}(z_0) + U_{yx}(z_0) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega \omega (\alpha_{xy}(i\omega) - \alpha_{yx}(i\omega)) \int_0^\infty dk_r k_r e^{-2k_z z_0} \frac{aT}{1 + a^2 T}, \quad (62)$$

$$U_{xz} = U_{zx} = U_{yz} = U_{zy} = 0. \quad (63)$$

Заметим, что потенциал Казимира-Полдера (60)-(63) имеет вклад антисимметричной части поляризуемости атомов [73]. Для плоского слоя Черна-Саймонса в вакууме результат [50] может быть выведен из формул (60)-(63).

3 Потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя диэлектрическими полупространствами с граничными слоями Черна-Саймонса

Геометрия двух плоскопараллельных слоев Черна-Саймонса в вакууме или на границах диэлектриков представляет особый интерес в связи с предсказанием режимов отталкивающего и притягивающего давления Казимира [36–39]. Для двух плоскопараллельных слоев Черна-Саймонса в вакууме и условия $a_1 = a_2$ отталкивание Казимира имеет место в интервале $a_1 \in [0, a_0]$, где $a_0 \approx 1.032502$ [36, 38], в то время как для $a_1 = -a_2$ притяжение Казимира имеет место для всех значений параметра a_1 [37].

Определенно важно исследовать аналогичную геометрию локально, вводя нейтральные атомы в полость с граничными слоями Черна-Саймонса. Потенциал Казимира-Полдера определяет квантовое взаимодействие анизотропного нейтрального атома в его основном состоянии со стенками полости, оно зависит от геометрии и материала полости. Локальное зондирование полости с плоскопараллельными границами нейтральными атомами действительно многообещающе с экспериментальной точки зрения, поскольку в этом случае удастся избежать ожидаемых проблем с параллелизмом при измерениях сил Казимира в геометриях с плоскопараллельными границами.

Рассмотрим два диэлектрических полупространства $z > d$, $z < 0$ с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ соответственно, и вакуумную щель $0 < z < d$ между ними. Два плоскопараллельных граничных слоя Черна-Саймонса расположены при $z = d$ и $z = 0$ и характеризуются параметрами $a_1(\omega)$ и $a_2(\omega)$ соответственно (см. обсуждение после (32)). Мы опускаем частотную дисперсию в $a_1(\omega)$, $a_2(\omega)$ для краткости в дальнейшем, как и ранее. Атом находится в точке $\mathbf{r}' = (0, 0, z_0)$, $0 < z_0 < d$ (см. Рис.1). В этом разделе мы получим общий результат для потенциала Казимира-Полдера нейтрального анизотропного атома в этой системе.

Удобно решать задачу дифракции для верхнего полупространства ($z \geq d$), когда нижнее полупространство отсутствует. Рассмотрим распространение вверх электромагнитного поля

от точечного диполя, расположенного в точке $\mathbf{r}' = (0, 0, z_0)$, $z_0 < d$. Для $z < d$ разложения для электрического и магнитного полей могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{E}^1(\omega, \mathbf{r}) = \int \mathbf{N} e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{ik_z(z-z_0)} d^2\mathbf{k}_{\parallel} + \int \mathbf{v}_1 e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{-ik_z z} d^2\mathbf{k}_{\parallel}, \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{1}{\omega} \int [\mathbf{k} \times \mathbf{N}] e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{ik_z(z-z_0)} d^2\mathbf{k}_{\parallel} \\ &+ \frac{1}{\omega} \int ([\mathbf{k}_{\parallel} \times \mathbf{v}_1] - k_z[\mathbf{n} \times \mathbf{v}_1]) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{-ik_z z} d^2\mathbf{k}_{\parallel}, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\mathbf{N} = \frac{i}{8\pi^2 k_z} (-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{d})\mathbf{k} + \omega^2 \mathbf{d}). \quad (66)$$

Векторные функции \mathbf{v}_1 зависят от ω , \mathbf{k}_{\parallel} , z_0 , d и дипольного момента \mathbf{d} . Для $z > d$ запишем прошедшие поля в виде:

$$\mathbf{E}^2(\omega, \mathbf{r}) = \int \mathbf{u}_1 e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{iK_{z1}z} d^2\mathbf{k}_{\parallel}, \quad (67)$$

$$\mathbf{H}^2(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\omega} \int ([\mathbf{k}_{\parallel} \times \mathbf{u}_1] + K_{z1}[\mathbf{n} \times \mathbf{u}_1]) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} e^{iK_{z1}z} d^2\mathbf{k}_{\parallel}. \quad (68)$$

Заметим, что параметр a_1 входит в граничные условия

$$H_x^2|_{z=d+} - H_x^1|_{z=d-} = 2a_1 E_x^1|_{z=d}, \quad (69)$$

$$H_y^2|_{z=d+} - H_y^1|_{z=d-} = 2a_1 E_y^1|_{z=d}. \quad (70)$$

По аналогии с разделом 2 получим:

$$v_{1r} = \left[-\frac{r_{TM_1} + a_1^2 T_1}{1 + a_1^2 T_1} N_r + \frac{k_z}{\omega} \frac{a_1 T_1}{1 + a_1^2 T_1} N_{\theta} \right] e^{ik_z(2d-z_0)}, \quad (71)$$

$$v_{1\theta} = \left[-\frac{\omega}{k_z} \frac{a_1 T_1}{1 + a_1^2 T_1} N_r + \frac{r_{TE_1} - a_1^2 T_1}{1 + a_1^2 T_1} N_{\theta} \right] e^{ik_z(2d-z_0)}, \quad (72)$$

$$v_{1z} = -\frac{k_r}{k_z} \left[\frac{r_{TM_1} + a_1^2 T_1}{1 + a_1^2 T_1} N_r - \frac{k_z}{\omega} \frac{a_1 T_1}{1 + a_1^2 T_1} N_{\theta} \right] e^{ik_z(2d-z_0)}, \quad (73)$$

где r_{TM_1} , r_{TE_1} , T_1 записываются для среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1(\omega)$.

Теперь перейдем к решению задачи дифракции, когда присутствуют оба полупространства. Удобно определить из (44) матрицы $R_1(\omega)$ и $R_2(\omega)$ для отражения тангенциальных составляющих электрического поля от сред выше и ниже точечного диполя соответственно в локальном базисе \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_{θ} , \mathbf{e}_z :

$$R_1(\omega) \equiv R(a_1, \varepsilon_1(\omega), \omega, k_r), \quad R_2(\omega) \equiv R(a_2, \varepsilon_2(\omega), \omega, k_r), \quad (74)$$

здесь среда для $z \leq 0$ обозначается индексом 2. Тогда тангенциальные локальные составляющие электрического поля в интервале $0 < z < d$ от точечного диполя (1),(2), расположенного в $(0, 0, z_0)$, выражаются в терминах матриц $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_r \\ E_{\theta} \end{pmatrix} &= \frac{e^{ik_z z}}{I - R_2 R_1 e^{2ik_z d}} \left[R_2 R_1 \begin{pmatrix} N_r \\ N_{\theta} \end{pmatrix} e^{ik_z(2d-z_0)} + R_2 \begin{pmatrix} \widetilde{N}_r \\ \widetilde{N}_{\theta} \end{pmatrix} e^{ik_z z_0} \right] \\ &+ \frac{e^{ik_z(2d-z)}}{I - R_1 R_2 e^{2ik_z d}} \left[R_1 R_2 \begin{pmatrix} \widetilde{N}_r \\ \widetilde{N}_{\theta} \end{pmatrix} e^{ik_z z_0} + R_1 \begin{pmatrix} N_r \\ N_{\theta} \end{pmatrix} e^{-ik_z z_0} \right], \end{aligned} \quad (75)$$

в (75) локальные компоненты электрического поля получены путем суммирования множественных отражений от сред с индексами 1 и 2.

