

Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет  
Кафедра радиофизики

**Фань Синчжэнь**

**Выпускная квалификационная работа**

**Излучение сгустка частиц, влетающего в среду и обладающего  
переменной величиной заряда**

Уровень образования: магистратура  
Направление 03.04.02 «Физика»  
Основная образовательная программа «Физика»

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., проф. Тюхтин А.В.

Рецензент:  
к.ф.-м.н., вед. научн. сотр. Батулин С.С.

Санкт-Петербург  
2023

# Содержание

Содержание.....	2
Введение.....	3
1. Общее решение задачи .....	5
1.1 Постановка задачи.....	5
1.2 Вынужденное поле .....	6
1.3 Свободное поле.....	12
2. Асимптотика поля в волновой зоне.....	15
2.1 Асимптотика поля в первой среде. ....	15
2.2 Асимптотика поля во второй среде. ....	21
2.2.1 Асимптотика вынужденного поля во второй среде. ....	22
2.2.2 Асимптотика свободного поля во второй среде.....	25
3. Сферическая волна.....	30
3.1. Энергетические характеристики сферической волны в первой среде .....	30
3.2. Энергетические характеристики сферической волны во второй среде .....	37
Заключение .....	46

## Введение

Настоящая работа посвящена аналитическому и численному исследованию излучения малого сгустка заряженных частиц с переменной величиной заряда, пересекающего границу раздела между двумя средами.

Заряженные частицы могут излучать электромагнитные волны за счет разных механизмов. В вакууме испускание электромагнитных волн происходит только при ускоренном движении заряженной частицы, но в среде излучение возможно и при движении заряда с постоянной скоростью [1-8]. В частности, если заряд пролетает на относительно небольшом расстоянии от какого-либо объекта, то будет генерироваться так называемое дифракционное излучение. Если заряд движется сквозь границу двух разных объектов, то наблюдается переходное излучение. Ещё один механизм излучения волн имеет место, когда скорость движения заряженной частицы больше фазовой скорости света в среде, – это излучение Вавилова-Черенкова (ИВЧ).

Проблемам электромагнитного излучения сгустков заряженных частиц в материальных средах посвящено огромное количество трудов, среди которых можно назвать ряд монографий, обзоров и учебных пособий [1–8]. Обычно в таких задачах предполагается, что сгусток частиц движется с постоянной скоростью, а величина его заряда не меняется в процессе движения. Исключение составляют задачи об излучении в диэлектрических волноведущих структурах, когда сгусток движется в вакуумном канале: в такой ситуации зачастую учитывается динамика пучка, связанная с воздействием полей частиц пучка на них самих [9].

Однако если сгусток движется непосредственно сквозь среду, то его частицы взаимодействуют с частицами среды, что ведет к тем или иным изменениям в пучке. В более-менее плотных средах это взаимодействие обычно является основной причиной, определяющей эволюцию пучка. Различные варианты этой эволюции описывались во множестве монографий и статей (см. [10–14] и приведенную там литературу).

В зависимости от массы и скорости частиц, плотности среды и других факторов возможно как быстрое отклонение частиц от прямолинейной траектории, приводящее к рассеиванию пучка, так и почти прямолинейное движение пучка. Последний вариант (известный как приближение «прямо вперед») характерен для пучков тяжелых частиц – протонов и ионов. Нужно отметить также, что эти частицы обычно теряют основную часть своей энергии на относительно коротком участке траектории, известном как «пик Брэгга» [10-13]. Из-за такой особенности пучки тяжелых частиц нашли широкое применение в медицине (протонная и ионная терапия [10 – 12]).

Закономерности, характеризующие прохождение пучков заряженных частиц через вещество, достаточно сложны и зависят от множества факторов (энергия, масса и заряд частиц пучка, плотность вещества и т.д.) [10 - 14]. В настоящей работе мы ограничимся следующей моделью. Будем считать, что каждая частица пучка движется с постоянной скоростью до некоторого момента, когда она мгновенно останавливается. Скорости всех частиц до момента остановки одинаковы. Однако сам момент остановки для разных частиц – разный. Это означает, что мы учитываем разброс пробегов частиц, связанный, в частности, со статистическим характером потерь энергии [10, 12].

Таким образом, в процессе движения пучка число частиц в нем уменьшается: частицы пучка тормозятся, фактически превращаясь из движущихся в неподвижные. Будем считать, что

на единице длины пробега сгустка останавливается определенная доля его частиц. Это означает, что заряд сгустка экспоненциально уменьшается со временем. Данная модель эволюции сгустка является одной из наиболее простых. Она позволяет полностью провести аналитический расчет генерируемого излучения и проследить основные физические эффекты.

Ранее мы анализировали излучение описанного сгустка с переменным зарядом при его движении в однородной безграничной среде [15, 16]. Для приложений большее значение имеет такая постановка задачи, когда пучок влетает из одной среды (свойства которой обычно близки к вакууму) в другую среду, обладающую относительно большим показателем преломления. На такой задаче мы сосредоточимся в настоящей работе.

В силу малой плотности первой среды будем считать, что заряд сгустка в ней не меняется. Во второй среде он остается практически постоянным до определенного момента времени, начиная с которого происходит его экспоненциальное уменьшение. Разумеется, случай совмещения момента влета с моментом начала «таяния» заряда также может быть рассмотрен в рамках данной модели. В описанной ситуации должно генерироваться излучение, являющееся, вообще говоря, комбинацией трех видов излучения: переходного излучения, излучения, обусловленного процессом изменения заряда, и, возможно, излучения Вавилова-Черенкова, если скорость сгустка достаточно велика.

# 1. Общее решение задачи

## 1.1 Постановка задачи

Мы будем анализировать излучение с длинами волн, существенно превышающими размер сгустка частиц. При этом его можно считать точечным зарядом, величина которого  $q$  зависит от времени. Скорость движения заряда  $\vec{v} = c\vec{\beta}$  будем считать постоянной. Для того, чтобы удовлетворялся закон сохранения заряда (уравнение непрерывности), надо ввести еще один «дополнительный» неподвижный источник с плотностью заряда  $\rho_1$  («след» исходного сгустка в среде). Совмещая ось  $z$  с линией движения сгустка, суммарные плотности заряда  $\rho_\Sigma$  и тока  $\vec{j}_\Sigma$  можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\rho_\Sigma &= \rho + \rho_1, \\ \rho &= q(t)\delta(x, y, z - vt), \\ \rho_1 &= -\left.\frac{dq(t')}{vdt'}\right|_{t'=z/v} \delta(x, y)\Theta(vt - z) = -\frac{dq(z/v)}{dz} \delta(x, y)\Theta(vt - z), \\ \vec{j}_\Sigma &= \vec{j} = v\rho\vec{e}_z.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Подставляя данные выражения в уравнение непрерывности  $\text{div } \vec{j}_\Sigma + \frac{\partial \rho_\Sigma}{\partial t} = 0$ , легко убедиться в том, что оно превращается в тождество.

Физически образование «следа» означает, что частицы пучка останавливаются из-за взаимодействия с частицами среды, то есть из движущихся превращаются в неподвижные (вследствие этого  $\vec{j}_1 = 0$ ). При этом с точки зрения макроскопической электродинамики не имеет значения детальное описание данного процесса. К примеру, это может быть рекомбинация электронов пучка с ионами (если среда является плазмой), остановка частиц за счет столкновений с нейтральными молекулами и т. д. Важен лишь сам факт образования в пространстве нитевидного заряда, «дополнительного» как по отношению к исходному сгустку, так и по отношению к тем зарядам, которые, возможно, существовали в среде ранее.

Предполагается, что сгусток частиц движется перпендикулярно границе раздела  $z = 0$  двух сред, влетая из среды 1 ( $z < 0$ ) в среду 2 ( $z > 0$ ) (рис. 1.). Обе среды считаются однородными линейными, стационарными, изотропными и не имеющими пространственной дисперсии (частотная дисперсия сред может иметь место). Среды характеризуются диэлектрическими ( $\epsilon_{1,2}$ ) и магнитными ( $\mu_{1,2}$ ) проницаемостями. Соответственно, волновые числа в этих средах равны  $k_{1,2} = k_0 n_{1,2}$ , где  $k_0 = \omega/c$  – волновое число в вакууме,  $n_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$  – комплексные показатели преломления сред. Изначально мы будем считать, что среды обладают некоторой проводимостью, т.е.  $\text{Im}\epsilon_{1,2} > 0$  при  $\omega > 0$  (в конечном итоге нас будет интересовать случай, когда проводимость столь мала, что поглощение излучения в среде несущественно).

Как правило, пучок влетает из менее плотной первой среды в более плотную вторую. Зачастую первая среда по своим свойствам близка к вакууму. Поэтому мы будем считать, что излучение Вавилова-Черенкова (ИВЧ) может генерироваться только во второй среде (это происходит, если скорость движения частиц превышает фазовую скорость волн во второй

среде). Тем не менее, мы будем учитывать, что первая среда имеет отличные от единицы диэлектрическую и магнитную проницаемости.

Мы будем рассматривать здесь только обычные («правые») среды, то есть полагаем, что вещественные значения показателей преломления имеют место только при вещественных положительных значениях обеих проницаемостей ( $\epsilon_{1,2} > 0$  и  $\mu_{1,2} > 0$ ). Случай «левой» среды, для которой обе проницаемости отрицательны в одном и том же частотном интервале, может быть рассмотрен аналогично, однако здесь мы его исключим из рассмотрения ради относительной компактности формул. Отметим, что излучение, генерируемое при влете не меняющегося со временем заряда в «левую» среду, подробно исследовано в работах [17, 18].

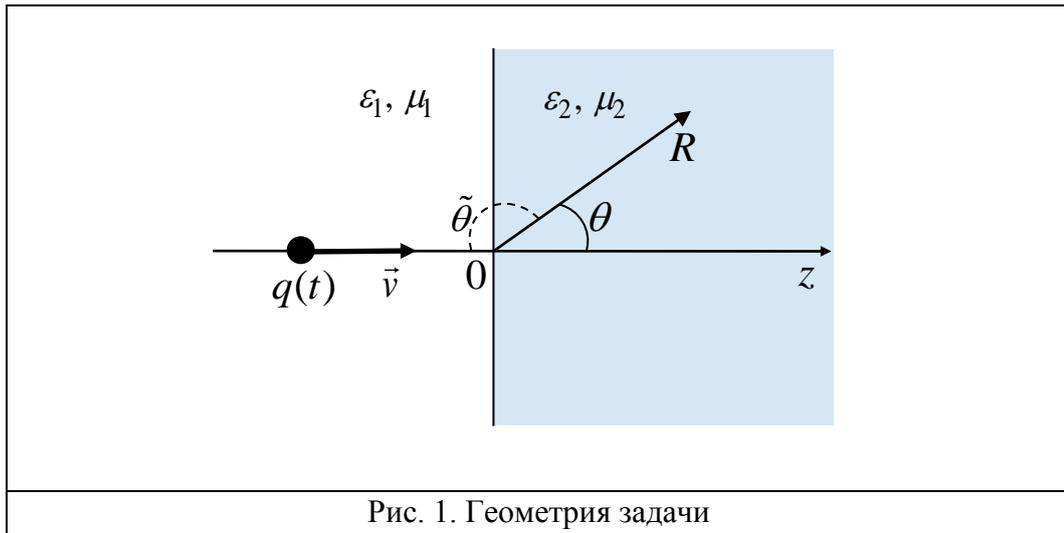


Рис. 1. Геометрия задачи

Будем считать, что заряд сгустка был постоянным ( $q = q_0$ ) до момента  $t = t_0 > 0$ , т. е. в среде 1 и, возможно, на некотором участке траектории в среде 2. При  $t > t_0$  происходит его уменьшение («таяние»). Положим, что за любой малый промежуток времени сгусток теряет одну ту же долю заряда, то есть  $dq/dt = q/\tau$ , где  $\tau = const$ . Решение этого уравнения дает

$$q(t) = \begin{cases} q_0 & \text{при } t < t_0, \\ q_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}, \quad (1.2)$$

Иначе (1.2) можно записать так:

$$q(z) = q_0 \Theta(vt_0 - z) + q_0 e^{-\frac{z-vt_0}{v\tau}} \Theta(z - vt_0), \quad (1.3)$$

где  $\Theta(\xi)$  - тета-функция Хэвисайда. Подставляя выражение для плотности «следа» заряда  $\rho_1$

$$\rho_1 = \frac{q_0}{v\tau} e^{-\frac{z-vt_0}{v\tau}} \delta(x, y) \Theta(vt - z) \Theta(z - vt_0). \quad (1.4)$$

## 1.2 Вынужденное поле

Пусть индекс 1 относится к области  $z < 0$ , а индекс 2 – к области  $z > 0$ . Полное поле в каждой из областей может быть представлено в следующем виде:

$$\vec{E}^{(1,2)} = \vec{E}^{q(1,2)} + \vec{E}^{b(1,2)}, \quad \vec{H}^{(1,2)} = \vec{H}^{q(1,2)} + \vec{H}^{b(1,2)}, \quad (1.5)$$

где, по терминологии В. Л. Гинзбурга [4], поле с верхним индексом «q» является «вынужденным» полем (т. е. полем заряда в однородной безграничной среде), а поле с индексом «b» – «свободным» полем, которое подчиняется однородным уравнениям Максвелла. В принципе имеется определенный произвол в выборе источников для вынужденного поля: для  $\vec{E}^{q(1)}$  источник может быть любым в области  $z > 0$ , а для  $\vec{E}^{q(2)}$  он может быть любым в области  $z < 0$ . Мы будем считать, что как  $\vec{E}^{q(1)}$ , так и  $\vec{E}^{q(2)}$  подчиняются системе уравнений Максвелла с одним и тем же источником, описываемым уравнениями (1.1) - (1.4).

Сначала мы представим вынужденное поле в обеих средах в таком виде, который удобен для реализации дальнейшей процедуры сшивания полей на границе раздела. В каждой из сред Фурье-образы полей малого сгустка заряженных частиц с любой переменной величиной заряда подчиняются системе уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}_\omega &= \frac{i\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_\omega, & \text{div } \vec{H}_\omega &= 0, \\ \text{rot } \vec{H}_\omega &= -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}_\omega + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\omega, & \text{div } \vec{E}_\omega &= \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \rho_{\Sigma\omega}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Введем векторный и скалярный потенциалы для Фурье-образов:

$$\vec{B}_\omega = \text{rot } \vec{A}_\omega, \quad \vec{E}_\omega = \frac{i\omega}{c} \vec{A}_\omega - \nabla \Phi_\omega. \quad (1.7)$$

С учетом калибровки Лоренца

$$\text{div } \vec{A}_\omega - \frac{i\omega\varepsilon\mu}{c} \Phi_\omega = 0, \quad (1.8)$$

получаем уравнение Гельмгольца

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} \right) \begin{Bmatrix} \vec{A}_\omega \\ \Phi_\omega \end{Bmatrix} = -4\pi \begin{Bmatrix} c^{-1} \mu \vec{j}_\omega \\ \varepsilon^{-1} \rho_{\Sigma\omega} \end{Bmatrix}, \quad (1.9)$$

где  $n^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)$ , а  $\vec{j}_\omega$  и  $\rho_{\Sigma\omega}$  - Фурье-образы плотности тока и заряда.

Будем решать задачу, применяя преобразование Фурье. Полное обратное преобразование Фурье имеет вид

$$F = \iiint d^3k \int d\omega F_{\omega, \vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{R} - i\omega t}, \quad (1.10)$$

а соответствующее прямое преобразование имеет вид

$$F_{\omega, \vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint d^3R \int dt F e^{-i\vec{k}\vec{R} + i\omega t}. \quad (1.11)$$

Отметим, что при отсутствии затухания в среде в интегралах типа (1.10) на вещественной оси частоты могут располагаться особенности подынтегрального выражения  $\omega = \omega_s$  (как правило, это полюса). Если  $\omega_s$  - вещественно, то возникает вопрос о том, как контур интегрирования должен обходить данные полюсы. Этот вопрос может быть решен, в частности, с помощью учета исчезающе малого затухания (диссипации) в среде [23]. Наличие диссипации приводит к тому, что вклад каждой особенности  $\omega = \omega_s$  в интеграл должен экспоненциально убывать с течением времени. Это будет обеспечено в том случае, если заменить  $\omega_s$  на  $\omega_s - i\delta$ ,

где  $\delta \rightarrow +0$ . При этом вклад полюса будет пропорционален  $\exp(-i\omega_s t - \delta t)$ , то есть условие его затухания будет выполнено. Такое смещение особенности с вещественной оси «вниз» эквивалентно обходу полюса контуром «сверху». Это требование будет автоматически выполнено, если считать, что контур интегрирования смещен в интегралах типа (1.10) смещен на бесконечно малую величину «вверх», то есть  $\text{Im } \omega = \delta \rightarrow +0$ . Данный вывод согласуется с выводом, получаемым как из принципа причинности, так и из условия излучения Мандельштама [23].

Найдем Фурье-образ плотности тока и заряда (1.1). Для Фурье-образа плотности неподвижного заряда («следа») получаем

$$\begin{aligned} \rho_{1\omega, \bar{k}} &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{\mathbb{R}^3} d^3 r \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{dq(t')}{v dt'} \Big|_{t'=z/v} \delta(x, y) \theta(vt - z) e^{-i\bar{k}\bar{r} + i\omega t} = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{dq(t')}{v dt'} \Big|_{t'=z/v} e^{-ik_z z} \int_{z/v}^{\infty} dt e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Интеграл по времени здесь сходится благодаря тому, что частота имеет малую мнимую часть. Проведя интегрирование, получаем

$$\rho_{1\omega, \bar{k}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{iv(\omega + i0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq(t')}{dt'} \Big|_{t'=\frac{z}{v}} e^{iz(\omega/v - k_z)} dz = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{i(\omega + i0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq(z/v)}{dz} e^{iz(\omega/v - k_z)} dz. \quad (1.13)$$

В этом выражении добавка  $+i0$  в знаменателе указывает на то, что при взятии обратного интеграла Фурье данный полюс обходится сверху.

Для функции  $q(t')$ , сделаем обратное преобразование Фурье и подставим в (1.13):

$$\begin{aligned} \rho_{1\omega, \bar{k}} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{iv(\omega + i0)} \int dz \frac{d}{dt'} \int q_{\omega'} e^{-i\omega' t'} d\omega' \Big|_{t'=\frac{z}{v}} e^{iz(\omega/v - k_z)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{iv(\omega + i0)} \int d\omega' (-i\omega') q_{\omega'} \int dz e^{i(\omega - \omega')z/v - ik_z z}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Используя интеграл  $\int dx e^{i\alpha x} = 2\pi\delta(\alpha)$ , имеем

$$\begin{aligned} \rho_{1\omega, \bar{k}} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{v(\omega + i0)} \int \omega' q_{\omega'} \delta(\omega/v - \omega'/v - k_z) d\omega' = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\omega + i0)} \int \omega' q_{\omega'} \delta(\omega' - (\omega - vk_z)) d\omega' = -\frac{\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\omega + i0)} q_{\Omega}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $\Omega = \omega - vk_z$ .

Подставив (1.1) в (1.11), для  $\rho$  и  $\vec{j}$  получаем

$$\begin{Bmatrix} \rho_{\omega, \bar{k}} \\ \vec{j}_{\omega, \bar{k}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^4} \begin{Bmatrix} 1 \\ v \end{Bmatrix} \iiint d^3 R \delta(x, y) \delta(z - vt) e^{-i\bar{k}\bar{R}} \int q(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{(2\pi)^4} \begin{Bmatrix} 1 \\ v \end{Bmatrix} \int q(t) e^{i(\omega - k_z v)t} dt. \quad (1.16)$$

В итоге имеем

$$\begin{Bmatrix} \rho_{\omega, \vec{k}} \\ j_{\omega, \vec{k}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^3} \begin{Bmatrix} 1 \\ v \end{Bmatrix} q_{\Omega}. \quad (1.17)$$

Суммируя Фурье-образы плотности заряда (1.15) и (1.17), получаем

$$\rho_{\Sigma\omega, \vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{vk_z}{\omega + i0} q_{\Omega}, \quad \vec{j}_{\omega, \vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} vq_{\Omega} \vec{e}_z, \quad (1.18)$$

где

$$q_{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int q(t) e^{i\Omega t} dt, \quad \Omega = \omega - vk_z. \quad (1.19)$$

Отметим, что в правильности полученного Фурье-образа (1.18) можно убедиться путем вычисления обратного интеграла Фурье, которое приводит к (1.1).

Используем обратное пространственное преобразование для функции типа  $F_{\omega}$ :

$$F_{\omega} = \int F_{\omega, \vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{R}} d^3k. \quad (1.20)$$

Подставляем формулы вида (1.20) для функций  $\vec{A}_{\omega}, \Phi_{\omega}, \rho_{\Sigma\omega}, \vec{j}_{\omega}$  в (1.9) и, приравнявая подынтегральные выражения, получаем:

$$\begin{Bmatrix} \vec{A}_{\omega, \vec{k}} \\ \Phi_{\omega, \vec{k}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi^2} \begin{Bmatrix} \mu(\omega) \vec{\beta} \\ k_z v \end{Bmatrix} \frac{q_{\Omega}}{k^2 - \left( \frac{\omega n(\omega)}{c} \right)^2}. \quad (1.21)$$

Таким образом, Фурье-образы векторного  $\vec{A}$  и скалярного  $\Phi$  потенциалов записываются в виде

$$\begin{Bmatrix} \vec{A}_{\omega} \\ \Phi_{\omega} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} dk_r \int_0^{2\pi} d\varphi_k \begin{Bmatrix} \mu \vec{\beta} \\ k_z v \end{Bmatrix} \frac{k_r q_{\Omega} \exp(ik_z z + ik_r r \cos(\varphi_k - \varphi))}{k_r^2 + k_z^2 - k^2}, \quad (1.22)$$

где  $q_{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int q(t) e^{i\Omega t} dt$ ,  $\Omega = \omega - vk_z$ . Внутренний интеграл в (1.22) равен [19]

$$\int_0^{2\pi} \exp(ik_r r \cos(\varphi_k - \varphi)) d\varphi_k = 2\pi J_0(k_r r), \text{ где } J_0(\xi) \text{ - функция Бесселя.}$$

Найдем Фурье-образ функции  $q(t)$  (1.2):

$$\begin{aligned} q_{\Omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{i\Omega t} dt = \frac{q_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \Theta(t_0 - t) + \Theta(t - t_0) e^{-(t-t_0)/\tau} \right] e^{i\Omega t} dt = \\ &= \frac{q_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 + \Theta(t - t_0) \left( e^{-(t-t_0)/\tau} - 1 \right) \right] e^{i\Omega t} dt = q_0 \left[ \delta(\Omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{+\infty} \left( e^{-(t-t_0)/\tau} - 1 \right) e^{i\Omega t} dt \right]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Используя тот факт, что величина  $\Omega$  имеет малую положительную мнимую часть, получаем

$$q_{\Omega} = q_0 \delta(\Omega) + \frac{q_0}{2\pi} \left( \frac{1}{i(\Omega + i0)} + \frac{\tau}{1 - i\Omega\tau} \right) e^{i\Omega t_0}. \quad (1.24)$$

В правильности (1.24) можно убедиться, вычисляя обратный интеграл Фурье.

Проведем расчет интеграла для потенциала  $\bar{A}$ . Подставляя (1.24) в (1.22), для Фурье-образа  $\bar{A}_\omega$  получаем

$$\bar{A}_\omega = \frac{\mu\bar{\beta}}{\pi} \int_0^{+\infty} dk_r k_r J_0(k_r r) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{e^{ik_z z}}{k_z^2 - \kappa^2} \left( q_0 \delta(\Omega) + \frac{q_0}{2\pi} \left( \frac{1}{i(\Omega + i0)} + \frac{\tau}{1 - i\Omega\tau} \right) e^{i\Omega t_0} \right), \quad (1.25)$$

где  $\kappa = \sqrt{\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - k_r^2}$ , ( $\text{Im } \kappa > 0$ ). Внутренний интеграл обозначим  $I$ . Вычисляя интеграл с дельта-функцией, получаем

$$I = \frac{q_0}{v} \frac{e^{\frac{i\omega}{v}z}}{k_r^2 - s^2} + \frac{q_0}{2\pi} e^{i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{e^{ik_z(z-vt_0)}}{k_z^2 - \kappa^2} \left( \frac{1}{i(\Omega + i0)} + \frac{\tau}{1 - i\Omega\tau} \right), \quad (1.26)$$

где  $s = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2}(n^2\beta^2 - 1)}$ , ( $\text{Im } s > 0$ ). Контур интегрирования в (1.26) можно дополнить до замкнутого полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной в верхней полуплоскости при  $z - vt_0 > 0$  и в нижней полуплоскости при  $z - vt_0 < 0$  (так как  $e^{ik_z(z-vt_0)}$  обращается в нуль при  $\text{Im } k_z \rightarrow +\infty$ , если  $z - vt_0 > 0$ , и при  $\text{Im } k_z \rightarrow -\infty$ , если  $z - vt_0 < 0$ ). После этого интеграл (1.26) легко вычисляется путем расчета вычета в полюсах  $k_z = \kappa$ ,  $\Omega = \omega - k_z v = -i0$ ,  $i\Omega\tau = 1$  при  $z - vt_0 > 0$  и в полюсе  $k_z = -\kappa$  при  $z - vt_0 < 0$  (рис. 2.).

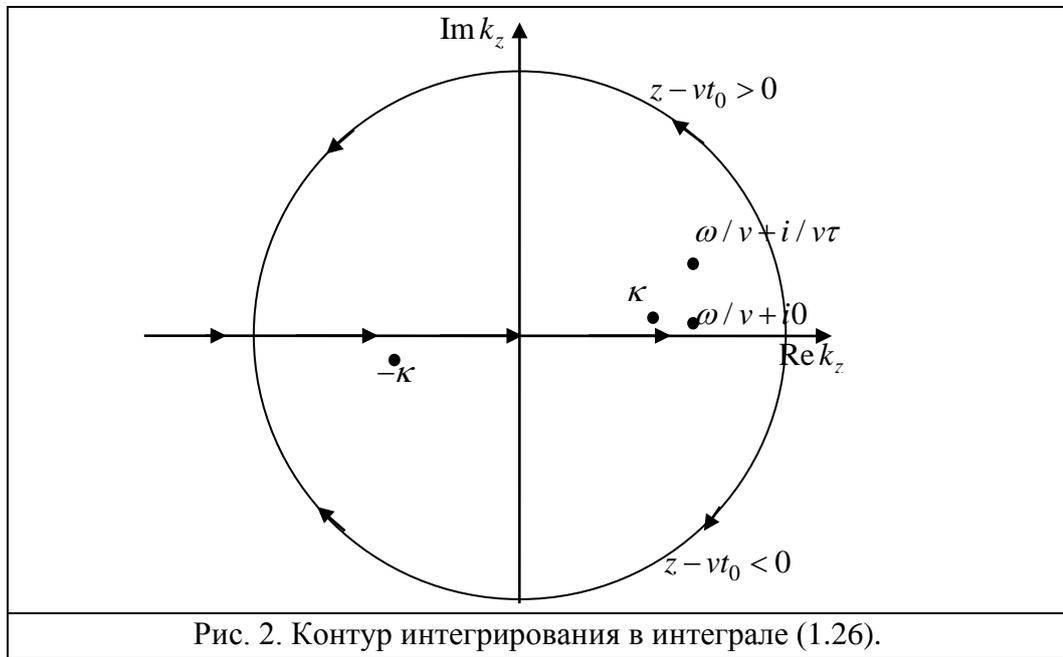


Рис. 2. Контур интегрирования в интеграле (1.26).

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \bar{A}_\omega = & \frac{\mu\bar{\beta}q_0}{\pi} \int_0^{+\infty} dk_r k_r J_0(k_r r) \left[ \frac{i}{2} \frac{e^{i\omega t_0}}{\kappa} e^{i\kappa|z-vt_0|} \left( \frac{\tau}{1-i\tau(\omega-\kappa v \operatorname{sgn}(z-vt_0))} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{i(\omega-\kappa v \operatorname{sgn}(z-vt_0)+i0)} \right) + \frac{e^{\frac{i\omega}{v}z}}{v} \left( \frac{\Theta(vt_0-z)}{k_r^2-s^2} + \frac{e^{-\frac{z-vt_0}{v\tau}} \Theta(z-vt_0)}{k_r^2-s^2 - \frac{1}{v^2\tau^2} + \frac{2\omega i}{v^2\tau}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Аналогичное выражение получается для Фурье-образ потенциала  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi_\omega = & \frac{q_0}{\varepsilon\pi} \int_0^{+\infty} dk_r k_r J_0(k_r r) \left[ \frac{i}{2} \frac{v}{\omega} e^{i\omega t_0} \operatorname{sgn}(z-vt_0) e^{i\kappa|z-vt_0|} \left( \frac{\tau}{1-i\tau(\omega-\kappa v \operatorname{sgn}(z-vt_0))} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{i(\omega-\kappa v \operatorname{sgn}(z-vt_0)+i0)} \right) + \frac{e^{\frac{i\omega}{v}z}}{v} \left( \frac{\Theta(vt_0-z)}{k_r^2-s^2} + \left(1 + \frac{i}{\omega\tau}\right) \frac{e^{-\frac{z-vt_0}{v\tau}} \Theta(z-vt_0)}{k_r^2-s^2 - \frac{1}{v^2\tau^2} + \frac{2\omega i}{v^2\tau}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Используем формулу  $J_0(k_r r) = \frac{1}{2} \left( H_0^{(1)}(k_r r) + H_0^{(2)}(k_r r) \right) = \frac{1}{2} \left( H_0^{(1)}(k_r r) - H_0^{(1)}(e^{i\pi} k_r r) \right)$  [19] и вычислим теперь компоненты поля по формуле (1.7). В итоге получаем

$$\begin{aligned} E_{r\omega}^{q(1,2)} = & \frac{q_0\omega}{2\pi c^2 \varepsilon_{1,2}} \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r k_r^2 H_1^{(1)}(k_r r) \left\{ \operatorname{sgn}(z-vt_0) \frac{i\beta}{2k_0^3} U_{1,2} e^{i\omega t_0} e^{i\kappa_{1,2}|z-vt_0|} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{i\omega z/v}}{k_0\beta} \left[ \frac{\Theta(vt_0-z)}{k_r^2-s_{1,2}^2} + \left(1 + \frac{i}{\omega\tau}\right) F_{1,2} \Theta(z-vt_0) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.29a)$$

$$\begin{aligned} E_{z\omega}^{q(1,2)} = & \frac{i q_0 \omega}{2\pi c^2} \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r k_r H_0^{(1)}(k_r r) \left\{ \frac{i\beta}{2k_0} U_{1,2} \left( \frac{\mu_{1,2}}{\kappa_{1,2}} - \frac{\kappa_{1,2}}{\varepsilon_{1,2} k_0^2} \right) e^{i\omega t_0} e^{i\kappa_{1,2}|z-vt_0|} + \right. \\ & \left. + e^{i\omega z/v} \left[ \frac{n_{1,2}^2 \beta^2 - 1}{\varepsilon_{1,2} \beta^2} \frac{\Theta(vt_0-z)}{k_r^2-s_{1,2}^2} + \left( \mu_{1,2} - \frac{(1+i(\omega\tau)^{-1})^2}{\varepsilon_{1,2} \beta^2} \right) F_{1,2} \Theta(z-vt_0) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.29b)$$

$$\begin{aligned} H_{\varphi\omega}^{q(1,2)} = & \frac{q_0\omega\beta}{2\pi c^2} \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r k_r^2 H_1^{(1)}(k_r r) \left\{ \frac{i}{2k_0^2 \kappa_{1,2}} U_{1,2} e^{i\omega t_0} e^{i\kappa_{1,2}|z-vt_0|} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_0\beta} e^{i\omega z/v} \left[ \frac{\Theta(vt_0-z)}{k_r^2-s_{1,2}^2} + F_{1,2} \Theta(z-vt_0) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.29c)$$

где  $k_0 = \omega/c$ ,

$$\begin{aligned} U_{1,2} = & \frac{\omega\tau}{1-i\tau(\omega-\kappa_{1,2}v \cdot \operatorname{sgn}(z-vt_0))} + \frac{\omega}{i(\omega-\kappa_{1,2}v \cdot \operatorname{sgn}(z-vt_0))} = \\ = & \frac{-i\omega}{\left[ 1-i\tau(\omega-\kappa_{1,2}v \cdot \operatorname{sgn}(z-vt_0)) \right] (\omega-\kappa_{1,2}v \cdot \operatorname{sgn}(z-vt_0))}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$F_{1,2} = \frac{e^{-(z-vt_0)/(v\tau)}}{k_r^2 - s_{1,2}^2 - \frac{1}{v^2\tau^2} + \frac{2\omega i}{v^2\tau}}. \quad (1.31)$$

Напомним, что  $\kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2 n_{1,2}^2}{c^2} - k_r^2}$ , ( $\text{Im } \kappa_{1,2} > 0$ ),  $s_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} (n_{1,2}^2 \beta^2 - 1)}$ , ( $\text{Im } s_{1,2} > 0$ ),  $H_0^{(1)}(k_r r)$  и  $H_1^{(1)}(k_r r)$  - функции Ханкеля нулевого и первого порядка соответственно,  $\Theta(z - vt_0)$  - единичная функция Хэвисайда.