Удобно определить матрицы, вводящие (75) после поворота Вика:

$$M^1 = (I - R_2(i\omega)R_1(i\omega)e^{-2k_z d})^{-1} R_2(i\omega)R_1(i\omega), \quad (76)$$

$$M^2 = (I - R_2(i\omega)R_1(i\omega)e^{-2k_z d})^{-1} R_2(i\omega), \quad (77)$$

$$M^3 = (I - R_1(i\omega)R_2(i\omega)e^{-2k_z d})^{-1} R_1(i\omega)R_2(i\omega), \quad (78)$$

$$M^4 = (I - R_1(i\omega)R_2(i\omega)e^{-2k_z d})^{-1} R_1(i\omega). \quad (79)$$

Компоненты отраженных электрических функций Грина могут быть выражены в терминах матриц (76)-(79), следуя схеме, явно представленной в уравнениях (51)-(59). После интегрирования по полярным координатам мы выражаем отраженные электрические функции Грина на мнимых частотах для совпадающих аргументов $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ в терминах матричных элементов матриц (76)-(79):

$$D_{xx}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = D_{yy}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dk_r k_r \times \left[k_z (e^{-2k_z d} M_{11}^1 + e^{-2k_z z_0} M_{11}^2 + e^{-2k_z d} M_{11}^3 + e^{-2k_z (d-z_0)} M_{11}^4) + \frac{\omega^2}{k_z} (e^{-2k_z d} M_{22}^1 + e^{-2k_z z_0} M_{22}^2 + e^{-2k_z d} M_{22}^3 + e^{-2k_z (d-z_0)} M_{22}^4) \right], \quad (80)$$

$$D_{zz}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dk_r \frac{k_r^3}{k_z} \times \left[-e^{-2k_z d} M_{11}^1 + e^{-2k_z z_0} M_{11}^2 - e^{-2k_z d} M_{11}^3 + e^{-2k_z (d-z_0)} M_{11}^4 \right], \quad (81)$$

$$D_{xy}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = -D_{yx}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dk_r k_r \times \left[-\frac{\omega^2}{k_z} (e^{-2k_z d} M_{12}^1 + e^{-2k_z z_0} M_{12}^2 + e^{-2k_z d} M_{12}^3 + e^{-2k_z (d-z_0)} M_{12}^4) + k_z (e^{-2k_z d} M_{21}^1 + e^{-2k_z z_0} M_{21}^2 + e^{-2k_z d} M_{21}^3 + e^{-2k_z (d-z_0)} M_{21}^4) \right], \quad (82)$$

$$D_{xz}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = D_{zx}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = D_{yz}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = D_{zy}^E(i\omega, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = 0. \quad (83)$$

Теперь можно подставить выражения (80)-(83) в формулу (13) и получить формулу для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя диэлектрическими полупространствами с плоскопараллельными граничными слоями Черна-Саймонса. Потенциал Казимира-Полдера в пределе $a_1, a_2 \rightarrow \infty$ получен в Приложение А.

4 Потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя слоями Черна-Саймонса в вакууме

В этом разделе получаются аналитические результаты для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса в вакууме, разделенными расстоянием d , атом расположен в точке $(0, 0, z_0)$. Слой, характеризующийся параметром a_1 , расположен в точке $z = d$, слой, характеризующийся параметром a_2 , расположен в точке $z = 0$.

В рассматриваемой системе $\varepsilon(\omega) = 1$ для $z < 0$ и $z > d$. В таком случае матрицы (76)-(79) принимают вид

$$M^1 = M^3 = -\frac{1}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2) \det[I - R_1 R_2 e^{-2k_z d}]} \times \begin{pmatrix} a_1 a_2 (1 - a_1 a_2 (1 - e^{-2k_z d})) & a_1 a_2 (a_1 + a_2) \frac{k_z}{\omega} \\ -a_1 a_2 (a_1 + a_2) \frac{\omega}{k_z} & a_1 a_2 (1 - a_1 a_2 (1 - e^{-2k_z d})) \end{pmatrix}, \quad (84)$$

$$M^2 = -\frac{1}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2) \det[I - R_1 R_2 e^{-2k_z d}]} \times \begin{pmatrix} a_2^2 (1 + a_1^2 (1 - e^{-2k_z d})) & -a_2 (1 + a_1^2 + a_1 a_2 e^{-2k_z d}) \frac{k_z}{\omega} \\ a_2 (1 + a_1^2 + a_1 a_2 e^{-2k_z d}) \frac{\omega}{k_z} & a_2^2 (1 + a_1^2 (1 - e^{-2k_z d})) \end{pmatrix}, \quad (85)$$

$$M^4 = -\frac{1}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2) \det[I - R_1 R_2 e^{-2k_z d}]} \times \begin{pmatrix} a_1^2 (1 + a_2^2 (1 - e^{-2k_z d})) & -a_1 (1 + a_2^2 + a_1 a_2 e^{-2k_z d}) \frac{k_z}{\omega} \\ a_1 (1 + a_2^2 + a_1 a_2 e^{-2k_z d}) \frac{\omega}{k_z} & a_1^2 (1 + a_2^2 (1 - e^{-2k_z d})) \end{pmatrix}, \quad (86)$$

где

$$\frac{1}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2) \det[I - R_1 R_2 e^{-2k_z d}]} = \frac{1}{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 e^{-2k_z d} + a_1^2 a_2^2 (1 - e^{-2k_z d})^2} = \frac{\gamma_1}{1 + \beta_1 y} + \frac{\gamma_2}{1 + \beta_2 y} \quad (87)$$

с $y = \exp(-2k_z d)$, $A = a_1^2 a_2^2$, $B = 2(a_1 a_2 - a_1^2 a_2^2)$, $C = (1 + a_1^2)(1 + a_2^2)$, $y_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = (a_1 a_2 - 1 \pm i(a_1 + a_2))/(a_1 a_2)$, $\beta_1 = -1/y_1$, $\beta_2 = -1/y_2$, $\gamma_1 = 1/(A y_1 (y_2 - y_1))$, $\gamma_2 = 1/(A y_2 (y_1 - y_2))$.

Разложение знаменателя в (87) на два члена приводит к аналитическому результату для потенциала Казимира-Полдера в терминах трансцендентных функций Лерча. Сделаем замену переменных:

$$\int_0^\infty k_r dk_r f(k_z) = \int_\omega^\infty k_z dk_z f(k_z) \quad (88)$$

и используем соотношение

$$G_0(\chi, \beta, \omega) \equiv \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-2k_z \chi}}{1 + \beta e^{-2k_z d}} dk_z = \frac{1}{2d} \int_0^{e^{-2\omega d}} \frac{y^{\frac{\chi}{d}-1}}{1 + \beta y} dy = \frac{e^{-2\omega \chi}}{2d} \Phi\left(-\beta e^{-2\omega d}, 1, \frac{\chi}{d}\right), \quad (89)$$

где $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ —трансцендентная функция Лерча. Производные по параметру χ определяются следующим образом:

$$G_1(\chi, \beta, \omega) \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{d\chi} G_0(\chi, \beta, \omega) = - \int_{\omega}^{\infty} k_z \frac{e^{-2k_z \chi}}{1 + \beta e^{-2k_z d}} dk_z, \quad (90)$$

$$G_2(\chi, \beta, \omega) \equiv \frac{1}{4} \frac{d^2}{d\chi^2} G_0(\chi, \beta, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} k_z^2 \frac{e^{-2k_z \chi}}{1 + \beta e^{-2k_z d}} dk_z. \quad (91)$$