Отметим, что представление вынужденного поля в виде (1.29) удобно для нас тем, что в нем отсутствует интеграл по нормальной к границе компоненте волнового вектора. При этом компоненты свободного поля будут записываться как интегралы по  $k_r$ , содержащие те же функции Ханкеля от  $k_r r$ .

### 1.3 Свободное поле

Свободное поле (позначим его верхним индексом “b”) описывается уравнениями Максвелла без источника:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}_\omega^b &= \frac{i\omega}{c} \mu(\omega) \vec{H}_\omega^b, & \text{div } \vec{H}_\omega^b &= 0, \\ \text{rot } \vec{H}_\omega^b &= -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E}_\omega^b, & \text{div } \varepsilon(\omega) \vec{E}_\omega^b &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Отсюда для Фурье-образа  $E_{z\omega, \vec{k}_r}^b \equiv E_{z\omega, k_x, k_y}^b$  вытекает уравнение [4, с.27]

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{z\omega, \vec{k}_r}^b(z) + \left( \frac{\omega^2 n^2}{c^2} - k_r^2 \right) E_{z\omega, \vec{k}_r}^b(z) = 0. \quad (1.33)$$

Его решение дает

$$E_{z\omega, \vec{k}_r}^b = C_\mp e^{\mp i\kappa z}, \quad (1.34)$$

где  $\kappa = \sqrt{\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - k_r^2}$ , ( $\text{Im } \kappa > 0$ ). Знак плюс соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ , а минус – соответственно, в отрицательном направлении оси  $z$ .

Ортогональная  $z$  компонента  $\vec{E}_{\perp\omega, \vec{k}_r}^b$  связана с компонентой  $E_{z\omega, \vec{k}_r}^b$  соотношением [4, с.26]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) \vec{E}_{\perp\omega, \vec{k}_r}^b(z) = i\vec{k}_r \frac{\partial}{\partial z} E_{z\omega, \vec{k}_r}^b(z). \quad (1.35)$$

Принимая во внимание зависимость от  $z$  в виде (1.37), получаем

$$\vec{E}_{\perp\omega, \vec{k}_r}^b(z) = \pm C_\mp \frac{\vec{k}_r \kappa}{k_r^2} e^{\mp i\kappa z}. \quad (1.36)$$

Используя цилиндрические координаты в исходном пространстве  $(r, \varphi, z)$  и в пространстве волновых векторов  $(k_r, \varphi_k, k_z)$ , имеем

$$\begin{aligned}
E_{r\omega, \bar{k}_r}^b(z) &= \pm C_{\mp} \cos(\varphi_k - \varphi) \frac{\kappa}{k_r} e^{\mp i\kappa z}, \\
E_{\varphi\omega, \bar{k}_r}^b(z) &= \pm C_{\mp} \sin(\varphi_k - \varphi) \frac{\kappa}{k_r} e^{\mp i\kappa z}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Запишем далее двукратные интегралы Фурье типа

$$F_{\omega} = \int_{\mathbb{R}^2} F_{\omega, \bar{k}_r} e^{i\bar{k}_r \bar{r}} dk_x dk_y = \int_0^{\infty} dk_r \cdot k_r \int_0^{2\pi} d\varphi_k F_{\omega, \bar{k}_r} \exp(ik_r r \cos(\varphi_k - \varphi)). \tag{1.38}$$

Интегрируя (1.36), (1.37) и используя при этом справочные интегралы по  $\varphi_k$  [19], получаем

$$\begin{aligned}
E_{r\omega}^b(z) &= \pm 2\pi i \int_0^{\infty} C_{\mp} \kappa J_1(k_r r) e^{\mp i\kappa z} dk_r, \\
E_{\varphi\omega}^b(z) &= 0, \\
E_{z\omega}^b &= 2\pi \int_0^{\infty} C_{\mp} k_r J_0(k_r r) e^{\mp i\kappa z} dk_r.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Из уравнений Максвелла (1.32) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{i\omega}{c} \mu H_{r\omega}^b &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_{z\omega}^b = 0, \\
\frac{i\omega}{c} \mu H_{\varphi\omega}^b &= \frac{\partial}{\partial z} E_{r\omega}^b - \frac{\partial}{\partial r} E_{z\omega}^b, \\
\frac{i\omega}{c} \mu H_{z\omega}^b &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_{r\omega}^b = 0,
\end{aligned} \tag{1.40}$$

следовательно,

$$H_{\varphi\omega}^b = -2\pi i \int_0^{\infty} \frac{\omega \varepsilon}{c} C_{\mp} J_1(k_r r) e^{\mp i\kappa z} dk_r. \tag{1.41}$$

Используем соотношения [19]:

$$\begin{aligned}
J_0(k_r r) &= \frac{1}{2} \left( H_0^{(1)}(k_r r) + H_0^{(2)}(k_r r) \right) = \frac{1}{2} \left( H_0^{(1)}(k_r r) - H_0^{(1)}(e^{i\pi} k_r r) \right) \\
J_1(k_r r) &= \frac{1}{2} \left( H_1^{(1)}(k_r r) + H_1^{(2)}(k_r r) \right) = \frac{1}{2} \left( H_1^{(1)}(k_r r) - e^{i\pi} H_1^{(1)}(e^{i\pi} k_r r) \right).
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Получаем три ненулевые компоненты свободного поля с неизвестными коэффициентами  $C_{\pm}$  в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r\omega}^{b(1,2)} \\ E_{z\omega}^{b(1,2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1,2)} \end{array} \right\} = \pi \int_{e^{i\pi\infty}}^{+\infty} dk_r \left\{ \begin{array}{l} \pm i\kappa_{1,2} H_1^{(1)}(k_r r) \\ k_r H_0^{(1)}(k_r r) \\ -i \frac{\omega \varepsilon_{1,2}}{c} H_1^{(1)}(k_r r) \end{array} \right\} C_{\mp}(\omega, k_r) e^{i\kappa_{1,2}|z|}, \tag{1.43}$$

где  $\kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2 n_{1,2}^2}{c^2} - k_r^2}$ , ( $\text{Im } \kappa_{1,2} > 0$ ). Верхний знак относится к 1 среде, нижний знак соответствует 2 среде.

Для нахождения коэффициентов  $C_{\pm}$ , будем использовать условия на границе  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 E_{z\omega}^{(1)} \Big|_{z=0} &= \varepsilon_2 E_{z\omega}^{(2)} \Big|_{z=0}, \\ E_{r\omega}^{(1)} \Big|_{z=0} &= E_{r\omega}^{(2)} \Big|_{z=0}.\end{aligned}\tag{1.44}$$

Подставляя (1.29) и (1.45) в (1.46), для коэффициентов  $C_{\pm}$  получаем

$$\begin{aligned}C_+ &= \frac{q_0 \omega}{2\pi^2 c^2} \frac{i}{\varepsilon_2 \kappa_1 + \varepsilon_1 \kappa_2} \left[ \left( \frac{n_1^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_1 + \frac{1}{k_0 \beta} k_r^2 \right) \frac{1}{k_r^2 - s_1^2} - \left( \frac{n_2^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_1 + \frac{\varepsilon_1}{k_0 \beta \varepsilon_2} k_r^2 \right) \frac{1}{k_r^2 - s_2^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\beta}{2k_0^3} e^{i\omega t_0} \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) k_r^2 \tilde{U}_2 e^{i\kappa_2 v t_0} \right],\end{aligned}\tag{1.45a}$$

$$\begin{aligned}C_- &= -\frac{q_0 \omega}{2\pi^2 c^2} \frac{i}{\varepsilon_1 \kappa_2 + \varepsilon_2 \kappa_1} \left[ \left( \frac{n_1^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_2 - \frac{\varepsilon_2}{k_0 \beta \varepsilon_1} k_r^2 \right) \frac{1}{k_r^2 - s_1^2} - \left( \frac{n_2^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_2 - \frac{1}{k_0 \beta} k_r^2 \right) \frac{1}{k_r^2 - s_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\beta}{2k_0^3} e^{i\omega t_0} \left[ \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) k_r^2 \tilde{U}_1 e^{i\kappa_1 v t_0} - 2k_r^2 \tilde{U}_2 e^{i\kappa_2 v t_0} \right] \right],\end{aligned}\tag{1.45b}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{1,2} &= \frac{\omega \tau}{1 - i\tau(\omega + \kappa_{1,2} v)} + \frac{\omega}{i(\omega + \kappa_{1,2} v)} = \frac{-i\omega}{[1 - i\tau(\omega + \kappa_{1,2} v)](\omega + \kappa_{1,2} v)}, \\ \kappa_{1,2} &= \sqrt{\frac{\omega^2 n_{1,2}^2}{c^2} - k_r^2}, \quad (\text{Im } \kappa_{1,2} > 0).\end{aligned}\tag{1.46}$$

Отметим, что при совпадении сред 1 и 2 граница раздел отсутствует и, следовательно, поле представляет собой поле экспоненциально убывающего заряда в однородной среде, т.е. свободное поле должно исчезать. Действительно, при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$  имеем

$$C_+ = C_- = 0,\tag{1.47}$$

## 2. Асимптотика поля в волновой зоне.

### 2.1 Асимптотика поля в первой среде.

Рассмотрим сначала поле в среде 1 ( $z < 0$ ). Введем сферические координаты  $R, \theta$  (см. рис. 1):  $r = R \sin \theta$ ,  $z = R \cos \theta$ . Также введем новую комплексную переменную интегрирования  $\chi$  такую, что  $k_r = k_1 \sin \chi$ ; при этом  $\kappa_1 = k_1 \cos \chi$ . На плоскости переменной  $\chi$  точки ветвления  $k_r = \pm k_1$  для  $\kappa_1$  исчезают (но точки ветвления  $k_r = \pm k_2$  для  $\kappa_2$  сохраняются). Имеем:

$$k_r = k_1 \sin \chi = \frac{\omega n_1}{c} (\sin(\operatorname{Re} \chi) \operatorname{ch}(\operatorname{Im} \chi) + i \cos(\operatorname{Re} \chi) \operatorname{sh}(\operatorname{Im} \chi)). \quad (2.1)$$

Установим соответствие квадрантов на плоскости  $k_r$  областям на плоскости  $\chi$ . В силу периодичности относительно  $\operatorname{Re} \chi$  достаточно рассмотреть область  $-\pi/2 \leq \operatorname{Re} \chi \leq 3\pi/2$ . В квадранте I имеем  $\operatorname{Re} k_r > 0$ ,  $\operatorname{Im} k_r > 0$ , т. е.  $\sin(\operatorname{Re} \chi) \operatorname{ch}(\operatorname{Im} \chi) > 0$ ,  $\cos(\operatorname{Re} \chi) \operatorname{sh}(\operatorname{Im} \chi) > 0$ . Следовательно, квадрант I соответствует областям  $\operatorname{Re} \chi \in (0, \pi/2)$ ,  $\operatorname{Im} \chi > 0$  и  $\operatorname{Re} \chi \in (\pi/2, \pi)$ ,  $\operatorname{Im} \chi < 0$ . Для «верхнего» (физического) листа римановой поверхности,  $\operatorname{Im} \kappa_1 > 0$  следовательно,  $\operatorname{Im} \kappa_1 = \operatorname{Im}(\cos(\chi)) = -\sin(\operatorname{Re} \chi) \operatorname{sh}(\operatorname{Im} \chi) > 0$ , т. е.  $\operatorname{Re} \chi \in (-\pi/2, 0) \cup (\pi, 3\pi/2)$ ,  $\operatorname{Im} \chi > 0$  и  $\operatorname{Re} \chi \in (0, \pi)$ ,  $\operatorname{Im} \chi < 0$ . Отсюда находим область, в которой выполняются оба условия:  $\operatorname{Re} \chi \in (\pi/2, \pi)$ ,  $\operatorname{Im} \chi < 0$ . Аналогичным образом получаются все остальные квадранты верхнего листа плоскости  $k_r$  на плоскости  $\chi$ : квадрант II соответствует области  $\operatorname{Re} \chi \in (-\pi/2, 0)$ ,  $\operatorname{Im} \chi > 0$ ; квадрант III соответствует области  $\operatorname{Re} \chi \in (\pi, 3\pi/2)$ ,  $\operatorname{Im} \chi > 0$ ; квадрант IV соответствует области  $\operatorname{Re} \chi \in (0, \pi/2)$ ,  $\operatorname{Im} \chi < 0$ . Как легко видеть, путь интегрирования (вещественная ось на плоскости  $k_r$ ) превращается в контур  $C$  на плоскости  $\chi$  (рис. 3).

Полное поле в первой среде (область  $z < 0$ ) записывается в виде

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{(1)} \\ E_{z\omega}^{(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{q(1)} \\ E_{z\omega}^{q(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{b(1)} \\ E_{z\omega}^{b(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(1)} \end{Bmatrix} = \\ &= \int_{e^{i\pi\infty}}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} &\left( \frac{q_0 \omega}{2\pi c^2 \varepsilon_1} \left( -\frac{i\beta}{2k_0^3} \tilde{U}_1 e^{i\omega t_0} e^{-i\kappa_1(z-vt_0)} + \frac{1}{k_0 \beta} \frac{e^{i\omega z/v}}{k_r^2 - s_1^2} \right) k_r^2 + i\pi \kappa_1 C_- e^{-i\kappa_1 z} \right) H_1^{(1)}(k_r, r) \\ &\left( \frac{i q_0 \omega}{2\pi c^2} \left( \frac{i\beta}{2k_0} \left( \frac{\mu_1}{\kappa_1} - \frac{\kappa_1}{\varepsilon_1 k_0^2} \right) \tilde{U}_1 e^{i\omega t_0} e^{-i\kappa_1(z-vt_0)} + \frac{n_1^2 \beta^2 - 1}{\varepsilon_1 \beta^2} \frac{e^{i\omega z/v}}{k_r^2 - s_1^2} \right) k_r + \pi k_r C_- e^{-i\kappa_1 z} \right) H_0^{(1)}(k_r, r) \\ &\left( \frac{q_0 \omega \beta}{2\pi c^2} \left( \frac{i}{2k_0^2 \kappa_1} \tilde{U}_1 e^{i\omega t_0} e^{-i\kappa_1(z-vt_0)} + \frac{1}{k_0 \beta} \frac{e^{i\omega z/v}}{k_r^2 - s_1^2} \right) k_r^2 - i\pi \frac{\omega \varepsilon_1}{c} C_- e^{-i\kappa_1 z} \right) H_1^{(1)}(k_r, r) \end{aligned} \right\} dk_r, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Данное выражение удобно переписать в несколько ином виде. Покажем это на примере компоненты  $E_{r\omega}^{(1)}$ . Последнее слагаемое в  $E_{r\omega}^{(1)}$  (относящееся к вынужденному полю) можно записать так:

$$\begin{aligned}
E_{r\omega}^{b(1)} &= \pi i \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r \kappa_1 H_1^{(1)}(k_r r) C_-(\omega, k_r) e^{-ik_1 z} = -\pi i \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r \kappa_1 H_1^{(1)}(k_r r) \tilde{C}_- e^{-ik_1 z} - \\
&- \pi i \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r \kappa_1 H_1^{(1)}(k_r r) \frac{q_0 \omega}{2\pi^2 c^2} \frac{i}{\varepsilon_1 \kappa_2 + \varepsilon_2 \kappa_1} \frac{i\beta}{2k_0^3} e^{i\omega t_0} \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) k_r^2 \tilde{U}_1 e^{ik_1 v t_0} e^{-ik_1 z} = \\
&= -\pi i \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r \kappa_1 H_1^{(1)}(k_r r) \tilde{C}_- e^{-ik_1 z} + \frac{i q_0 \omega}{2\pi c^2 \varepsilon_1} \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r H_1^{(1)}(k_r r) \frac{\beta}{2k_0^3} k_r^2 \tilde{U}_1 e^{i\omega t_0} e^{ik_1 v t_0} e^{-ik_1 z}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_- &= -\frac{q_0 \omega}{2\pi^2 c^2} \frac{i}{\varepsilon_1 \kappa_2 + \varepsilon_2 \kappa_1} \left[ \left( \frac{n_1^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_2 - \frac{\varepsilon_2}{k_0 \beta \varepsilon_1} k_r^2 \right) \frac{1}{k_r^2 - s_1^2} - \left( \frac{n_2^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_2 - \frac{1}{k_0 \beta} k_r^2 \right) \frac{1}{k_r^2 - s_2^2} - \right. \\
&\left. - \frac{i\beta}{k_0^3} e^{i\omega t_0} k_r^2 \tilde{U}_2 e^{ik_2 v t_0} \right],
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Последний член (2.3) компенсирует первое слагаемое (2.2). Аналогичное преобразование можно сделать для компонент  $E_{z\omega}^{(1)}$ ,  $H_{\varphi\omega}^{(1)}$ .

Кроме того, так как далее нас будет интересовать асимптотика в волновой зоне (где  $|k_1|R \gg 1$ ), то в скобках в (2.2) слагаемое вида  $\frac{e^{i\omega z/v}}{k_r^2 - s_1^2}$  мы можем не учитывать. Интеграл от данного слагаемого находится путем замыкания контура в верхнюю полуплоскость с учетом вклада единственного полюса  $k_r = s_1 = \frac{\omega}{v} \sqrt{n_1^2 \beta^2 - 1}$ . Так как, по предположению, в первой среде не генерируется ИВЧ, то есть  $|n_1| \beta < 1$ , то это полюс дает лишь экспоненциально малый вклад (это Фурье-образ квазикулоновского поля).

Учитывая сделанное выше преобразование, пренебрегая квазикулоновским полем и переходя к новой переменной интегрирования  $\chi$ , получаем

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} E_{r\omega}^{(1)} \\ E_{z\omega}^{(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{(1)} \end{array} \right\} &\approx \int_C \left\{ \begin{array}{l} i\pi k_1^2 \cos^2 \chi \tilde{C}_- H_1^{(1)}(k_1 R \sin \chi \sin \theta) e^{-ik_1 R \cos \chi \cos \theta} \\ \pi k_1^2 \sin \chi \cos \chi \tilde{C}_- H_0^{(1)}(k_1 R \sin \chi \sin \theta) e^{-ik_1 R \cos \chi \cos \theta} \\ -i\pi \frac{\omega \varepsilon_1}{c} k_1 \cos \chi \tilde{C}_- H_1^{(1)}(k_1 R \sin \chi \sin \theta) e^{-ik_1 R \cos \chi \cos \theta} \end{array} \right\} d\chi.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

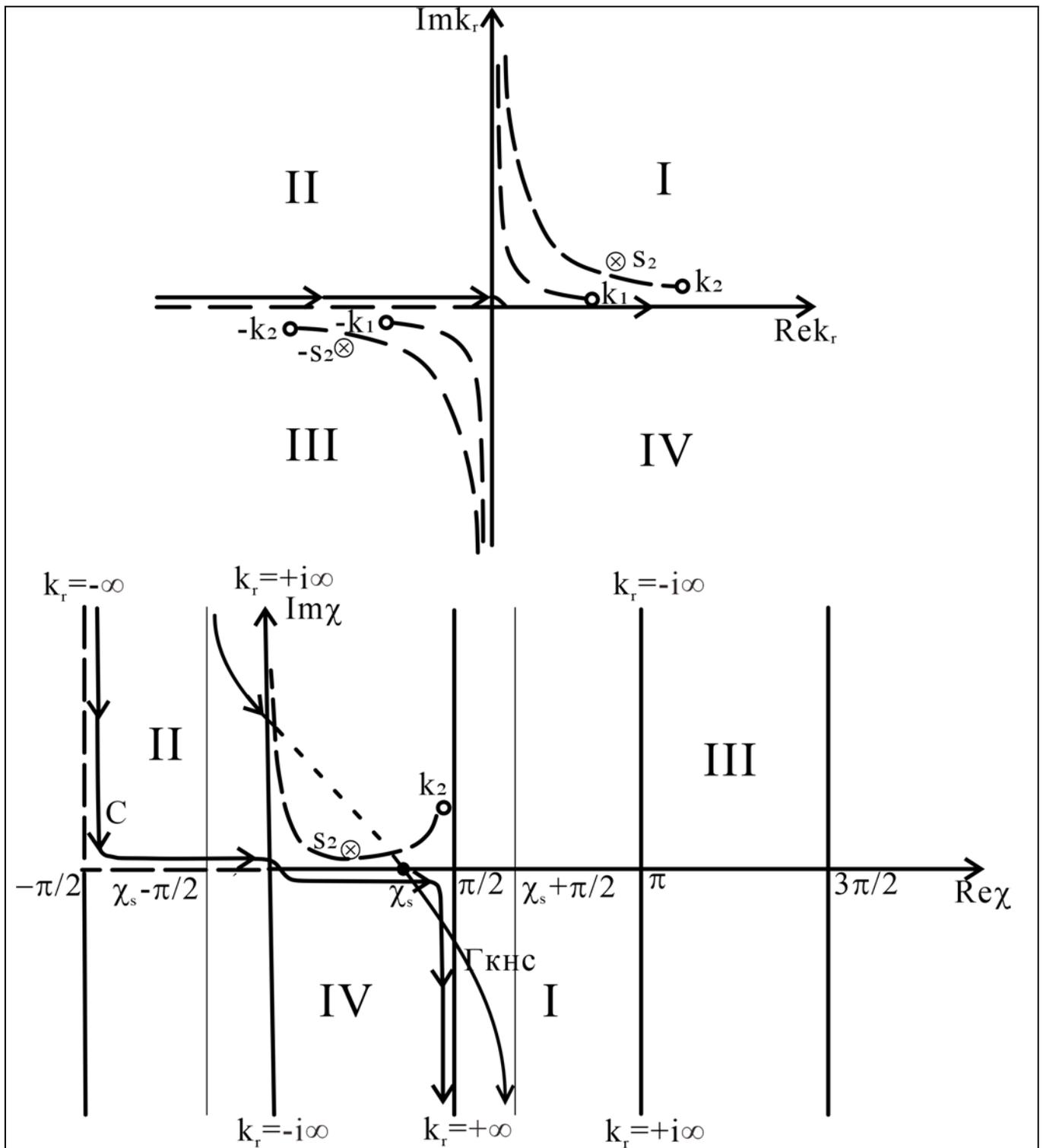


Рис. 3. Характерный вид плоскости  $k_r$  и плоскости  $\chi$  при вычислении поля в первой среде ( $z < 0$ ) для  $\omega > 0$ . Контур  $C$  есть исходный контур интегрирования на плоскости  $\chi$ ,  $\Gamma_{KHC}$  - контур наибоыстрейшего спуска. Пунктирные линии означают разрезы, значки  $\odot$  обозначают точки ветвления, значка  $\otimes$  обозначает точки полюса, значком  $\bullet$  отмечена седловая точка  $\chi_s = \pi - \theta$ . Часть контура  $\Gamma_{KHC}$ , показанная мелким пунктиром, лежит в нижнем листе Римановой поверхности  $\text{Im } \kappa_2 < 0$ .

Для приближенного расчета данного интеграла при  $|k_1|R \gg 1$  можно воспользоваться методом перевала (далее условие применимости получаемой асимптотики будет уточнено). При этом сначала нужно трансформировать исходный контур интегрирования к контуру наибыстрейшего спуска  $\Gamma_{\text{КНС}}$  (он определяется далее). После этого можно использовать асимптотики функций Ханкеля:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(k_1 R \sin \theta \sin \chi) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 R \sin \theta \sin \chi}} \exp\left(ik_1 R \sin \theta \sin \chi - \frac{i\pi}{4}\right), \\ H_1^{(1)}(k_1 R \sin \theta \sin \chi) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 R \sin \theta \sin \chi}} \exp\left(ik_1 R \sin \theta \sin \chi - \frac{i3\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отметим, что подынтегральные выражения в (2.5) имеют точки полюсов, определяемые уравнениями  $\kappa_2 = (-\omega - i/\tau)/v$  и  $\kappa_2 = -\omega/v$ . Уравнение  $\kappa_2 = (-\omega - i/\tau)/v$  дает

$$k_r = \pm \sqrt{s_2^2 + \frac{1}{v^2 \tau^2} - \frac{2\omega i}{v^2 \tau}}; \quad \text{при этом} \quad \kappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} - k_r^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 (n_1^2 - n_2^2) + 1) - \frac{1}{v^2 \tau^2} + \frac{2\omega i}{v^2 \tau}}.$$

Следовательно, этот полюс даёт только экспоненциально убывающий вклад.

Уравнение  $\kappa_2 = -\omega/v$  дает точки полюсов  $k_r = \pm s_2$ . Полюс  $k_r = s_2$  расположен на верхнем берегу разреза  $\text{Im} \kappa_2 = 0$  ( $\arg \kappa_2 = \pi$ ) на верхнем листе Римановой поверхности. При трансформации исходного контура к контуру наибыстрейшего спуска эта точка полюса не может захватываться, так как контур здесь идет по нижнему листу (см. рис. 3). Полюс  $k_r = -s_2 = k_1 \sin \chi$  находится в третьем квадранте, и при трансформации  $C \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}$  не пересекается.

Вклад полюса, определяемого уравнением  $\varepsilon_2 \kappa_1 + \varepsilon_1 \kappa_2 = 0$ , представляет собой поверхностную волну [4], экспоненциально убывающую от границы раздела ( $|E_{r\omega}^{b(1,2)}|$ ,  $|E_{z\omega}^{b(1,2)}|$ ,  $|H_{\varphi\omega}^{b(1,2)}| \sim \exp(-|z| \text{Im} \kappa_{1,2})$ ).

Итак, при трансформации исходного контура к контуру наибыстрейшего спуска полюса либо не пересекаются, либо дают экспоненциально убывающий вклад, который мы здесь не учитываем. В результате получаем, что поле в волновой зоне определяется только интегралом по контуру наибыстрейшего спуска:

$$\begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{(1)} \\ E_{z\omega}^{(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \approx \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma_{\text{КНС}}} \frac{1}{\sqrt{k_1 R \sin \chi \sin \theta}} \begin{Bmatrix} k_1 \cos \chi \\ k_1 \sin \chi \\ -\frac{\omega \varepsilon_1}{c} \end{Bmatrix} k_1 \cos \chi \tilde{C}_- e^{ik_1 R \cos(\chi - (\pi - \theta))} d\chi. \quad (2.7)$$

Далее данные интегралы будут находиться методом перевала. При этом будет использоваться формула для случая изолированной седловой точки, которая применима, если функция  $\exp(ik_1 R \cos(\chi - (\pi - \theta)))$  на контуре наибыстрейшего спуска меняется быстро по сравнению множителем перед ней. Это условие выполнено в случае, когда  $|k_1|R \gg 1$ , причем

седловая точка располагается достаточно далеко от точек полюсов  $\chi_p$  (от слова pole) и точек ветвления  $\chi_b$  (от слова branching) подынтегральной функции. Если точки особенностей обозначить  $\chi_f$  (от слова features), то эти условия можно записать в виде одного неравенства  $|k_1 R(\chi_s - \chi_f)| \gg 1$ .

Для нахождения изолированной седловой точки первого порядка  $\chi_s$  функции  $e^{ik_1 R \cos(\chi - (\pi - \theta))}$  имеем условия:

$$\Phi'(\chi_s) = -\sin(\chi_s - (\pi - \theta)) = 0, \quad \Phi''(\chi_s) = -\cos(\chi_s - (\pi - \theta)) < 0. \quad (2.8)$$

Отсюда получаем

$$\chi_s = \pi - \theta, \quad \Phi(\chi_s) = 1, \quad \Phi''(\chi_s) = -1, \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \quad (2.9)$$

Путь наибыстрейшего спуска – это такой контур, для которого выполняются соотношения

$$\operatorname{Re}(k_1 \Phi(\chi)) = \operatorname{Re}(k_1 \Phi(\chi_s)), \quad \operatorname{Im}(k_1 \Phi(\chi)) > \operatorname{Im}(k_1 \Phi(\chi_s)), \quad (2.10)$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re} \chi = \pi - \theta \pm \arccos\left(\frac{1}{ch(\operatorname{Im} \chi)}\right). \quad (2.11)$$

Этот контур, имеющий асимптоты  $\operatorname{Re} \chi = \pi/2 - \theta$  при  $\operatorname{Im}(\chi) \rightarrow +\infty$  и  $\operatorname{Re} \chi = 3\pi/2 - \theta$  при  $\operatorname{Im}(\chi) \rightarrow -\infty$ , представлен на рис 3.

Вычисляя интеграл по контуру наибыстрейшего спуска по известной формуле метода перевала [22, с.472], получаем следующее приближенное выражение:

$$\begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{(1)} \\ E_{z\omega}^{(1)} \\ H_{\phi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \approx \sqrt{\frac{-2\pi}{ik_1 R \Phi''(\chi_s)}} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{k_1 R \sin \chi_s \sin \theta}} \begin{Bmatrix} k_1 \cos \chi_s \\ k_1 \sin \chi_s \\ -\frac{\omega \varepsilon_1}{c} \end{Bmatrix} k_1 \cos \chi_s \tilde{C}_-(\omega, \chi_s) e^{ik_1 R \cos(\chi_s - (\pi - \theta))}, \quad (2.12)$$

Аргумент корня равен углу между контуром и вещественной осью в окрестности седловой точки, то есть в нашем случае

$$\arg\left(\sqrt{\frac{-2\pi}{iRk\Phi''(\chi_s)}}\right) = \arg\left(\sqrt{\frac{i}{\Phi''(\chi_s)}}\right) = -\frac{\pi}{4}. \quad (2.13)$$

В итоге получаем

$$\begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{(1)} \\ E_{z\omega}^{(1)} \\ H_{\phi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \approx \frac{2\pi e^{-i\pi/2}}{\sin \theta} \begin{Bmatrix} k_1 \cos \theta \\ -k_1 \sin \theta \\ \frac{\omega \varepsilon_1}{c} \end{Bmatrix} \cos \theta \tilde{C}_-(\omega, \theta) \frac{e^{ik_1 R}}{R}, \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{C}_-(\omega, \theta) = -\frac{q_0 \omega}{2\pi^2 c^2} \frac{i}{\varepsilon_1 \kappa_2 - \varepsilon_2 k_1 \cos \theta} \left[ \left( \frac{n_1^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_2 - \frac{\varepsilon_2}{k_0 \beta \varepsilon_1} k_1^2 \sin^2 \theta \right) \frac{1}{k_1^2 \sin^2 \theta - s_1^2} - \left( \frac{n_2^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_2 - \frac{k_1^2 \sin^2 \theta}{k_0 \beta} \right) \frac{1}{k_1^2 \sin^2 \theta - s_2^2} - \frac{i\beta}{k_0} e^{i\omega t_0} \frac{k_1^2 \sin^2 \theta}{k_0^2} \tilde{U}_2 e^{i\kappa_2 v t_0} \right]. \quad (2.15)$$

Напомним введенные ранее обозначения:

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta)}, \quad s_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} (n_{1,2}^2 \beta^2 - 1)}, \quad \tilde{U}_2 = \frac{\omega \tau}{1 - i\tau(\omega + \kappa_2 v)} + \frac{\omega}{i(\omega + \kappa_2 v)}. \quad (2.16)$$

Асимптотику (2.13) удобно записать в сферических координатах, в которых она имеет только две компоненты (как и должно быть для сферической волны):

$$\begin{Bmatrix} E_{\theta\omega}^{(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \approx \frac{2\pi e^{-i\pi/2} k_1}{\operatorname{tg} \theta} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} \end{Bmatrix} \tilde{C}_-(\omega, \theta) \frac{e^{i k_1 R}}{R}, \quad (2.17)$$

Полученное асимптотическое выражение справедливо в волновой зоне при условии  $|k_1 R| \gg 1$ . Угол наблюдения в первой среде меняется в диапазоне  $\pi/2 < \theta < \pi$ . В связи с условием применимости асимптотики функции Ханкеля в седловой точке, требуется также выполнение неравенства  $|k_1 R \sin^2(\pi - \theta)| \gg 1$ , то есть  $\pi - \theta \gg |k_1 R|^{-1/2}$ .