Потенциал Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя слоями, определяется с использованием (13), (80)-(82), (84)-(87) и (89)-(91):

$$\begin{aligned} U_{xx}(z_0, d) + U_{yy}(z_0, d) &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_{i=1,2} \gamma_i \int_0^{\infty} d\omega (\alpha_{xx}(i\omega) + \alpha_{yy}(i\omega)) \\ &\times \left[-2a_1^2 a_2^2 G_2(2d, \beta_i, \omega) + 2(a_1^2 a_2^2 - a_1 a_2) G_2(d, \beta_i, \omega) - a_2^2 (1 + a_1^2) G_2(z_0, \beta_i, \omega) \right. \\ &+ a_1^2 a_2^2 G_2(z_0 + d, \beta_i, \omega) - a_1^2 (1 + a_2^2) G_2(d - z_0, \beta_i, \omega) + a_1^2 a_2^2 G_2(2d - z_0, \beta_i, \omega) \\ &+ \omega^2 \left(-2a_1^2 a_2^2 G_0(2d, \beta_i, \omega) + 2(a_1^2 a_2^2 - a_1 a_2) G_0(d, \beta_i, \omega) - a_2^2 (1 + a_1^2) G_0(z_0, \beta_i, \omega) \right. \\ &\left. \left. + a_1^2 a_2^2 G_0(z_0 + d, \beta_i, \omega) - a_1^2 (1 + a_2^2) G_0(d - z_0, \beta_i, \omega) + a_1^2 a_2^2 G_0(2d - z_0, \beta_i, \omega) \right) \right], \quad (92) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{zz}(z_0, d) &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i=1,2} \gamma_i \int_0^{\infty} d\omega \alpha_{zz}(i\omega) \\ &\times \left[2a_1^2 a_2^2 G_2(2d, \beta_i, \omega) - 2(a_1^2 a_2^2 - a_1 a_2) G_2(d, \beta_i, \omega) - a_2^2 (1 + a_1^2) G_2(z_0, \beta_i, \omega) \right. \\ &+ a_1^2 a_2^2 G_2(z_0 + d, \beta_i, \omega) - a_1^2 (1 + a_2^2) G_2(d - z_0, \beta_i, \omega) + a_1^2 a_2^2 G_2(2d - z_0, \beta_i, \omega) \\ &+ \omega^2 \left(-2a_1^2 a_2^2 G_0(2d, \beta_i, \omega) + 2(a_1^2 a_2^2 - a_1 a_2) G_0(d, \beta_i, \omega) + a_2^2 (1 + a_1^2) G_0(z_0, \beta_i, \omega) \right. \\ &\left. \left. - a_1^2 a_2^2 G_0(z_0 + d, \beta_i, \omega) + a_1^2 (1 + a_2^2) G_0(d - z_0, \beta_i, \omega) - a_1^2 a_2^2 G_0(2d - z_0, \beta_i, \omega) \right) \right], \quad (93) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{xy}(z_0, d) + U_{yx}(z_0, d) &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i=1,2} \gamma_i \int_0^{\infty} d\omega \omega (\alpha_{xy}(i\omega) - \alpha_{yx}(i\omega)) \\ &\times \left[-2a_1 a_2 (a_1 + a_2) G_1(2d, \beta_i, \omega) + a_2 (1 + a_1^2) G_1(z_0, \beta_i, \omega) + a_1 a_2^2 G_1(z_0 + d, \beta_i, \omega) \right. \\ &\left. + a_1 (1 + a_2^2) G_1(d - z_0, \beta_i, \omega) + a_2 a_1^2 G_1(2d - z_0, \beta_i, \omega) \right]. \quad (94) \end{aligned}$$

Компоненты потенциала Казимира-Полдера (92)-(94) можно выразить в терминах трансцендентных функций Лерча с использованием соотношений:

$$G_1(\chi, \beta, \omega) = -\frac{e^{-2\omega\chi}}{4d^2} \left(2\omega d \Phi\left(-\beta e^{-2\omega d}, 1, \frac{\chi}{d}\right) + \Phi\left(-\beta e^{-2\omega d}, 2, \frac{\chi}{d}\right) \right), \quad (95)$$

$$G_2(\chi, \beta, \omega) = \frac{e^{-2\omega\chi}}{4d^3} \left(2\omega^2 d^2 \Phi\left(-\beta e^{-2\omega d}, 1, \frac{\chi}{d}\right) + 2\omega d \Phi\left(-\beta e^{-2\omega d}, 2, \frac{\chi}{d}\right) + \Phi\left(-\beta e^{-2\omega d}, 3, \frac{\chi}{d}\right) \right). \quad (96)$$

На больших расстояниях атома от слоев $z_0, d - z_0 \gg \lambda_0 \equiv 2\pi/\omega_0, \lambda_1 \equiv 2\pi/\omega_1, \lambda_2 \equiv 2\pi/\omega_2$ (λ_0 - длина волны, соответствующая типичной частоте поглощения атома ω_0, λ_1 и λ_2 - длины волн слоев, соответствующие частотам поглощения ω_1, ω_2 слоев) потенциал Казимира-Полдера может быть получен аналитически для произвольных значений констант a_1, a_2 ($a_1 = a_1(0)$ и $a_2 = a_2(0)$ для $z_0, d - z_0 \gg \lambda_1, \lambda_2$). Замечая, что

$$\int_0^\infty d\omega G_2(\chi, \beta_i, \omega) = 3 \int_0^\infty d\omega \omega^2 G_0(\chi, \beta_i, \omega) = \frac{3}{8d^4} \Phi\left(y_i^{-1}, 4, \frac{\chi}{d}\right), \quad (97)$$

мы находим из (92), (93) потенциал Казимира-Полдера атома, находящегося между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса на больших расстояниях от слоев, являющихся вкладом от симметричной части поляризуемости атома:

$$U_s(z_0, d) = U_{s1}(z_0, d) + U_{s2}(d) = \frac{\alpha_{xx}(0) + \alpha_{yy}(0) + \alpha_{zz}(0)}{32\pi^2 d^4} \times \sum_{i=1,2} \gamma_i \left[-a_2^2(1 + a_1^2) \Phi\left(y_i^{-1}, 4, \frac{z_0}{d}\right) - a_1^2(1 + a_2^2) \Phi\left(y_i^{-1}, 4, \frac{d - z_0}{d}\right) + a_1^2 a_2^2 \Phi\left(y_i^{-1}, 4, \frac{d + z_0}{d}\right) + a_1^2 a_2^2 \Phi\left(y_i^{-1}, 4, \frac{2d - z_0}{d}\right) \right] + U_{s2}(d), \quad (98)$$

$$U_{s2}(d) = \frac{\alpha_{xx}(0) + \alpha_{yy}(0) - \alpha_{zz}(0)}{32\pi^2 d^4} \sum_{i=1,2} \text{Li}_4(y_i^{-1}) = \frac{\alpha_{xx}(0) + \alpha_{yy}(0) - \alpha_{zz}(0)}{32\pi^2 d^4} \left(\text{Li}_4\left(\frac{a_1 a_2}{(a_1 + i)(a_2 + i)}\right) + \text{Li}_4\left(\frac{a_1 a_2}{(a_1 - i)(a_2 - i)}\right) \right), \quad (99)$$

$\text{Li}_4(z)$ —полилогарифмическая функция. Формулу для $a_2 = -a_1$ можно найти из (98)

$$U_s(z_0, d) = \frac{\alpha_{xx}(0) + \alpha_{yy}(0) + \alpha_{zz}(0)}{32\pi^2 d^4} \times \left[-\frac{a_1^2}{1 + a_1^2} \left(\Phi_2\left(\frac{a_1^2}{1 + a_1^2}, 4, \frac{z_0}{d}\right) + \Phi_2\left(\frac{a_1^2}{1 + a_1^2}, 4, \frac{d - z_0}{d}\right) \right) + \frac{a_1^4}{(1 + a_1^2)^2} \left(\Phi_2\left(\frac{a_1^2}{1 + a_1^2}, 4, \frac{d + z_0}{d}\right) + \Phi_2\left(\frac{a_1^2}{1 + a_1^2}, 4, \frac{2d - z_0}{d}\right) \right) \right] + U_{s2}(d), \quad (100)$$

где

$$\Phi_2(z, s, \alpha) \equiv \Phi(z, s, \alpha) + z \frac{\partial \Phi(z, s, \alpha)}{\partial z}. \quad (101)$$