Рассмотрим нерелятивистский случай  $\beta \ll 1$ . При этом имеем

$$s_{1,2} \approx i|\omega|/v, \quad \tilde{U}_2 \approx -i/(1 - i\tau\omega). \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.15), получаем

$$\tilde{C}_-(\omega, \theta) = \frac{i q_0 n_1^2 \beta}{2\pi^2 \omega} \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} - \varepsilon_2 n_1 \cos \theta} \left[ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{1 - i\tau\omega} e^{i\omega t_0 + i\kappa_2 v t_0} \right] + O(\beta^2). \quad (2.19)$$

Таким образом, при  $\beta \ll 1$  поле определяется следующим выражением:

$$\begin{Bmatrix} E_{\theta\omega}^{(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \approx \frac{q_0 n_1^3 \beta}{2\pi c} \frac{\sin 2\theta}{\varepsilon_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} - \varepsilon_2 n_1 \cos \theta} \left[ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{1 - i\tau\omega} e^{i\omega t_0 + i\kappa_2 v t_0} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} \end{Bmatrix} \frac{e^{i k_1 R}}{R}. \quad (2.20)$$

Полученную асимптотику можно трактовать как сумму двух сферических волн: сферической волны переходного излучения (первое слагаемое) и сферической волны за счёт процесса изменения величины заряда (второе слагаемое).

Если вторая среда является идеальным проводником или диэлектриком с очень большой проницаемостью ( $|\varepsilon_2| \rightarrow \infty$ ), то

$$\kappa_2 \approx \frac{\omega}{c} n_2, \quad s_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} (n_1^2 \beta^2 - 1)}, \quad s_2 \approx \frac{\omega}{v} n_2 \beta, \quad \tilde{U}_2 \approx \frac{1}{n_2^2 \beta^2 \tau \omega}. \quad (2.21)$$

Тогда коэффициент  $\tilde{C}_-$  определяется выражением

$$\tilde{C}_-(\omega, \theta) = -\frac{i q_0 \beta}{2\pi^2 \omega} \frac{\sqrt{\mu_1} \sin^2 \theta}{\varepsilon_1 \cos \theta} \frac{1}{1 - n_1^2 \beta^2 \cos^2 \theta} + O(1/\sqrt{\varepsilon_2}), \quad (2.22)$$

Поле в этом случае принимает более простой вид

$$\begin{cases} E_{\theta\omega}^{(1)} \\ H_{\varphi\omega}^{(1)} \end{cases} \approx -\frac{q_0\beta\mu_1}{\pi c} \frac{\sin\theta}{1-n_1^2\beta^2\cos^2\theta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}} \right\} \frac{e^{ik_1R}}{R}. \quad (2.23)$$

Данный результат идентичен результату для случая влета заряда постоянной величины в идеальный проводник.

## 2.2 Асимптотика поля во второй среде.

Теперь рассмотрим поле в среде 2 ( $z > 0$ ). Как и ранее, введем новую комплексную переменную интегрирования  $\chi$  такую, что  $k_r = k_2 \sin \chi$ ,  $\kappa_2 = k_2 \cos \chi$ . Точка ветвления  $k_r = \pm k_2$  на плоскости  $\chi$  исчезает. Точка полюса определяется уравнением  $s_2 = k_2 \sin \chi_p$ , т.е.  $\chi_p = \arccos(1/n_2\beta)$ . Характерный вид плоскости  $\chi$  показан в рис. 4.

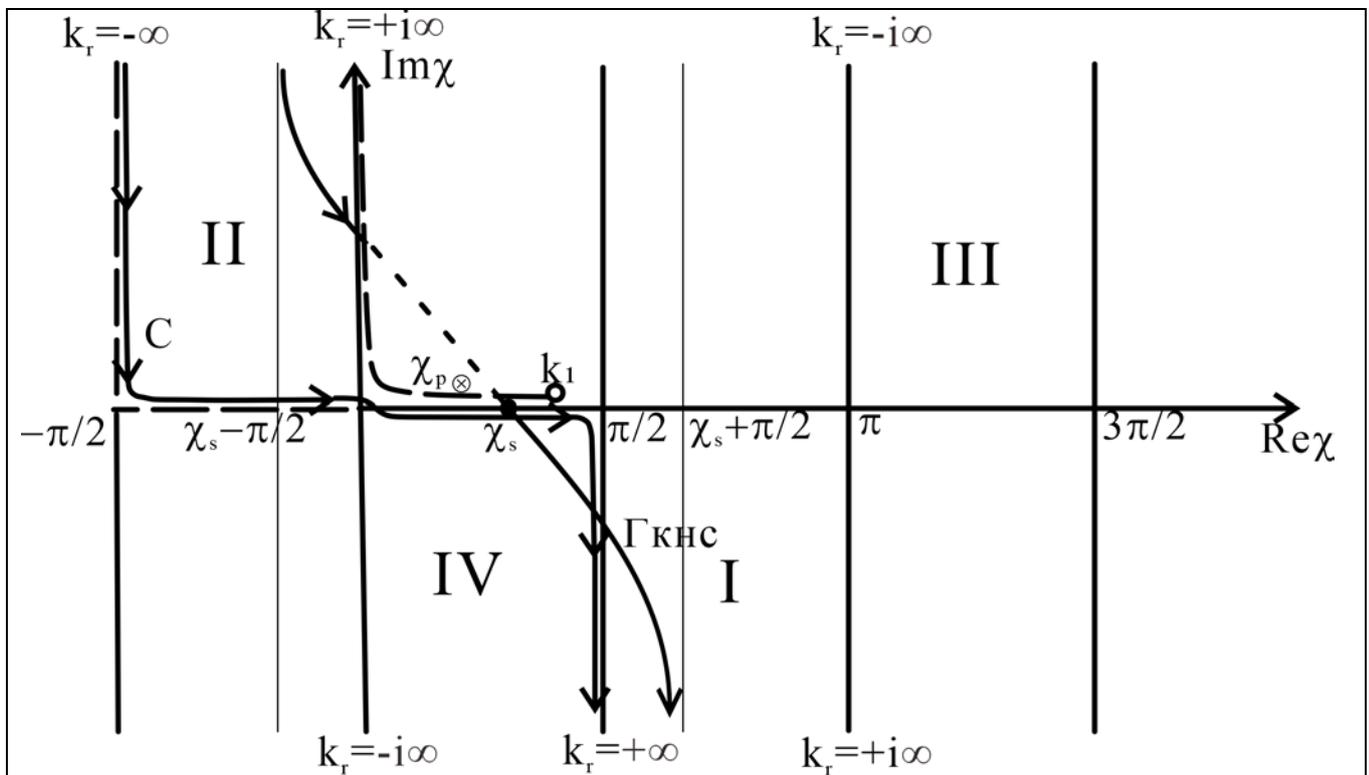


Рис. 4. Характерный вид плоскости  $\chi$  при вычислении поля во второй среде ( $z > 0$ ) для  $\omega > 0$ . Контур  $C$  есть исходный контур,  $\Gamma_{KHC}$  - контур наискорейшего спуска. Пунктирные линии означают разрезы (существовать только для расчёта интеграла свободного поля), значка  $\circ$  обозначает точку ветвления, значка  $\otimes$  обозначает точку полюса. Часть контура  $\Gamma_{KHC}$ , показанная мелким пунктиром, лежит на нижнем листе Римановой поверхности  $\text{Im } \kappa_1 < 0$ . Седловая точка  $\chi_s = \theta$  для свободного поля,  $\chi_s = \theta'$  при  $z > vt_0$  и  $\chi_s = \pi - \theta'$  при  $z < vt_0$  для вынужденного поля.

## 2.2.1 Асимптотика вынужденного поля во второй среде.

Вынужденное поле во второй среде на плоскости  $k_r$  определяется выражениями

$$\begin{aligned} E_{r\omega}^{q(2)} &= \frac{q_0\omega}{2\pi c^2 \varepsilon_2} \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r k_r^2 H_1^{(1)}(k_r r) \left\{ \operatorname{sgn}(z - vt_0) \frac{i\beta}{2k_0^3} U_2 e^{i\omega t_0} e^{ik_2|z-vt_0|} + \frac{e^{i\omega z/v} \Theta(vt_0 - z)}{k_0\beta} \frac{\Theta(vt_0 - z)}{k_r^2 - s_2^2} \right\}, \\ E_{z\omega}^{q(2)} &= \frac{iq_0\omega}{2\pi c^2 \varepsilon_2} \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r k_r H_0^{(1)}(k_r r) \left\{ \frac{i\beta}{2k_0^3} U_2 \frac{k_r^2}{\kappa_2} e^{i\omega t_0} e^{ik_2|z-vt_0|} + e^{i\omega z/v} \frac{n_2^2\beta^2 - 1}{\beta^2} \frac{\Theta(vt_0 - z)}{k_r^2 - s_2^2} \right\}, \\ H_{\varphi\omega}^{q(2)} &= \frac{q_0\omega\beta}{2\pi c^2} \int_{e^{i\pi_\infty}}^{+\infty} dk_r k_r^2 H_1^{(1)}(k_r r) \left\{ \frac{i}{2k_0^2\kappa_2} U_2 e^{i\omega t_0} e^{ik_2|z-vt_0|} + \frac{1}{k_0\beta} e^{i\omega z/v} \frac{\Theta(vt_0 - z)}{k_r^2 - s_2^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Отметим, что в (2.24) мы пренебрегли последним членом формулы (1.29), вклад которого в волновой зоне несущественен. Далее для удобства первые слагаемые в (2.24) обозначим  $\vec{E}_\omega^{q(2I)}$ ,  $\vec{H}_\omega^{q(2I)}$ , а вторые  $\vec{E}_\omega^{q(2II)}$ ,  $\vec{H}_\omega^{q(2II)}$ .

Второе слагаемое (2.24) мы можем легко вычислить. Для этого контур интегрирования дополняется до замкнутого полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной в верхней полуплоскости  $k_r$ . По теореме вычетов получаем

$$\begin{aligned} E_{r\omega}^{q(2II)} &= \frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi v}} \frac{s_2}{\varepsilon_2} \frac{e^{\frac{i\omega z + is_2 r}{v}}}{\sqrt{s_2 r}} \Theta(vt_0 - z), \\ E_{z\omega}^{q(2II)} &= \frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c^2}} \frac{1 - n_2^2 \beta^2}{\varepsilon_2 \beta^2} \omega \frac{e^{\frac{i\omega z + is_2 r}{v}}}{\sqrt{s_2 r}} \Theta(vt_0 - z), \\ H_{\varphi\omega}^{q(2II)} &= \frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} s_2 \frac{e^{\frac{i\omega z + is_2 r}{v}}}{\sqrt{s_2 r}} \Theta(vt_0 - z). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь использованы асимптотики функций Ханкеля.

Теперь рассмотрим первое слагаемое (2.24). Оно на плоскости  $\chi$  принимает вид

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_{r\omega}^{q(2I)} \\ E_{z\omega}^{q(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)} \end{array} \right\} &= \frac{iq_0\omega\beta}{4\pi c^2 \varepsilon_2} n_2^2 e^{i\omega t_0} \int_C \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sgn}(z - vt_0) n_2 \cos \chi H_1^{(1)}(k_2 R \sin \chi \sin \theta) \\ in_2 \sin \chi H_0^{(1)}(k_2 R \sin \chi \sin \theta) \\ \varepsilon_2 H_1^{(1)}(k_2 R \sin \chi \sin \theta) \end{array} \right\} \times \\ &\quad \times \sin^2 \chi U_2 e^{ik_2 \cos \chi |R \cos \theta - vt_0|} d\chi. \end{aligned} \quad (2.26)$$

При  $|k_2|R \gg 1$  можно воспользоваться методом перевала; при этом функции Ханкеля определяются асимптотиками (2.6).

Сделаем замену  $z' = z - vt_0$ , выражение (2.26) в новой системе координат принимает вид

$$\begin{pmatrix} E_{r\omega}^{q(2I)} \\ E_{z\omega}^{q(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)} \end{pmatrix} = \frac{iq_0\omega\beta}{4\pi c^2 \varepsilon_2} n_2^2 e^{i\omega t_0} \int_C \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(z') n_2 \cos \chi H_1^{(1)}(k_2 R' \sin \chi \sin \theta') \\ in_2 \sin \chi H_0^{(1)}(k_2 R \sin \chi \sin \theta') \\ \varepsilon_2 H_1^{(1)}(k_2 R \sin \chi \sin \theta') \end{pmatrix} \times \\ \times \sin^2 \chi U_2 e^{ik_2 \cos \chi |R' \cos \theta'|} d\chi. \quad (2.27)$$

В области  $z < vt_0$  функция  $U_2 = \frac{\omega\tau}{1-i\tau(\omega+\kappa_2 v)} + \frac{\omega}{i(\omega+\kappa_2 v)}$  имеет две точки полюсов, определяемых уравнениями  $\kappa_2 = -(\omega+i/\tau)/v$  и  $\kappa_2 = -\omega/v$  (напомним, что  $\kappa_2 = k_2 \cos \chi$ ). Точка полюса  $\kappa_2 = -(\omega+i/\tau)/v$  на плоскости  $\chi$  расположена в областях  $\operatorname{Re} \chi \in (\pi/2, \pi)$ ,  $\operatorname{Im} \chi > 0$  и  $\operatorname{Re} \chi \in (\pi, 3\pi/2)$ ,  $\operatorname{Im} \chi < 0$ . Точка полюса  $\kappa_2 = -\omega/v$  расположена вблизи к оси  $\operatorname{Re} \chi$  в области I и III плоскости  $\chi$  (в непоглощающей среде -- на оси  $\operatorname{Re} \chi$  в области I и III). При трансформации контура  $C \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}$  эти точки полюсов не пересекаются.

В результате, применяя асимптотики функций Ханкеля, получаем:

$$\begin{pmatrix} E_{r\omega}^{q(2I)} \\ E_{z\omega}^{q(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)} \end{pmatrix} = -\frac{e^{-i\pi/4} q_0 \omega \beta}{2\pi c^2 \varepsilon_2} \int_{\Gamma_{\text{КНС}}} \frac{n_2^2 \sin^2 \chi}{\sqrt{2\pi k_2 R' \sin \chi \sin \theta'}} \begin{pmatrix} n_2 \cos \chi \\ n_2 \sin \chi \\ -\varepsilon_2 \end{pmatrix} U_2 e^{i\omega t_0} e^{ik_2 R' \cos(\chi - (\pi - \theta'))} d\chi. \quad (2.28)$$

Вычисляя интеграл по контуру наибоыстрейшего спуска по известной формуле метода перевала [22, с.472], при  $z < vt_0$  получаем

$$\begin{pmatrix} E_{r\omega}^{q(2I)} \\ E_{z\omega}^{q(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)} \end{pmatrix} = \frac{-iq_0 \beta n_2^2}{2\pi c \varepsilon_2} \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ -\sin \theta' \\ \varepsilon_2 / n_2 \end{pmatrix} \sin \theta' U_2 e^{i\omega t_0} \frac{e^{ik_2 R'}}{R'}. \quad (2.29)$$

В области  $z > vt_0$ , выражение (2.26) принимает вид

$$\begin{pmatrix} E_{r\omega}^{q(2I)} \\ E_{z\omega}^{q(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)} \end{pmatrix} = \frac{iq_0\omega\beta}{4\pi c^2 \varepsilon_2} n_2^2 e^{i\omega t_0} \int_C \begin{pmatrix} n_2 \cos \chi H_1^{(1)}(k_2 R' \sin \chi \sin \theta') \\ in_2 \sin \chi H_0^{(1)}(k_2 R' \sin \chi \sin \theta') \\ \varepsilon_2 H_1^{(1)}(k_2 R' \sin \chi \sin \theta') \end{pmatrix} \sin^2 \chi U_2 e^{ik_2 \cos \chi R' \cos \theta'} d\chi. \quad (2.30)$$

Функция  $U_2 = \frac{\omega\tau}{1-i\tau(\omega-\kappa_2 v)} + \frac{\omega}{i(\omega-\kappa_2 v)}$  обладает точками полюсов, определяемых уравнениями  $\kappa_2 = (\omega+i/\tau)/v$  и  $\kappa_2 = \omega/v$ . При трансформации контура  $C \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}$  оба полюса захватываются. Но уравнение  $\kappa_2 = (\omega+i/\tau)/v$  дает решения  $k_r = \pm \sqrt{s_2^2 + \frac{1}{v^2 \tau^2} - \frac{2\omega i}{v^2 \tau}}$ .