Чтобы найти главный вклад в потенциал Казимира-Полдера от антисимметричной части тензора атомной поляризуемости на больших расстояниях от слоев, достаточно учесть главный член в разложении антисимметричной части тензора поляризуемости для малых ω [50]: $\alpha_{xy}(\omega) - \alpha_{yx}(\omega) \simeq i\omega C_{as}$. Поступая таким образом, мы получаем из (94) главный вклад в потенциал Казимира-Полдера для атома, находящегося между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса на больших расстояниях от слоев, получающийся из антисимметричной части поляризуемости атомов:

$$U_{as}(z_0, d) = \frac{C_{as}}{32\pi^2 d^5} \sum_{i=1,2} \gamma_i \left[a_2(1+a_1^2) \Phi\left(y_i^{-1}, 5, \frac{z_0}{d}\right) + a_1(1+a_2^2) \Phi\left(y_i^{-1}, 5, \frac{d-z_0}{d}\right) + a_1 a_2^2 \Phi\left(y_i^{-1}, 5, \frac{d+z_0}{d}\right) + a_2 a_1^2 \Phi\left(y_i^{-1}, 5, \frac{2d-z_0}{d}\right) \right] + U_{as2}(d), \quad (102)$$

$$U_{as2}(d) = \frac{C_{as}}{16\pi^2 d^5} \Im(y_1 \text{Li}_5(y_1^{-1})). \quad (103)$$

Для $a_2 = -a_1$ можно найти из (102) и (103)

$$U_{as}(z_0, d) = \frac{C_{as}}{32\pi^2 d^5} \left[\frac{a_1}{1+a_1^2} \left(-\Phi_2\left(\frac{a_1^2}{1+a_1^2}, 5, \frac{z_0}{d}\right) + \Phi_2\left(\frac{a_1^2}{1+a_1^2}, 5, \frac{d-z_0}{d}\right) \right) + \frac{a_1^3}{(1+a_1^2)^2} \left(\Phi_2\left(\frac{a_1^2}{1+a_1^2}, 5, \frac{d+z_0}{d}\right) - \Phi_2\left(\frac{a_1^2}{1+a_1^2}, 5, \frac{2d-z_0}{d}\right) \right) \right]. \quad (104)$$

В пределе $a_1, a_2 \rightarrow \infty$ потенциал $U_s(z_0, d)$ согласуется с Бартоном [74] ($\rho = z_0/d$):

$$U_{id}(z_0, d) = -\frac{\pi^2}{96d^4} (\alpha_{xx}(0) + \alpha_{yy}(0) + \alpha_{zz}(0)) \frac{3 - 2 \sin^2(\pi\rho)}{\sin^4(\pi\rho)} + \frac{\pi^2}{1440d^4} (\alpha_{xx}(0) + \alpha_{yy}(0) - \alpha_{zz}(0)), \quad (105)$$

асимптотика $U_{s1}(z_0, d)$ при больших a_1, a_2 выводится в приложении В.

Используем (98) и (105) для получения отношения потенциала Казимира-Полдера нейтрального поляризуемого атома при наличии двух плоскопараллельных слоев Черна-Саймонса к потенциалу Казимира-Полдера атома при наличии двух идеально проводящих плоскопараллельных слоев ($a_1 \rightarrow \infty, a_2 \rightarrow \infty$). Соотношения U_s/U_{id} показаны на рис.2 для изотропного атома с $\alpha_{xx}(0) = \alpha_{yy}(0) = \alpha_{zz}(0)$ для $a_1 = a_2$ и $a_2 = 2a_1$ в интервале $a_1 \in [0, 3.5]$.

5 Р-нечетные вакуумные эффекты

Теперь рассмотрим самый интригующий результат работы — теоретическое предсказание Р-нечетных вакуумных эффектов трех тел. Под Р-нечетными эффектами трех тел подразумеваются физические эффекты, которые меняются после поворота одного из слоев Черна-Саймонса на 180 градусов при наличии нейтрального атома. В наших обозначениях поворот

одного из слоев на 180 градусов соответствует замене $a_1 \rightarrow -a_1$ (или $a_2 \rightarrow -a_2$) в потенциале Казимира-Полдера. Заметим, что в рассматриваемой модели нейтральный поляризуемый атом взаимодействует через квантово-электродинамическое дипольное взаимодействие с электромагнитным полем.

Из формул (98), (100), (105) мы найдем отношение потенциалов $U_s(z_0 = d/2, d, a_2 = a_1)$ и $U_s(z_0 = d/2, d, a_2 = -a_1)$ к потенциалу $U_{id}(z_0 = d/2, d)$ атома, находящегося между двумя идеально проводящими плоскопараллельными плоскостями, и представим эти соотношения для $\nu = a_1/\alpha \leq 10$ на рис.3. Заметим, что параметр ν квантуется в квантовых слоях Холла и изоляторах Черна. Значения аналогичных соотношений для больших значений ν могут быть получены из рис.2 и рис.4.

На рис.4 сравниваются потенциалы Казимира-Полдера изотропного атома для двух систем, отличающихся четностью одного из слоев Черна-Саймонса: $a_2 = a_1$ и $a_2 = -a_1$. Используются формулы (98), (100), чтобы найти отношение разности $\Delta U = U_s(z_0 = d/2, d, a_2 = -a_1) - U_s(z_0 = d/2, d, a_2 = a_1)$ к $\max \Delta U \approx 0,00587|U_{id}(z_0 = d/2, d)|$, $\max \Delta U$ находится при $a_1 \approx 0,678$, соотношение показано на рис.4. Интересно отметить, что отношение $\max \Delta U/|U_{id}(z_0 = d/2, d)| \approx 0,00587$ для $a_1 \approx 0,678$ ($\nu \approx 93$) даже больше, чем отношения, приведенные на рис.3 для $\nu = 10$.

Рассмотрим сначала рассуждения классической механики в мысленном эксперименте, который демонстрирует способ изучения Р-нечетных эффектов нейтральными атомами в системе из двух плоскопараллельных слоев Черна-Саймонса. Рассмотрим нейтральный атом, который начинает двигаться в свободном пространстве из точки A , удаленной от слоев, продолжает свое движение между слоями так, что $z_0 = d/2$, и, наконец, покидает пространство между слоями, достигая точки B в свободном пространстве вдали от слоев (A , z_0 и B находятся на одной прямой, параллельной слоям). Потенциал Казимира-Полдера атома между двумя слоями Черна-Саймонса в этом случае равен по абсолютной величине увеличению кинетической энергии атома между слоями. Атом перемещается между слоями с большей скоростью, чем его скорость в вакууме, разница во времени между полетами со слоями и без слоев Черна-Саймонса может быть измерена в экспериментах. Когда изменяется параметр a_1 (или a_2) путем изменения внешнего магнитного поля в случае квантового слоя Холла или путем выбора слоя с другим номером Черна в случае изолятора Черна изменяется квантовый вакуум и величина потенциала Казимира-Полдера. При этом изменяется время полета атома из точки A в точку B . Таким образом, измерение временных сдвигов при прохождении нейтральных атомов через щель между двумя слоями Черна-Саймонса - это прямой способ изучить энергетические сдвиги в потенциале Казимира-Полдера из-за изменений в a_1 , a_2 .

Другой возможностью изучения потенциала Казимира-Полдера является измерение числа атомов, проходящих через полость. Эксперимент с атомами натрия, проходящими через полость микронного размера, четко доказал существование силы Казимира-Полдера путем измерения интенсивности пучка атомов натрия, проходящего через полость, в зависимости от расстояния между границами полости. Эксперимент [75] можно рассматривать как

прототип экспериментов по измерению Р-нечетных вакуумных эффектов.

Можно также изучать квантовые эффекты распространения нейтральных атомов в щели между слоями Черна-Саймонса при наличии гравитационного поля. Комбинированный эффект квантового отражения нейтральных атомов и гравитационного поля Земли при распространении атомов через щель по аналогии с экспериментами с нейтронами [76, 77] должен расширить экспериментальные возможности в поисках темной материи. Заметим, что квантовое отражение атомов от жестких границ возникает из-за быстро меняющегося потенциала притяжения Казимира-Полдера [78]. Граничные слои Черна-Саймонса с Р-нечетными вакуумными эффектами открывают новые возможности в этом направлении исследований.