Соответствующий вклад экспоненциально убывает при удалении от траектории заряда, так что они в дальнейшем учитываться не будут. А вклад  $\kappa_2 = \omega/v$  дает распространяющиеся волны. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{q(2I)} \\ E_{z\omega}^{q(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)} \end{Bmatrix} &= \frac{e^{-i\pi/4} q_0 \omega \beta}{2\pi c^2 \varepsilon_2} \int_{\Gamma_{\text{КНС}}} \frac{n_2^2 \sin^2 \chi}{\sqrt{2\pi k_2 R' \sin \chi \sin \theta'}} \begin{Bmatrix} n_2 \cos \chi \\ -n_2 \sin \chi \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \times \\ &\times U_2 e^{i\omega t_0} e^{ik_2 R' \cos(\chi - \theta')} d\chi + \begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{q(2I)p} \\ E_{z\omega}^{q(2I)p} \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)p} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $E_{r\omega}^{q(2I)p}$ ,  $E_{z\omega}^{q(2I)p}$ ,  $H_{\varphi\omega}^{q(2I)p}$  описывают вклад полюса  $k_r = s_2$ .

Для нахождения условия захвата полюса учтем наличие диссипации в среде. Другими словами, считаем, что диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют малые мнимые значения:  $|\text{Im } \varepsilon_2| \ll |\text{Re } \varepsilon_2|$ ,  $|\text{Im } \mu_2| \ll |\text{Re } \mu_2|$ , при условии  $\text{Re } n_2 \beta > 1$  функция  $s_2$  всегда является почти вещественной с малой положительной мнимой частью, что свидетельствует о наличии цилиндрической волны (черенковского излучения). Однако она существует не во всем пространстве, а только в ограниченной области. Эта область определяется условием, что при трансформации  $C \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}$  полюс пересекается (рис. 4).

Действительно, полюс  $k_r = s_2$  (на плоскости  $\chi$  он определяется соотношением  $\chi_p = \arccos(1/n_2 \beta)$ ) находится в первом квадранте вблизи положительной части оси  $\text{Re } k_r$ , то есть выше контура интегрирования на плоскости  $k_r$ . На плоскости  $\chi$  полюс расположен выше исходного контура (рис. 4). Следовательно, при  $\theta' > \chi_p$  полюс пересекается при трансформации контура интегрирования в контур наибоыстрейшего спуска. В итоге получаем, что вклад полюса определяется выражениями

$$\begin{aligned} E_{r\omega}^{q(2I)p} &= \frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}} s_2}{\sqrt{2\pi v} \varepsilon_2} \frac{e^{i\omega \frac{z'}{v} + is_2 r}}{\sqrt{s_2 r}} e^{i\omega t_0} \Theta(z - vt_0) \Theta(\theta' - \chi_p), \\ E_{z\omega}^{q(2I)p} &= \frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c^2}} \frac{1 - n_2^2 \beta^2}{\varepsilon_2 \beta^2} \omega \frac{e^{i\omega \frac{z'}{v} + is_2 r}}{\sqrt{s_2 r}} e^{i\omega t_0} \Theta(z - vt_0) \Theta(\theta' - \chi_p), \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)p} &= \frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} s_2 \frac{e^{i\omega \frac{z'}{v} + is_2 r}}{\sqrt{s_2 r}} e^{i\omega t_0} \Theta(z - vt_0) \Theta(\theta' - \chi_p). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в (2.31). Как обычно, вычисляя его по контуру наибоыстрейшего спуска по известной формуле метода перевала [22, с.472], получаем

$$\begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{q(2I)} \\ E_{z\omega}^{q(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{q(2I)} \end{Bmatrix} = \frac{-iq_0 \beta}{2\pi c \varepsilon_2} n_2 \sin \theta' \begin{Bmatrix} n_2 \cos \theta' \\ -n_2 \sin \theta' \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} U_2 e^{i\omega t_0} \frac{e^{ik_2 R'}}{R'}. \quad (2.33)$$

Будем считать, что  $vt_0 \ll R$ , следовательно,  $R' = \sqrt{r^2 + (z - vt_0)^2} \approx R \left( 1 + \frac{(vt_0)^2 - 2zvt_0}{2R^2} \right)$ . В таком приближении

$$k_2 R' = k_2 \sqrt{r^2 + (z - vt_0)^2} \approx k_2 R \left( 1 + \frac{(vt_0)^2 - 2zvt_0}{2R^2} \right) \approx k_2 R - k_2 vt_0 \cos \theta + O \left( k_2 \frac{(vt_0)^2}{2R} \right). \quad (2.34)$$

Таким образом, в исходной системе координат полное вынужденное поле во второй среде равно

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{q(2)} \\ E_{z\omega}^{q(2)} \\ H_{\phi\omega}^{q(2)} \end{Bmatrix} &= \frac{-iq_0\beta}{2\pi c\epsilon_2} n_2 \sin \theta \begin{Bmatrix} n_2 \cos \theta \\ -n_2 \sin \theta \\ \epsilon_2 \end{Bmatrix} U_2 e^{i\omega(1-n_2\beta\cos\theta)t_0} \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \\ &+ \frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \begin{Bmatrix} \frac{s_2}{\beta\epsilon_2} \\ 1 - n_2^2 \beta^2 \\ s_2 \end{Bmatrix} \frac{\omega}{c} \begin{Bmatrix} e^{\frac{i\omega z + is_2 r}{v}} \\ \Theta(vt_0 + r \operatorname{ctg} \chi_p - z) \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

Данный результат для вынужденного поля справедлив при условии  $k_2 \left| (z - vt_0) \tan \chi_p - r \right| \gg 1$ , то есть в волновой зоне и вдали от границы области существования излучения Вавилова-Черенкова.

Итак, вынужденное поле во второй среде в волновой зоне представляет собой, вообще говоря, сумму сферической (первое слагаемое) и цилиндрической (второе слагаемое) волн. Цилиндрическая волна генерируется при условии  $|n_2\beta| > 1$  и существует только при  $\theta' > \chi_p = \arccos(1/|n_2\beta|)$ .

Вынужденное поле было подробно проанализированы в бакалаврской работе [15] и статье [16]. Здесь мы не будем останавливаться на этом анализе. Отметим только, что в [15, 16] получена также и «равномерная» асимптотика, справедливая во всей волновой зоне  $|k_2 R| \gg 1$ , включая окрестность границы области существования излучения Вавилова-Черенкова, где  $\theta' \approx \chi_p$ .

## 2.2.2 Асимптотика свободного поля во второй среде.

Напомним, что свободное поле определяется выражениями (1.45), (1.47):

$$\begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\phi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} = \pi \int_{e^{i\pi\infty}}^{+\infty} dk_r \begin{Bmatrix} -i\kappa_2 H_1^{(1)}(k_r, r) \\ k_r H_0^{(1)}(k_r, r) \\ -i \frac{\omega\epsilon_2}{c} H_1^{(1)}(k_r, r) \end{Bmatrix} C_+(\omega, k_r) e^{ik_2 z}, \quad (2.36)$$

где

$$C_+ = \frac{q_0 \omega}{2\pi^2 c^2} \frac{i}{\varepsilon_2 \kappa_1 + \varepsilon_1 \kappa_2} \left[ \left( \frac{n_1^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_1 + \frac{k_r^2}{k_0 \beta} \right) \frac{1}{k_r^2 - s_1^2} - \left( \frac{n_2^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_1 + \frac{\varepsilon_1}{k_0 \beta \varepsilon_2} k_r^2 \right) \frac{1}{k_r^2 - s_2^2} - \frac{i\beta}{2k_0} e^{i\omega t_0} \left( \varepsilon_2 \mu_2 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} - \frac{\kappa_1 \kappa_2}{k_0^2} - \frac{\varepsilon_1}{k_0^2 \varepsilon_2} k_r^2 \right) \tilde{U}_2 e^{ik_2 v t_0} \right]. \quad (2.37)$$

Переходя к переменной интегрирования  $\chi$ , имеем

$$\begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} = \int_C \begin{Bmatrix} -i\pi k_2^2 \cos^2 \chi C_+ H_1^{(1)}(k_2 R \sin \chi \sin \theta) e^{ik_2 R \cos \chi \cos \theta} \\ \pi k_2^2 \sin \chi \cos \chi C_+ H_0^{(1)}(k_2 R \sin \chi \sin \theta) e^{ik_2 R \cos \chi \cos \theta} \\ -i\pi \frac{\omega \varepsilon_2}{c} k_2 \cos \chi C_+ H_1^{(1)}(k_2 R \sin \chi \sin \theta) e^{ik_2 R \cos \chi \cos \theta} \end{Bmatrix} d\chi. \quad (2.38)$$

Подынтегральные выражения имеют точки полюсов, определяемые уравнениями  $\kappa_2 = -(\omega + i/\tau)/v$ ,  $\kappa_2 = -\omega/v$  и  $k_r = \pm s_2$ . Можно показать, что при трансформации контура  $C \rightarrow \Gamma_{\text{КНС}}$  полюсы  $\kappa_2 = -(\omega + i/\tau)/v$ ,  $\kappa_2 = -\omega/v$  и  $k_r = -s_2$  не пересекаются (аналогично тому, как это делалось в разделах 2.2.1 и 2.1). Вклад может дать только полюс  $k_r = s_2$ .

После трансформации контура и применения асимптотики функции Ханкеля (2.6) при условии  $|k_2| R \gg 1$  получаем

$$\begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} \approx \sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma_{\text{КНС}}} \frac{1}{\sqrt{k_2 R \sin \chi \sin \theta}} \begin{Bmatrix} -k_2 \cos \chi \\ k_2 \sin \chi \\ -\frac{\omega \varepsilon_2}{c} \end{Bmatrix} k_2 \cos \chi C_+ e^{ik_1 R \cos(\chi - \theta)} d\chi + \begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{b(2)p} \\ E_{z\omega}^{b(2)p} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)p} \end{Bmatrix}. \quad (2.39)$$

Второе слагаемое в (2.39) описывает вклад полюса  $k_r = s_2$ , возникающий при трансформации  $C$  к  $\Gamma_{\text{КНС}}$  и при условии  $\theta > \chi_p = \arccos(1/|n_2 \beta|)$ . Получается

$$\begin{aligned} E_{r\omega}^{b(2)p} &= -\frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}} s_2}{\sqrt{2\pi v} \varepsilon_2} \frac{e^{\frac{i\omega z + is_2 r}{v}}}{\sqrt{s_2 r}} \Theta(\theta - \chi_p), \\ E_{z\omega}^{b(2)p} &= -\frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c^2}} \frac{1 - n_2^2 \beta^2}{\varepsilon_2 \beta^2} \omega \frac{e^{\frac{i\omega z + is_2 r}{v}}}{\sqrt{s_2 r}} \Theta(\theta - \chi_p), \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)p} &= -\frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} s_2 \frac{e^{\frac{i\omega z + is_2 r}{v}}}{\sqrt{s_2 r}} \Theta(\theta - \chi_p). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Сравнивая выражения (2.40) и (2.35), видим, что (2.40) полностью компенсируют черенковское излучение в вынужденном поле в области  $\theta > \chi_p$ , то есть излучение Вавилова-Черенкова отсутствует в области между границей раздела и конической поверхностью  $\theta = \chi_p$ .

Первое слагаемое в (2.39), как обычно, вычисляем по известной формуле метода перевала [22, с.472]. В итоге получаем

$$\begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{b(2)} \\ E_{z\omega}^{b(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{b(2)} \end{Bmatrix} \approx \frac{2\pi e^{-i\pi/2}}{\sin\theta} \begin{Bmatrix} -k_2 \cos\theta \\ k_2 \sin\theta \\ -\frac{\omega\varepsilon_2}{c} \end{Bmatrix} \cos\theta C_+(\omega, \theta) \frac{e^{ik_2 R}}{R} \Theta(z), \quad (2.41)$$

где

$$\begin{aligned} C_+(\omega, \theta) = & \frac{q_0\omega}{2\pi^2 c^2} \frac{i}{\varepsilon_2\kappa_1 + \varepsilon_1 k_2 \cos\theta} \left[ \left( \frac{n_1^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_1 + \frac{k_2^2 \sin^2\theta}{k_0\beta} \right) \frac{1}{k_2^2 \sin^2\theta - s_1^2} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{n_2^2 \beta^2 - 1}{\beta^2} \kappa_1 + \frac{\varepsilon_1}{k_0\beta\varepsilon_2} k_2^2 \sin^2\theta \right) \frac{1}{k_2^2 \sin^2\theta - s_2^2} - \right. \\ & \left. - \frac{i\beta}{2k_0} \left( \varepsilon_2\mu_2 \frac{\kappa_1}{k_2 \cos\theta} - \frac{\kappa_1 k_2 \cos\theta}{k_0^2} - \frac{\varepsilon_1}{k_0^2 \varepsilon_2} k_2^2 \sin^2\theta \right) \tilde{U}_2 e^{i\omega(1+n_2\beta \cos\theta)t_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

В итоге, складывая выражения (2.41), (2.40) и (2.35), получаем полное поле во второй среде:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} E_{r\omega}^{(2)} \\ E_{z\omega}^{(2)} \\ H_{\varphi\omega}^{(2)} \end{Bmatrix} = & \frac{-iq_0\beta}{2\pi c\varepsilon_2} n_2 \sin\theta \begin{Bmatrix} n_2 \cos\theta \\ -n_2 \sin\theta \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} U_2 e^{i\omega(1-n_2\beta \cos\theta)t_0} \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \frac{2\pi e^{-i\pi/2}}{\sin\theta} \begin{Bmatrix} -k_2 \cos\theta \\ k_2 \sin\theta \\ -\frac{\omega\varepsilon_2}{c} \end{Bmatrix} \cos\theta C_+(\omega, \theta) \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \\ & + \frac{q_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \begin{Bmatrix} \frac{s_2}{\beta\varepsilon_2} \\ \frac{1-n_2^2\beta^2}{\varepsilon_2\beta^2} \frac{\omega}{c} \\ s_2 \end{Bmatrix} e^{\frac{i\omega z + is_2 r}{v}} \frac{1}{\sqrt{s_2 r}} \Theta(\chi_p - \theta) \Theta(\theta' - \chi_p). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Напомним, что углы  $\theta$  и  $\theta'$  – это углы в сферических системах координат с началом в точке  $z=0$  и в точке  $z=vt$ , соответственно (см. рис. 6). Первое слагаемое (2.43) представляет собой сферическую волну за счёт процесса изменения величины заряда, а второе – сферическую волну переходного излучения. Третье слагаемое — это цилиндрическая волна излучения Вавилова-Черенкова (ИВЧ). Как видим, оно существует только в области между двумя коническими поверхностями, т.е. при  $\theta < \chi_p$ ,  $\theta' > \chi_p$ . Иначе эту область можно описать неравенствами  $r \operatorname{ctg}\chi_p < z < vt_0 + r \operatorname{ctg}\chi_p$  (рис. 5). Точка полюса  $\chi_p = \arccos((n_2\beta)^{-1})$  определяет направление ИВЧ.

Углы наблюдения во второй среде меняются в диапазоне  $1/\sqrt{|k_2 R|} \ll \theta < \pi/2$ ,  $1/\sqrt{|k_2 R'|} \ll \theta' < \pi/2$ . Нижнее ограничение на углы связаны с условием применимости

асимптотики функции Ханкеля в седловой точке  $|k_2 R \sin^2 \theta| \gg 1$  ( $|k_2 R' \sin^2 \theta'| \gg 1$ ). Такое условие автоматически выполняется, если считать, что седловая точка  $\chi_s = \theta$  ( $\chi_s = \theta'$ ) расположена далеко от точки ветвления функции Ханкеля  $\chi = \chi_b = 0; \pi$ . Отметим, что в области  $r \operatorname{ctg} \chi_p < z < vt_0 + r \operatorname{ctg} \chi_p$  (см. рис. 5) цилиндрическая волна (2.37) является главным слагаемым, так как она убывает с расстоянием медленнее, чем сферическая.