6 Заключение

В этой работе разработано принципиальное обобщение метода рассеяния функций Грина [12] для случая, когда невозможно выразить потенциал Казимира-Полдера в терминах диагональной матрицы отражения, состоящей из коэффициентов отражения для ТЕ и ТМ мод. Дифракция электромагнитной волны в системе с плоскопараллельным граничным слоем Черна-Саймонса описывается недиагональной матрицей отражения из-за вращения поляризации после отражения падающей электромагнитной волны от слоя [37, 38]. техника, разработанная в данной работе, используется для получения новых формул для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома при наличии диэлектрических полупространств с плоскопараллельными граничными слоями Черна-Саймонса.

Техника, разработанная в настоящей работе, может быть полезной для определения потенциала Казимира-Полдера анизотропного нейтрального атома, расположенного между любыми средами с плоскопараллельными границами, когда вращение поляризации происходит после отражения от границ. В общем, как только электрические и магнитные поля, отраженные от плоскопараллельной границы, определены, потенциал Казимира-Полдера анизотропного нейтрального атома в системе может быть найден с помощью техники, разработанной в этой работе. Следует подчеркнуть, что формализм полезен для анизотропного атома, расположенного в системе сред с плоскопараллельными границами.

Работа начинается с определения потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома при наличии диэлектрического полупространства с плоским слоем Черна-Саймонса на его границе, представлен результат в общих формулах (60)-(63). Далее представлен вывод общего результата для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя диэлектрическими полупространствами с плоскопараллельными граничными слоями Черна-Саймонса, результат задается выражениями (80)-(83) при подстановке в хорошо известную формулу (13). Этот общий результат затем используется для получения формул (92)-(94) для составляющих потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома, находящегося между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса в вакууме, выраженных через трансцендентные функции Лерча. Потенциал Казимира-Полдера атома, находящегося

между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса на больших расстояниях атома от обоих слоев, выражается через трансцендентные функции Лерча и полилогарифмы в формулах (98)-(104). Все эти результаты для потенциалов Казимира-Полдера являются новыми.

Знание формул для потенциала Казимира-Полдера анизотропного атома между слоями Черна-Саймонса в вакууме и на диэлектриках важны для точного сравнения теории и экспериментов, обсуждаемых в разделе 5. Квантование параметров a_1, a_2 в топологических изоляторах, изоляторах Черна и квантовых слоях Холла приводят к точному знанию потенциала Казимира-Полдера атома на больших расстояниях от границ полости с пограничными слоями Черна-Саймонса, что важно для планирования экспериментов и проведения точного сравнения теории и экспериментов.

Новые Р-нечетные эффекты для потенциала Казимира-Полдера между двумя плоскопараллельными слоями Черна-Саймонса в вакууме за счет замены $a_2 \rightarrow -a_2$ предсказаны и проанализированы в разделе 5. Р-нечетные эффекты возникают из-за взаимодействия трех тел между нейтральным атомом в его основном состоянии и двумя слоями Черна-Саймонса. Результаты демонстрируют, что нейтральный атом с КЭД-дипольным взаимодействием может стать эффективным инструментом для измерения Р-нечетных вакуумных эффектов из-за поворота одного из слоев Черна-Саймонса на 180 градусов. Предсказанная зависимость потенциала Казимира-Полдера нейтрального атома от поворота одного из слоев Черна-Саймонса в полости на 180 градусов предполагает интригующую фундаментальную экспериментальную проверку свойств квантового вакуума, основанную на вращении топологического материала.

А Идеально проводящие параллельные плоскости

В пределе $a_1, a_2 \rightarrow \infty$ находим вид (44), (76)-(79)

$$M^1 = M^3 = -M^2 = -M^4 = \frac{1}{1 - e^{-2k_z d}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (106)$$

При $a_1, a_2 \rightarrow \infty$ потенциал Казимира-Полдера нейтрального атома с частотной дисперсией поляризуемости получается из (13), (80), (81), (106):

$$\begin{aligned} U_2(z_0, d) = & - \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dk_r k_r}{2\pi} \frac{\exp(-2\sqrt{\omega^2 + k_r^2} z_0) + \exp(-2\sqrt{\omega^2 + k_r^2} (d - z_0))}{4\sqrt{\omega^2 + k_r^2} (1 - \exp(-2\sqrt{\omega^2 + k_r^2} d))} \\ & \times \left[(2\omega^2 + k_r^2) (\alpha_{xx}(i\omega) + \alpha_{yy}(i\omega)) + 2k_r^2 \alpha_{zz}(i\omega) \right] \\ & + \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dk_r k_r}{2\pi} \frac{\exp(-2\sqrt{\omega^2 + k_r^2} d)}{2\sqrt{\omega^2 + k_r^2} (1 - \exp(-2\sqrt{\omega^2 + k_r^2} d))} \\ & \times \left[(2\omega^2 + k_r^2) (\alpha_{xx}(i\omega) + \alpha_{yy}(i\omega)) - 2k_r^2 \alpha_{zz}(i\omega) \right]. \quad (107) \end{aligned}$$

Потенциал $U_2(z_0, d)$ (107) совпадает с потенциалом Казимира-Полдера нейтрального анизотропного атома между двумя идеально проводящими параллельными плоскостями [12].

В Асимптотики

На больших расстояниях атома от слоев Черна-Саймонса потенциал Казимира-Полдера определяется в (98). Рассмотрим асимптотику $U_{s1}(z_0, d)$ при больших a_1, a_2 . Можно использовать равенство $\gamma_1 + \gamma_2 = 1/((1 + a_1^2)(1 + a_2^2))$ и разложение $y_1^{-1} \sin y_2^{-1} \sim 1 - 1/a_1^2 - 1/a_2^2 - 1/(a_1 a_2)$ для

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \gamma_i \Phi(y_i^{-1}, s, \alpha) &= \frac{\Phi(y_2^{-1}, s, \alpha)}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)} + \gamma_1 (\Phi(y_1^{-1}, s, \alpha) - \Phi(y_2^{-1}, s, \alpha)) \\ &\approx \frac{\Phi(y_2^{-1}, s, \alpha) + \Phi'(y_2^{-1}, s, \alpha) y_1^{-1}}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)} \approx \frac{1}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)} \left[\Phi(1, s, \alpha) + \Phi'(1, s, \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) (2\Phi'(1, s, \alpha) + \Phi''(1, s, \alpha)) \right], \end{aligned} \quad (108)$$

производные в трансцендентных функциях Лерча берутся по первому аргументу. Удобно использовать интегральное представление трансцендентной функции Лерча

$$\Phi(z, s, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-\alpha t}}{1 - z e^{-t}} dt \quad (109)$$

и разложение (108) для выражения асимптотики $U_{s1}(z_0, d)$ в (98) для больших a_1, a_2 в терминах дзета-функции Гурвица $\zeta(s, \alpha) = \Phi(1, s, \alpha)$ согласно соотношению

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-\alpha t}}{(e^t - 1)^2} dt = \Gamma(s) [\zeta(s - 1, \alpha + 2) - (\alpha + 1)\zeta(s, \alpha + 2)] \quad (110)$$

далее ($\rho = z_0/d$):

$$\begin{aligned} U_{s1}(z_0, d) &\sim -\frac{\alpha_{xx}(0) + \alpha_{yy}(0) + \alpha_{zz}(0)}{32\pi^2 d^4} \left[\left(1 - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) (\zeta(4, \rho) + \zeta(4, 1 - \rho)) \right. \\ &\quad + \frac{1}{a_1^2} (\zeta(3, \rho) + (1 - \rho)\zeta(4, \rho)) + \frac{1}{a_2^2} (\zeta(3, 1 - \rho) + \rho\zeta(4, 1 - \rho)) \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) (\zeta(3, -\rho + 2) + \zeta(3, \rho + 1) \\ &\quad \left. + (\rho - 1)\zeta(4, 2 - \rho) - \rho\zeta(4, \rho + 1) \right]. \end{aligned} \quad (111)$$

Заметим, что асимптотика (111) содержит член, пропорциональный $1/(a_1 a_2)$, который меняет свой знак при повороте на 180 градусов одного из слоев Черна-Саймонса ($a_1 \rightarrow -a_1$ или $a_2 \rightarrow -a_2$). Отметим также, что

$$\zeta(4, \rho) + \zeta(4, 1 - \rho) = \frac{\pi^4}{3} \frac{3 - 2 \sin^2(\pi\rho)}{\sin^4(\pi\rho)}, \quad (112)$$

так что в пределе $a_1 \rightarrow \infty, a_2 \rightarrow \infty$ получается (105).