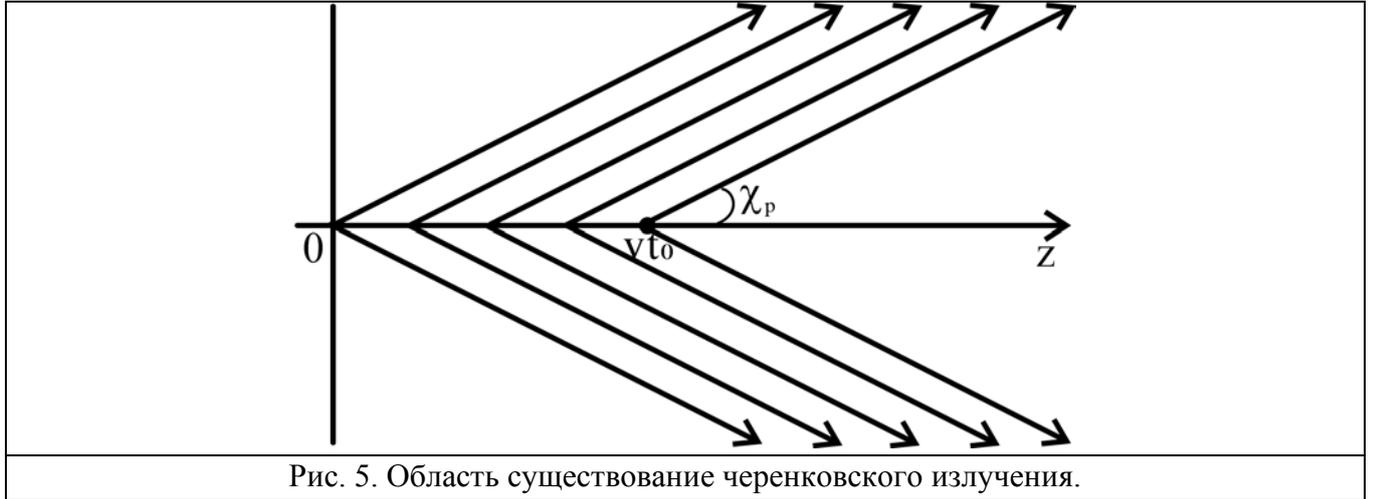


Рис. 5. Область существования черенковского излучения.

Отметим, что асимптотические выражения (2.43) справедливы в волновой зоне при выполнении условий вида  $|k_2 R (\chi_s - \chi_f)| \gg 1$ , где  $\chi_f$  -- точки расположения особенностей подынтегрального выражения. В рассматриваемой задаче данные условия сводятся к тому, что точка наблюдения должна быть достаточно далеко от границ области черенковского излучения  $\theta = \chi_p$  и  $\theta' = \chi_p$ , а также от предельного угла полного внутреннего отражения  $\theta = \chi_b = \arcsin(n_1/n_2)$ . Последнее связано с тем, что при таком угле имеет место совпадение седловой точки подынтегральной функции с точкой ее ветвления. В итоге, условия применимости полученных результатов можно сформулировать в виде следующих неравенств:

$$|k_2 R (\theta - \chi_p)| \gg 1, \quad |k_2 R (\theta' - \chi_p)| \gg 1, \quad |k_2 R (\theta - \chi_b)| \gg 1. \quad (2.44)$$

Далее, для удобства, суммарную сферическую волну в (2.43) обозначим  $\vec{E}_\omega^{(2I)}, \vec{H}_\omega^{(2I)}$ , а цилиндрическую волну  $\vec{E}_\omega^{(2II)}, \vec{H}_\omega^{(2II)}$ . Сферическую волну удобно записать в сферических координатах, в которых она имеет только две компоненты:

$$\begin{Bmatrix} E_{\theta\omega}^{(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{(2I)} \end{Bmatrix} \approx \left( \frac{2\pi i k_2}{\operatorname{tg} \theta} C_+ - \frac{i q_0 \beta}{2\pi c \varepsilon_2} n_2^2 \sin \theta U_2 e^{i\omega(1-n_2\beta \cos \theta)t_0} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \end{Bmatrix} \frac{e^{ik_2 R}}{R}. \quad (2.45)$$

В нерелятивистском случае ( $\beta \ll 1$ ), имеем

$$s_{1,2} \approx i|\omega|/v, \quad \tilde{U}_2 \approx -i/(1-i\tau\omega), \quad \kappa_2 = k_2 \cos \theta. \quad (2.46)$$

Подставляя (2.46) в (2.42), получаем (с точностью до  $O(\beta^2)$ )

$$C_+ \approx \frac{iq_0 n_2^2 \beta}{2\pi^2 \omega} \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta} + \varepsilon_1 n_2 \cos \theta} \left[ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}}{n_2 \cos \theta} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \frac{1}{1 - i\tau\omega} e^{i\omega(1+n_2\beta \cos \theta)t_0} \right]. \quad (2.47)$$

Таким образом, при  $\beta \ll 1$  сферическая волна имеет вид

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_{\theta\omega}^{(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{(2I)} \end{array} \right\} &\approx - \left[ \frac{q_0 \beta}{2\pi c \varepsilon_2} n_2^2 \left( \frac{1}{1 - i\tau\omega} \right) e^{i\omega(1-n_2\beta \cos \theta)t_0} + \frac{q_0 n_2^3 \beta}{\pi c} \frac{\cos \theta}{\varepsilon_2 \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta} + \varepsilon_1 n_2 \cos \theta} \right] \times \\ &\times \left[ \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}}{n_2 \cos \theta} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \frac{1}{1 - i\tau\omega} e^{i\omega(1+n_2\beta \cos \theta)t_0} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}} \right] \sin \theta \frac{e^{ik_2 R}}{R}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Анализ поля сферической волны будет проведен в следующем разделе.

### 3. Сферическая волна

#### 3.1. Энергетические характеристики сферической волны в первой среде

Сферическую волну (2.17), распространяющуюся в первой среде, удобно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} E_{\theta\omega}^{(1)} \\ H_{\phi\omega}^{(1)} \end{Bmatrix} \approx \frac{q_0 n_1}{\pi c} \left( -\frac{C_-^t}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{i\beta}{2} \frac{n_1^2 \sin 2\theta}{\varepsilon_1 N_{21} - \varepsilon_2 n_1 \cos \theta} \tilde{U}_2 e^{i\omega t_0(1+\beta N_{21})} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \end{Bmatrix} \frac{e^{ik_1 R}}{R}, \quad (3.1)$$

где  $N_{21} = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}$ ,

$$C_-^t = \frac{1}{\varepsilon_1 N_{21} - \varepsilon_2 n_1 \cos \theta} \left[ \frac{(n_1^2 \beta^2 - 1) N_{21} - \varepsilon_2 \mu_1 \beta \sin^2 \theta}{1 - n_1^2 \beta^2 \cos^2 \theta} - \frac{(n_2^2 \beta^2 - 1) N_{21} - n_1^2 \beta \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 N_{21}^2} \right], \quad (3.2)$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{\omega \tau}{1 - i\tau(\omega + \kappa_2 \nu)} + \frac{\omega}{i(\omega + \kappa_2 \nu)} = \frac{1}{i[1 - i\omega\tau(1 + \beta N_{21})](1 + \beta N_{21})}.$$

Напомним, что первое слагаемое в (3.1) представляет собой сферическую волну классического переходного излучения (переходное излучение постоянного заряда). Второе – сферическая волна, генерируемая за счёт убывания величины заряда сгустка и выходящая из второй среды в первую (см. рис. 6).

В дальнейшем анализе мы будем пренебрегать поглощением в обеих средах, полагая диэлектрическую и магнитную проницаемости вещественными.

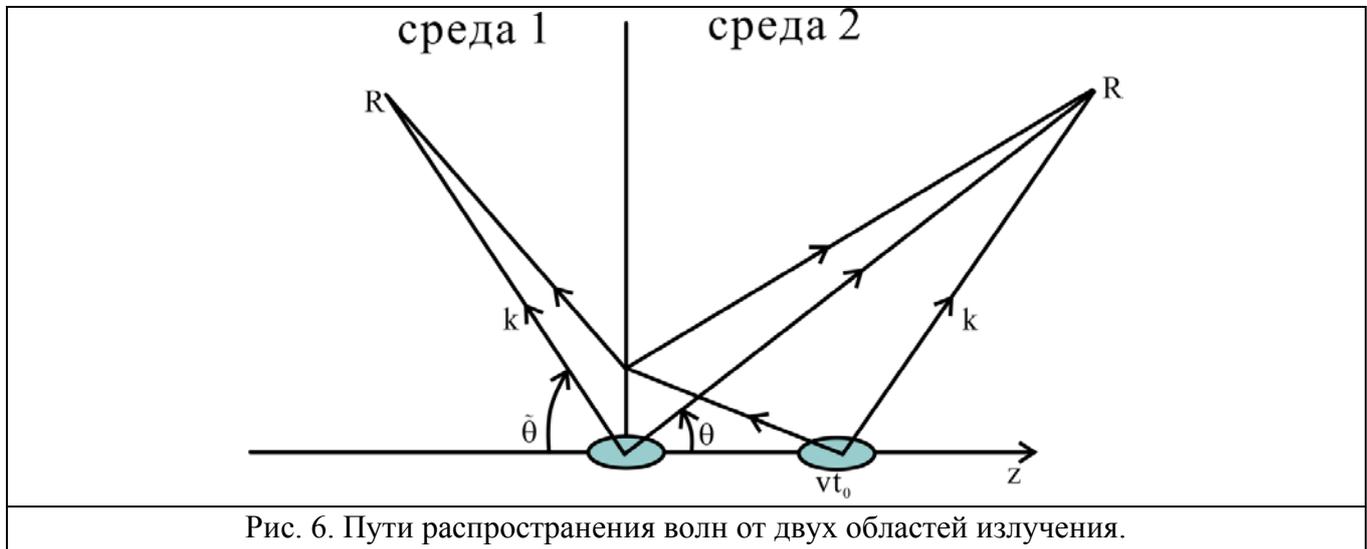


Рис. 6. Пути распространения волн от двух областей излучения.

Рассмотрим энергетические характеристики сферической волны. Вектор Пойнтинга (вектор плотности потока энергии) сферической волны имеет лишь одну радиальную компоненту:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}] = \frac{c}{4\pi} E_{\theta}^{(1)} H_{\phi}^{(1)} \vec{e}_R. \quad (3.3)$$

Полная энергия, проходящая через единичную площадку за всё время, равна

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} S_R dt &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} E_{\theta\omega}^{(1)} H_{\phi\tilde{\omega}}^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\tilde{\omega}+\omega)t} dt = \\
&= \frac{c}{4\pi} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega} E_{\theta\omega}^{(1)} H_{\phi\tilde{\omega}}^{(1)} \delta(\tilde{\omega} + \omega) = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\theta\omega}^{(1)} H_{\phi,-\omega}^{(1)} d\omega = \\
&= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\theta\omega}^{(1)} (H_{\phi\omega}^{(1)})^* d\omega = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} |E_{\theta\omega}^{(1)}|^2 d\omega = c \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} |E_{\theta\omega}^{(1)}|^2 d\omega.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Отметим, что здесь мы использовали тот факт, что Фурье-образ  $F_\omega$  вещественной функции  $F(t)$  обладает свойством  $F_{-\omega} = F_\omega^*$ , то есть  $\text{Re } F_{-\omega} = \text{Re } F_\omega$ ,  $\text{Im } F_{-\omega} = -\text{Im } F_\omega$ . Поэтому  $|F_\omega|^2 = F_\omega F_\omega^* = F_{-\omega}^* F_{-\omega} = |F_{-\omega}|^2$ , Кроме того, так как  $\varepsilon$  и  $\mu$  – вещественные функции частоты, то есть они автоматически четные. Поэтому все подынтегральное выражение – четная функция, что объясняет последнее равенство в (3.4).

Величина  $c \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} |E_{\theta\omega}^{(1)}|^2$  представляет собой спектральную плотность энергии, проходящей через единичную площадку за всё время излучения. Так как при  $k_1 R \rightarrow \infty$  эта величина стремится к нулю, то удобнее использовать другую характеристику – спектрально-угловую плотность энергии излучения (это энергия, излучаемая в единичный телесный угол в единичном интервале частот). Полная энергия излучения получается путем интегрирования (3.4) по сфере:

$$\begin{aligned}
W &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \cdot R^2 \sin \theta S_R \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\Omega \cdot R^2 S_R = \int d\Omega R^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_R dt = \\
&= \int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega \cdot c \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} R^2 |E_{\theta\omega}^{(1)}|^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Подынтегральное выражение здесь представляет собой спектрально-угловую плотность энергии излучения. Используя (3.4), имеем

$$\frac{d^2 W}{d\Omega d\omega} = c \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} R^2 |E_{\theta\omega}^{(1)}|^2 = \frac{q_0^2}{4\pi^2 c} |F|^2, \tag{3.6}$$

где  $|F|^2$  – спектрально-угловая плотность энергии излучения в единицах  $q_0^2 / 4\pi^2 c$ :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{2(\varepsilon_1^3 \mu_1)^{1/4}}{\text{tg} \theta (\varepsilon_1 N_{21} - \varepsilon_2 n_1 \cos \theta)} \left[ -\frac{(n_1^2 \beta^2 - 1) N_{21} - \varepsilon_2 \mu_1 \beta \sin^2 \theta}{1 - n_1^2 \beta^2 \cos^2 \theta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n_2^2 \beta^2 - 1) N_{21} - n_1^2 \beta \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 N_{21}^2} + \frac{\beta n_1^2 \sin^2 \theta}{(1 + \beta N_{21}) [1 - i\omega\tau (1 + \beta N_{21})]} e^{i\omega\tau_0 (1 + \beta N_{21})} \right].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Примеры зависимостей  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  для случая  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.5$  и случая  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 4$  приведены на рис. 7 и 8. Условие, при котором (3.7) справедливо, имеет вид  $\tilde{\theta} < \pi/2$ ,  $\sqrt{|k_1 R|} \tilde{\theta} \gg 1$ .