С Список литературы

- [1] H. B. G. Casimir and D. Polder, *The influence of retardation on the London-van der Waals forces*, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
- [2] H. B. G. Casimir, *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B **51**, 793 (1948).
- [3] E. M. Lifshitz, *The theory of molecular attractive forces between solids*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 94 (1955) [Sov. Phys. JETP **2**, 73 (1956)].
- [4] A. Lambrecht and V. N. Marachevsky, *Casimir interaction of dielectric gratings*, Phys. Rev. Lett. **101**, 160403 (2008).
- [5] A. Lambrecht and V. N. Marachevsky, *Theory of the Casimir effect in one-dimensional periodic dielectric systems*, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 1789 (2009).
- [6] M. Antezza, H. B. Chan, B. Guizal, V. N. Marachevsky, R. Messina, and M. Wang, *Giant Casimir torque between rotated gratings and the $\theta = 0$ anomaly*, Phys. Rev. Lett. **124**, 013903 (2020).
- [7] T. Emig, N. Graham, R. L. Jaffe, and M. Kardar, *Casimir forces between arbitrary compact objects*, Phys. Rev. Lett. **99**, 170403 (2007).
- [8] S. J. Rahi, T. Emig, N. Graham, R. L. Jaffe, and M. Kardar, *Scattering theory approach to electromagnetic Casimir forces*, Phys. Rev. D **80**, 085021 (2009).
- [9] T. Emig, R. L. Jaffe, M. Kardar, and A. Scardicchio, *Casimir interaction between a plate and a cylinder*, Phys. Rev. Lett. **96**, 080403 (2006).
- [10] A. Canaguier-Durand, P. A. Maia Neto, I. Cavero-Pelaez, A. Lambrecht, and S. Reynaud, *Casimir Interaction between Plane and Spherical Metallic Surfaces*, Phys. Rev. Lett. **102**, 230404 (2009).
- [11] M. Bordag and I. Pirozhenko, *Vacuum energy between a sphere and a plane at finite temperature*, Phys. Rev. D **81**, 085023 (2010).
- [12] V. N. Marachevsky and A. A. Sidelnikov, *Green functions scattering in the Casimir effect*, Universe **7**, 195 (2021).
- [13] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics, Part II* (Pergamon, Oxford, 1980).
- [14] Yu. S. Barash and V. L. Ginzburg, *Electromagnetic fluctuations in matter and molecular (Van-der-Waals) forces between them*, Sov. Phys. Usp. **18**, 305 (1975).

- [15] Yu. S. Barash and V. L. Ginzburg, *Some problems in the theory of Van der Waals forces*, Sov. Phys. Usp. **27**, 467 (1984).
- [16] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, *The Casimir effect*, Phys. Rep. **134**, 87 (1986).
- [17] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *New Developments in the Casimir Effect*, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
- [18] E. M. Santangelo, *Evaluation of Casimir energies through spectral functions*, Theor. Math. Phys. **131**, 527 (2002).
- [19] K. A. Milton, *The Casimir effect: recent controversies and progress*, J. Phys. A Math. Gen. **37**, R 209 (2004).
- [20] R. L. Jaffe, *Casimir effect and the quantum vacuum*, Phys. Rev. D **72**, 021301(R) (2005).
- [21] S. Scheel and S. Y. Buhmann, *Macroscopic quantum electrodynamics - concepts and applications*, Acta Phys. Slovaca **58**, 675 (2008).
- [22] G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *The Casimir force between real materials: experiment and theory*, Rev. Mod. Phys. **81**, 1827 (2009).
- [23] A. Rodriguez, F. Capasso, and S. Johnson, *The Casimir effect in microstructured geometries*, Nat. Photon. **5**, 211 (2011).
- [24] V. N. Marachevsky, *The Casimir effect: medium and geometry*, J. Phys. A Math. Theor. **45**, 374021 (2012).
- [25] L. M. Woods, D. A. R. Dalvit, A. Tkatchenko, P. Rodriguez-Lopez, A. W. Rodriguez, and R. Podgornik, *Materials perspective on Casimir and van der Waals interactions*, Rev. Mod. Phys. **88**, 045003 (2016).
- [26] L. M. Woods, M. Krüger, and V. V. Dodonov, *Perspective on Some Recent and Future Developments in Casimir Interactions*, Appl. Sci. **11**, 292 (2021).
- [27] B. -S. Lu, *The Casimir Effect in Topological Matter*, Universe **7**, 237 (2021).
- [28] E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions (Lecture Notes in Physics)* (Springer, Berlin/Heidelberg, 1995).
- [29] K. Kirsten, *Spectral Functions in Mathematics and Physics* (Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2002).
- [30] D. Fursaev and D. Vassilevich, *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory* (Springer, Dordrecht, 2011).
- [31] S. Y. Buhmann, *Dispersion Forces* (Springer, Berlin/Heidelberg, 2012), Vol. I–II.

- [32] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, and U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect* (Oxford University Press, Oxford, 2015).
- [33] K. A. Milton and Y. J. Ng, *Maxwell-Chern-Simons Casimir effect*, Phys. Rev. D **42**, 2875 (1990).
- [34] E. Elizalde and D. V. Vassilevich, *Heat kernel coefficients for Chern-Simons boundary conditions in QED*, Class. Quant. Grav. **16**, 813 (1999).
- [35] M. Bordag and D. V. Vassilevich, *Casimir force between Chern-Simons surfaces*, Phys. Lett. A **268**, 75 (2000).
- [36] V. N. Markov and Yu. M. Pis'mak, *Casimir effect for thin films in QED*, J. Phys. A Math. Gen. **39**, 6525 (2006).
- [37] V. N. Marachevsky, *Casimir effect for Chern-Simons layers in the vacuum*, Theor. Math. Phys. **190**, 315 (2017).
- [38] V. N. Marachevsky, *Casimir interaction of two dielectric half spaces with Chern-Simons boundary layers*, Phys. Rev. B **99**, 075420 (2019).
- [39] V. N. Marachevsky, *Chern-Simons boundary layers in the Casimir effect*, Mod. Phys. Lett. A **35**, 2040015 (2020).
- [40] I. Brevik, M. Lygren, and V. N. Marachevsky, *Casimir-Polder effect for a perfectly conducting wedge*, Ann. Phys.(N.Y.) **267**, 134 (1998).
- [41] R. Messina, D. A. R. Dalvit, P. A. Maia Neto, A. Lambrecht, and S. Reynaud, *Dispersive interactions between atoms and nonplanar surfaces*, Phys. Rev. A **80**, 022119 (2009).
- [42] H. Bender, C. Stehle, C. Zimmermann, S. Slama, J. Fiedler, S. Scheel, S. Y. Buhmann, and V. N. Marachevsky, *Probing atom-surface interactions by diffraction of Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. X **4**, 011029 (2014).
- [43] M. Levin, A. P. McCauley, A. W. Rodriguez, M. T. Homer Reid, and S. G. Johnson, *Casimir repulsion between metallic objects in vacuum*, Phys. Rev. Lett. **105**, 090403 (2010).
- [44] S. Y. Buhmann, V. N. Marachevsky, and S. Scheel, *Impact of anisotropy on the interaction of an atom with a one-dimensional nano-grating*, Int. J. Mod. Phys. A **31**, 1641029 (2016).
- [45] N. Khusnutdinov, R. Kashapov, and L. M. Woods, *Casimir-Polder effect for a stack of conductive planes*, Phys. Rev. A **94**, 012513 (2016).
- [46] N. Khusnutdinov, R. Kashapov, L. M. Woods, *Thermal Casimir and Casimir-Polder interactions in N parallel 2D Dirac materials*, 2D Mater. **5**, 035032 (2018).

- [47] I. V. Fialkovsky, V. N. Marachevsky, and D. V. Vassilevich, *Finite-temperature Casimir effect for graphene*, Phys. Rev. B **84**, 035446 (2011).
- [48] G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko, *Casimir and Casimir-Polder forces in graphene systems: quantum field theoretical description and thermodynamics*, Universe **6**, 150 (2020).
- [49] M. Antezza, I. Fialkovsky, and N. Khusnutdinov, *Casimir-Polder force and torque for anisotropic molecules close to conducting planes and their effect on CO₂*, Phys. Rev. B **102**, 195422 (2020).
- [50] V. N. Marachevsky and Yu. M. Pis'mak, *Casimir-Polder effect for a plane with Chern-Simons interaction*, Phys. Rev. D **81**, 065005 (2010).
- [51] S. Yu. Buhmann, V. N. Marachevsky, and S. Scheel, *Charge-parity-violating effects in Casimir-Polder potentials*, Phys. Rev. A **98**, 022510 (2018).
- [52] X. -L. Qi, R. Li, J. Zang, and S. -C. Zhang, *Inducing a magnetic monopole with topological surface states*, Science **323**, 1184 (2009).
- [53] A. G. Grushin and A. Cortijo, *Tunable Casimir repulsion with three-dimensional topological insulators*, Phys. Rev. Lett. **106**, 020403 (2011).
- [54] A. G. Grushin, P. Rodriguez-Lopez, and A. Cortijo, *Effect of finite temperature and uniaxial anisotropy on the Casimir effect with three-dimensional topological insulators*, Phys. Rev. B **84**, 045119 (2011).
- [55] L. Chen and S. Wan, *Casimir interaction between topological insulators with finite surface band gap*, Phys. Rev. B **84**, 075149 (2011).
- [56] L. Chen and S. Wan, *Critical surface band gap of repulsive Casimir interaction between three-dimensional topological insulators at finite temperature*, Phys. Rev. B **85**, 115102 (2012).
- [57] A. Martin-Ruiz, M. Cambiaso, and L. F. Urrutia, *A Green's function approach to the Casimir effect on topological insulators with planar symmetry*, EuroPhysLett. **113**, 60005 (2016).
- [58] I. Fialkovsky, N. Khusnutdinov, and D. Vassilevich, *Quest for Casimir repulsion between Chern-Simons surfaces*, Phys. Rev. B **97**, 165432 (2018).
- [59] H. Weng, R. Yu, X. Hu, X. Dai, and Z. Fang, *Quantum anomalous Hall effect and related topological electronic states*, Adv. Phys. **64**, 227 (2015).
- [60] C. -X. Liu, S. -C. Zhang, and X. -L. Qi, *The quantum anomalous Hall effect: theory and experiment*, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **7**, 301 (2016).

- [61] Y. Ren, Z. Qiao, and Q. Niu, *Topological phases in two-dimensional materials: a review*, Rep. Prog. Phys. **79**, 066501 (2016).
- [62] P. Rodriguez-Lopez and A. G. Grushin, *Repulsive Casimir effect with Chern insulators*, Phys. Rev. Lett. **112**, 056804 (2014).
- [63] Y. Muniz, C. Farina, and W. J. M. Kort-Kamp, *Casimir forces in the flatland: interplay between photoinduced phase transitions and quantum Hall physics*, Phys. Rev. Res. **3**, 023061 (2021).
- [64] W. -K. Tse and A. H. MacDonald, *Quantized Casimir force*, Phys. Rev. Lett. **109**, 236806 (2012).
- [65] F. Z. Ezawa, *Quantum Hall effects: field theoretical approach and related topics* (World Scientific, Singapore, 2008).
- [66] V.B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed. (Butterworth-Heinemann: Oxford, UK, 1982).
- [67] A. N. Vasiliev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistics* (Gordon and Breach: Amsterdam, The Netherlands, 1998).
- [68] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press: New York, USA 1996), Volume I.
- [69] V. N. Marachevsky and A. A. Sidelnikov, *Casimir-Polder interaction with Chern-Simons boundary layers*, Phys. Rev. D **107**, 105019 (2023).
- [70] H. Weyl, *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen uber einen Leiter*, Ann. Phys.(Berlin) **365**, 481 (1919).
- [71] Y. N. Obukhov and F. W. Hehl, *Measuring a piecewise constant axion field in classical electrodynamics*, Phys. Lett. A **341**, 357 (2005).
- [72] D. Yu. Pis'mak, Yu. M. Pis'mak, and F. J. Wegner, *Electromagnetic waves in a model with Chern-Simons potential*, Phys. Rev. E **92**, 013204 (2015).
- [73] I. B. Khriplovich, *Parity Nonconservation in Atomic Phenomena* (Gordon and Breach, Philadelphia, 1991).
- [74] G. Barton, *Quantum-electrodynamic level shifts between parallel mirrors: analysis*, Proc. R. Soc. Lond. A **410**, 141 (1987).
- [75] C. I. Sukenik, M. G. Boshier, D. Cho, V. Sandoghdar, and E. A. Hinds, *Measurement of the Casimir-Polder force*, Phys. Rev. Lett. **70**, 560 (1993).

- [76] V. V. Nesvizhevsky, H. G. Börner, A. M. Gagarski, A. K. Petoukhov, G. A. Petrov, H. Abele, S. Baeßler, G. Divkovic, F. J. Rueß, Th. Stöferle, A. Westphal, A. V. Strelkov, K. V. Protasov, and A. Yu. Voronin, *Measurement of quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field*, Phys. Rev. D **67**, 102002 (2003).
- [77] T. Jenke, G. Cronenberg, J. Burgdörfer, L. A. Chizhova, P. Geltenbort, A. N. Ivanov, T. Lauer, T. Lins, S. Rotter, H. Saul, U. Schmidt, and H. Abele, *Gravity resonance spectroscopy constrains dark energy and dark matter scenarios*, Phys. Rev. Lett. **112**, 151105 (2014).
- [78] G. Dufour, R. Guérout, A. Lambrecht, V. V. Nesvizhevsky, S. Reynaud, and A. Yu. Voronin, *Quantum reflection of antihydrogen from nanoporous media*, Phys. Rev. A **87**, 022506 (2013).

Перечень использованного оборудования, в том числе оборудования Научного парка СПбГУ

Работа выполнена с использованием ресурсов Научного Парка СПбГУ в вычислительном ресурсном центре СПбГУ, в частности, для научно-исследовательской работы были использованы пакеты Mathematica, Matlab Distributive Computing Server и кластер с видеоускорителем Nvidia Tesla K80.

Благодарности

Работа выполнена в рамках проведения программы научных исследований по гранту РФФИ No 22-13-00151 «К микроскопической теории формирования термодинамически устойчивых пузырьков и капелек вблизи твердой поверхности».

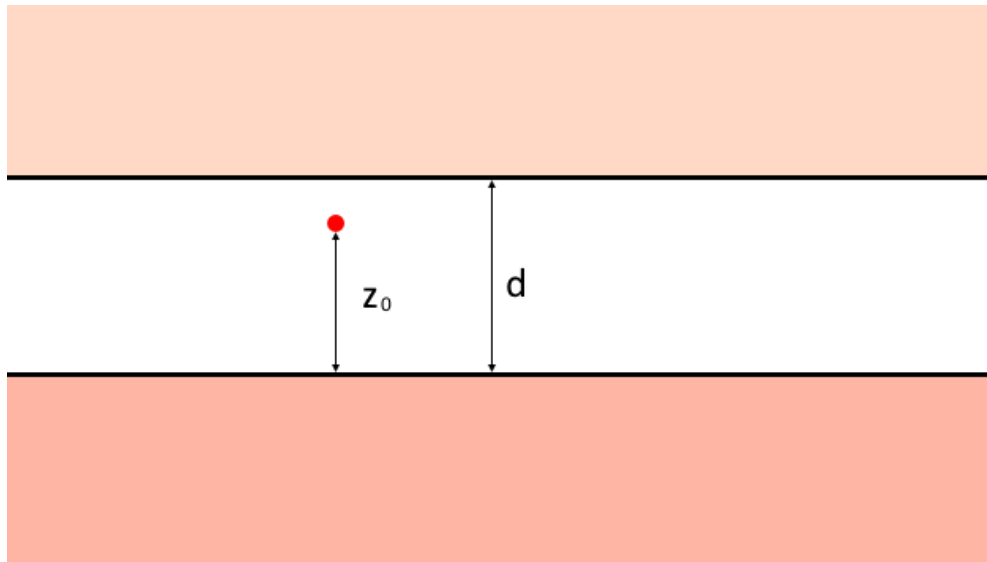


Рис. 1: Анизотропный нейтральный атом между двумя диэлектрическими полупространствами с плоскими граничными слоями Черна-Саймонса, z_0 - расстояние атома от слоя и диэлектрической среды, характеризуемых индексом 2, d - ширина вакуумной щели.

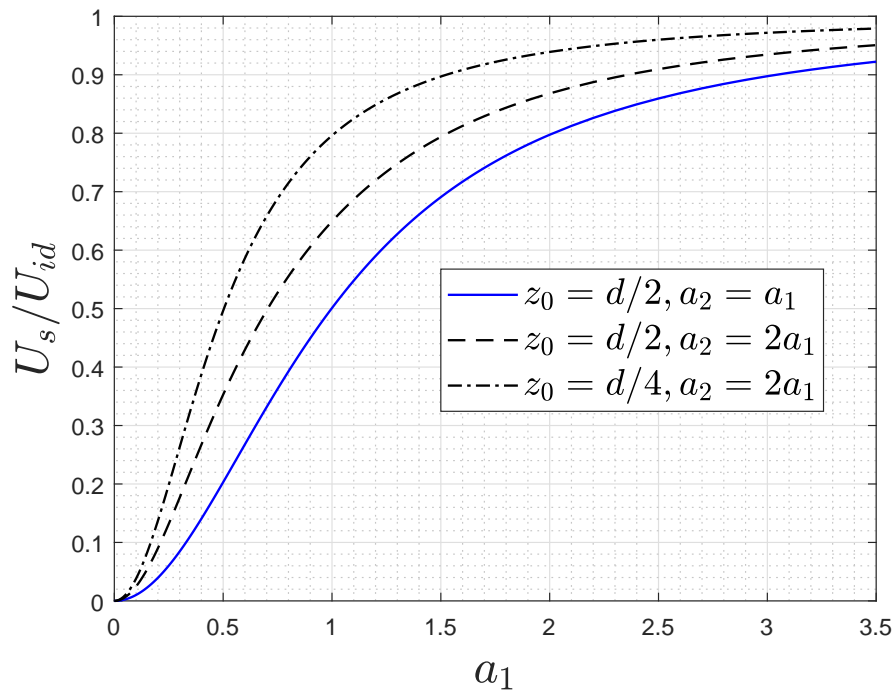


Рис. 2: Отношения потенциала Казимира-Полдера нейтрального поляризуемого изотропного атома, расположенного между двумя плоскими слоями Черна-Саймонса в вакууме $U_s(z_0, d)$, к потенциалу того же атома между двумя идеально проводящими плоскостями $U_{id}(z_0, d)$, здесь z_0 - расстояние атома от слоя, характеризуемого константой a_2 , d - расстояние между слоями.

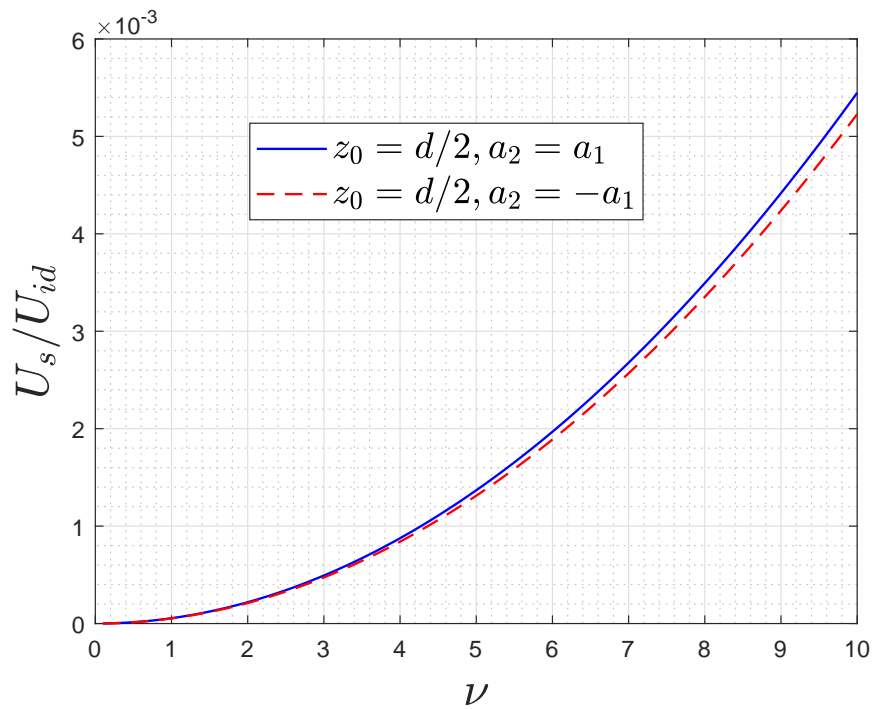


Рис. 3: Отношения потенциалов Казимира-Полдера $U_s(z_0, d)/U_{id}(z_0, d)$, отличающиеся поворотом слоя Черна-Саймонса на 180 градусов, характеризующимся параметром a_2 : $a_2 = a_1$ и $a_2 = -a_1$. Здесь z_0 - расстояние атома от слоя, характеризуемого константой a_2 , d - расстояние между слоями, безразмерный параметр $\nu = a_1/\alpha$ квантуется в квантовых слоях Холла и изоляторах Черна.

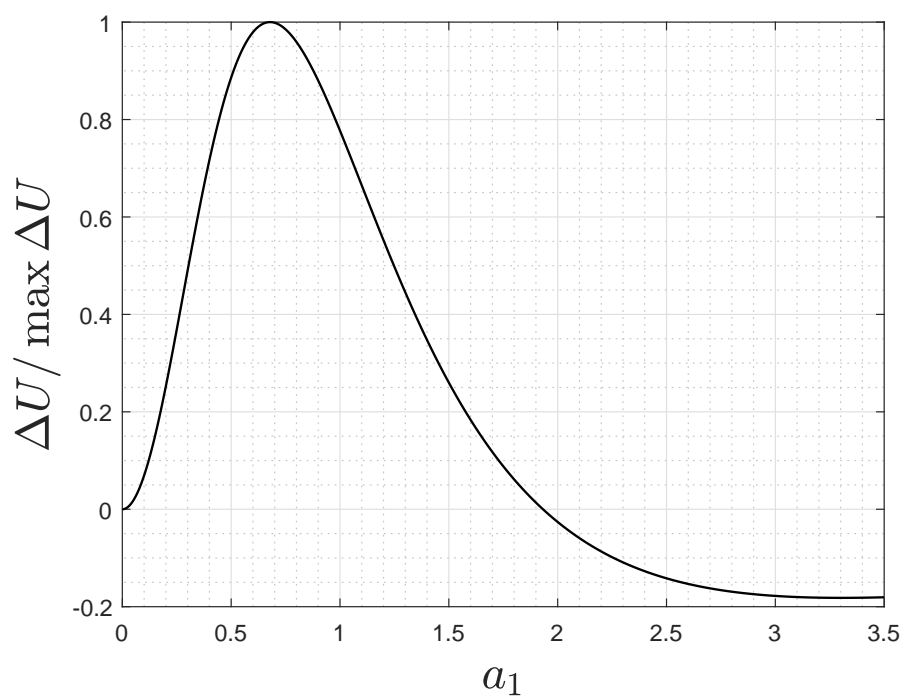


Рис. 4: Отношение $\Delta U = U_s(z_0 = d/2, d, a_2 = -a_1) - U_s(z_0 = d/2, d, a_2 = a_1)$ к $\max \Delta U \approx 0.00587|U_{id}(z_0 = d/2, d)|$, $\max \Delta U$ находится при $a_1 \approx 0.678$.