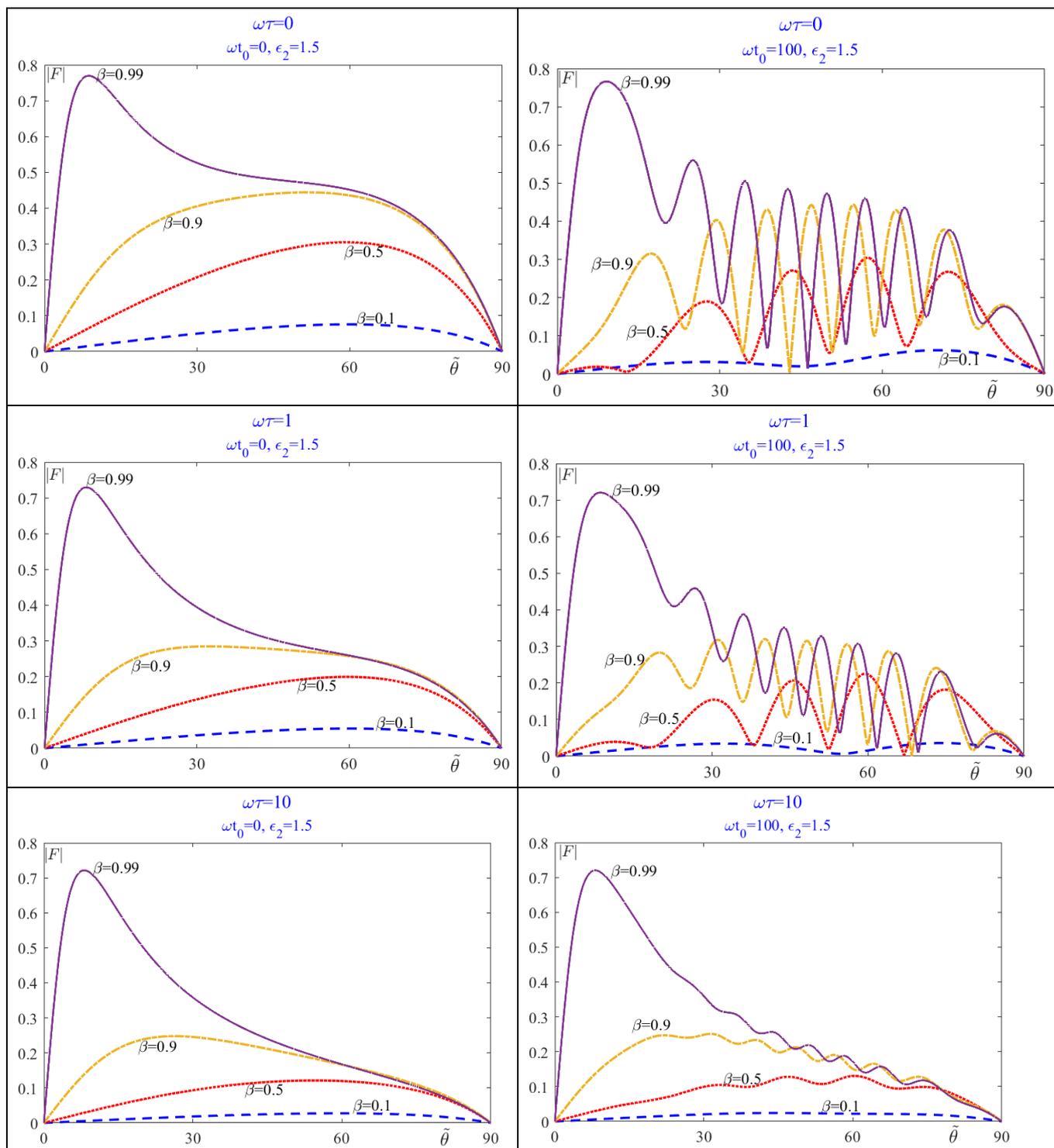


Рис. 7. Зависимость  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.5$  в области  $z < 0$ . Левый столбец:  $\omega t_0 = 0$ ; правый столбец:  $\omega t_0 = 100$ . Верхний ряд:  $\omega \tau = 0$ ; средний ряд:  $\omega \tau = 1$ ; нижний ряд:  $\omega \tau = 10$ . Скорость  $\beta$  указана в графиках.

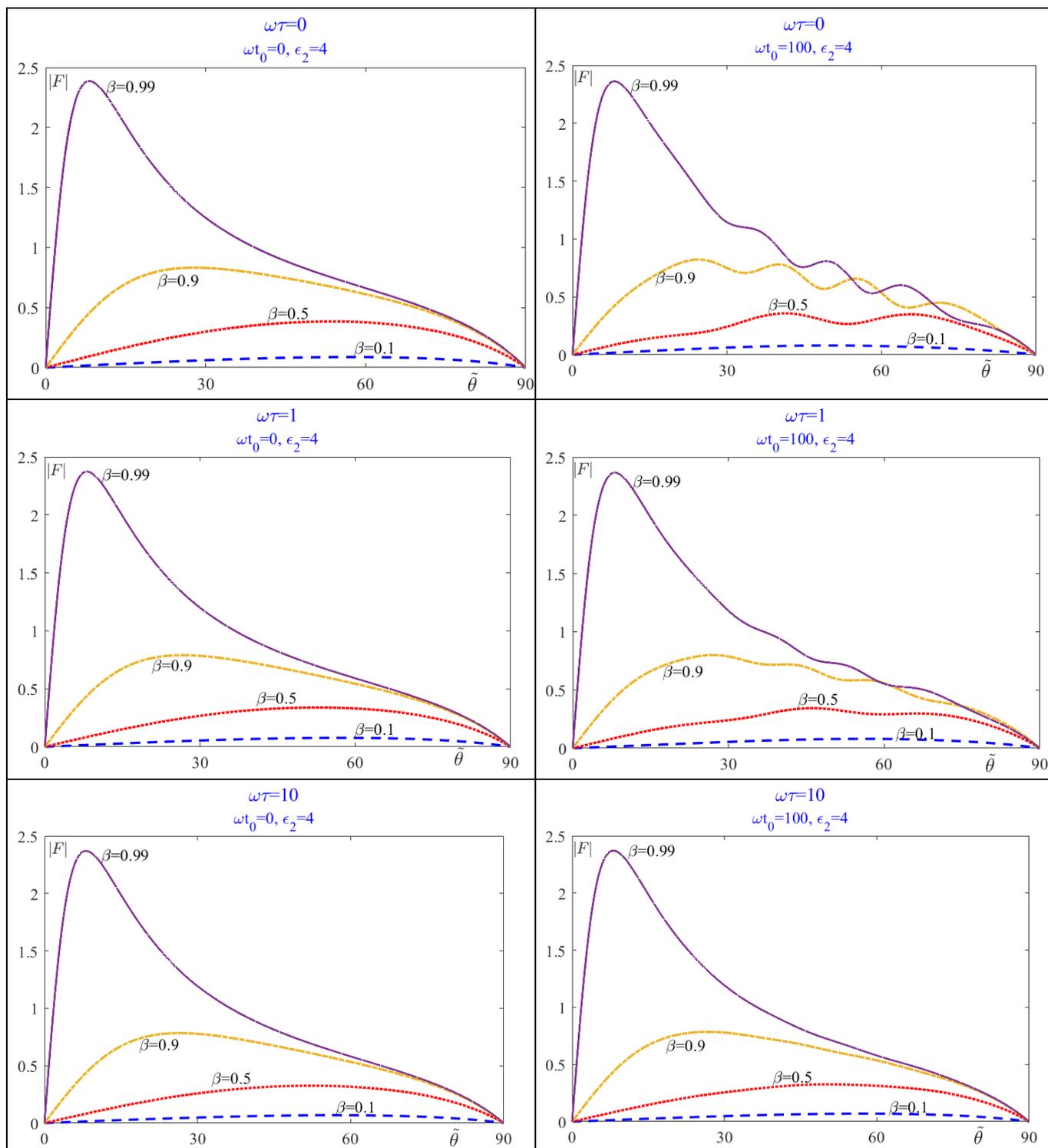


Рис. 8. Зависимость  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 4$  в области  $z < 0$ . Левый столбец:  $\omega t_0 = 0$ ; правый столбец:  $\omega t_0 = 100$ . Верхний ряд:  $\omega \tau = 0$ ; средний ряд:  $\omega \tau = 1$ ; нижний ряд:  $\omega \tau = 10$ . Скорость  $\beta$  указана в графиках.

Как видим, в случае  $\omega t_0 = 0$  спектрально-угловая плотность энергии излучения имеет один максимум. Если скорость сгустка не слишком велика ( $\beta \leq 0.5$ ), то главный максимум  $\tilde{\theta}_{\max}$  обычно лежит в области  $45^\circ < \tilde{\theta} < 90^\circ$ . С ростом скорости заряда  $\tilde{\theta}_{\max}$  уменьшается, а значение спектрально-угловой плотности энергии излучения становится все больше. При  $\beta \rightarrow 1$  главный максимум достигается при  $\tilde{\theta}_{\max} \rightarrow 0$ .

При достаточно большом значении  $\omega t_0$  и больших скоростях спектрально угловая плотность энергии излучения может иметь несколько максимумов (рис. 7, 8, правые столбцы). Это объясняется интерференцией двух сферических волн, исходящих от разных участков траектории заряда (см. рис. 6). Если характерное время убывания величины заряда  $\tau$  увеличивается, явление интерференции становится менее заметным вследствие уменьшения амплитуды волны, исходящей от соответствующего участка траектории.

Приведем для сравнения выражение для спектрально-угловой плотности энергии излучения в случае безграничной однородной среды [15]:

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q_0^2}{4\pi^2 c} |F_h|^2, \quad (3.8)$$

где

$$|F_h|^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu^3} \beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - n\beta \cos \theta)^2 [1 + \omega^2 \tau^2 (1 - n\beta \cos \theta)^2]}. \quad (3.9)$$

Зависимость  $|F_h|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  в вакууме при  $\omega\tau = 1$ ,  $\omega t_0 = 0$  приведена на рис. 9.

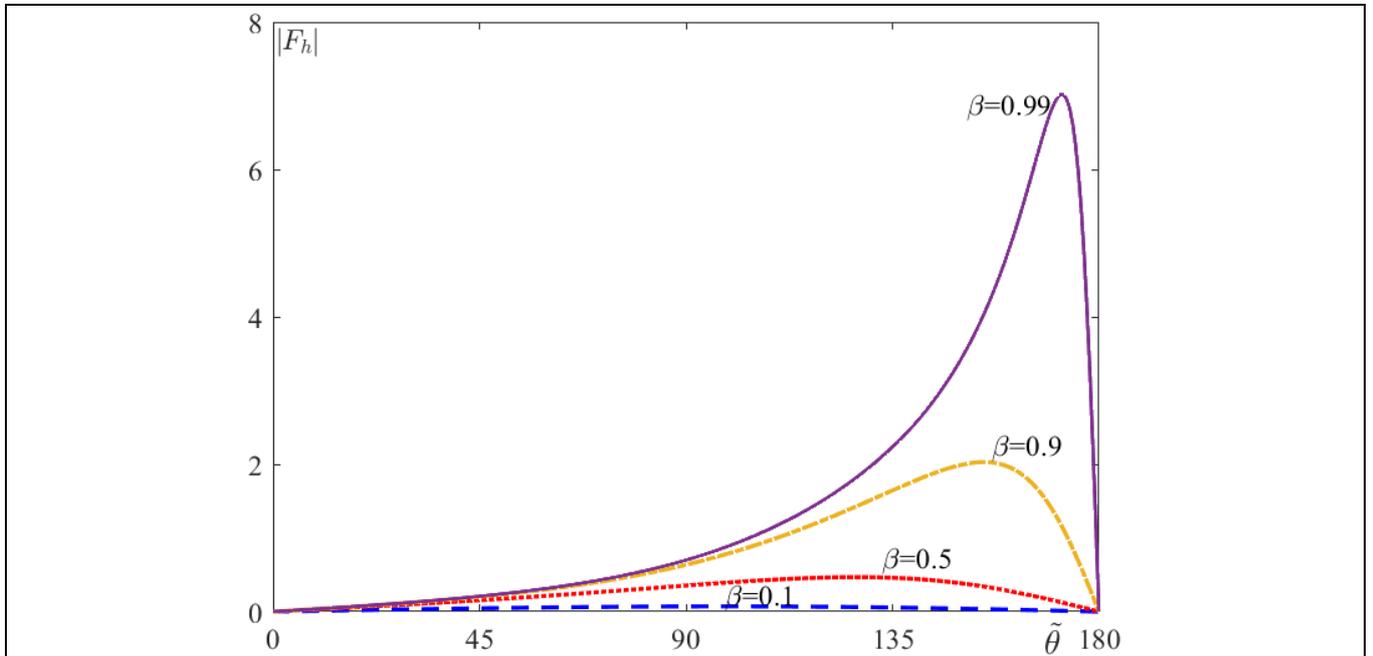


Рис. 9. Зависимость  $|F_h|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при  $\omega\tau = 1$ ,  $\omega t_0 = 0$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = \varepsilon_2 = \mu_2 = 1$ ; скорость  $\beta$  указана в графике.

Как видим, при отсутствии границы раздела излучение испускается в основном «вперёд» (максимум достигается при остром угле по отношению к направлению движения). С ростом скорости  $\beta$  максимум возрастает и смещается направо, стремясь к  $\tilde{\theta} = \pi$  при  $\beta \rightarrow 1$ . В интересующей нас в этом разделе области углов  $0^0 < \tilde{\theta} < 90^0$  величина  $|F_h|$  монотонно возрастает с ростом угла  $\tilde{\theta}$ .

Как мы уже видели, при наличии границы раздела данная зависимость имеет иной характер. Для наглядности на рис. 10, 11 показана спектрально угловая плотность энергии излучения в случае безграничного вакуума и в случае с границей раздела (при условии, что  $\omega t_0 = 0$ ). Как видим, вместо монотонного увеличения с ростом  $\tilde{\theta}$  в однородной среде при наличии границы имеется один максимум. Сравнение разных графиков на рис. 10, 11 показывает, что, если время «таяния» заряда  $\tau$  невелико, то излучение при наличии границы меньше или сравнимо с излучением в однородной среде (рис. 10). Если же величина  $\omega\tau$  значительна, то излучение при наличии границы обычно преобладает над излучением в однородной среде (рис. 11).

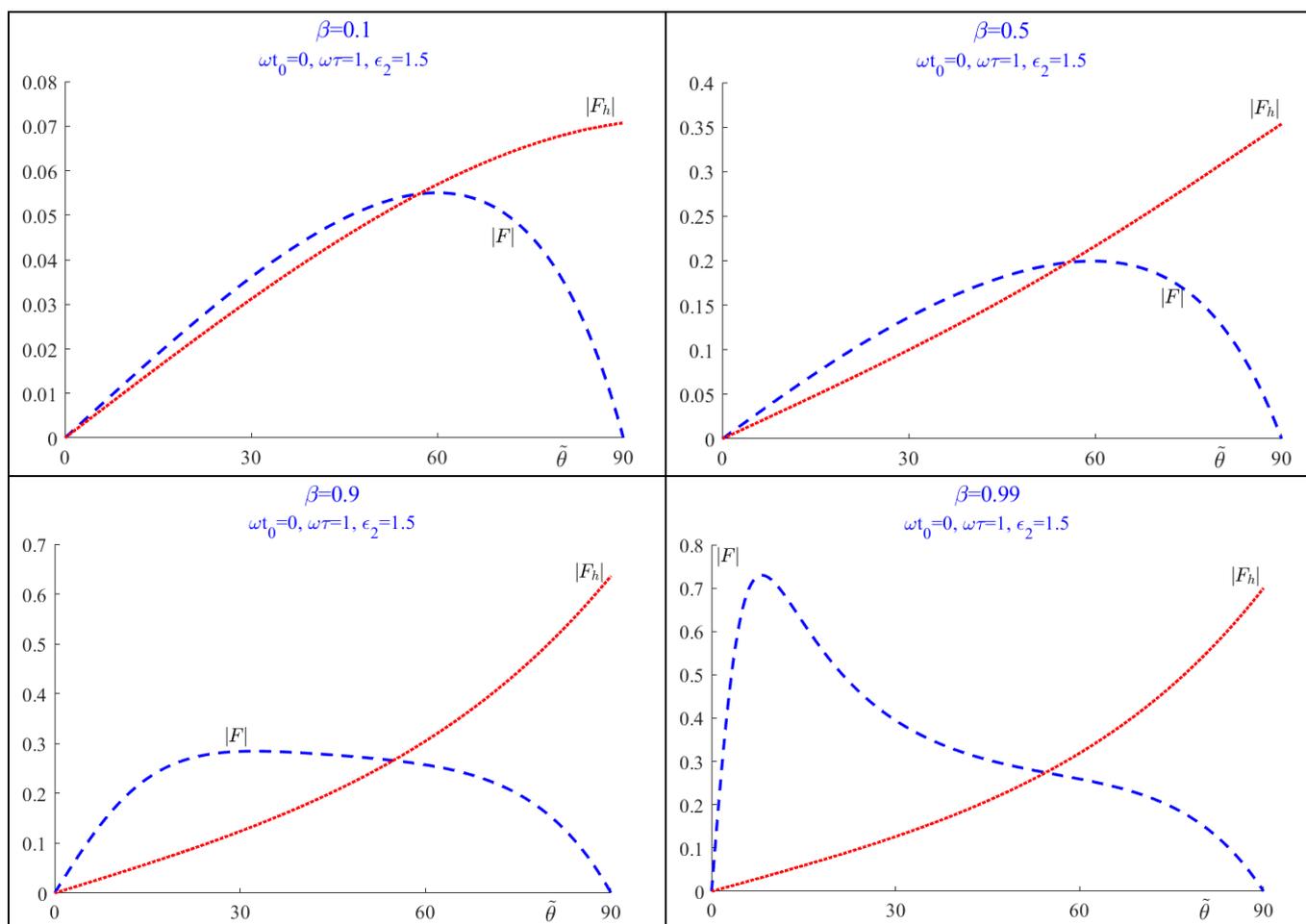


Рис. 10. Зависимости  $|F_h|$  (мелкий пунктир) и  $|F|$  (крупный пунктир) от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при разных скоростях  $\beta$  для  $\epsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 1.5$ ,  $\omega t_0 = 0$ ,  $\omega\tau = 1$ .

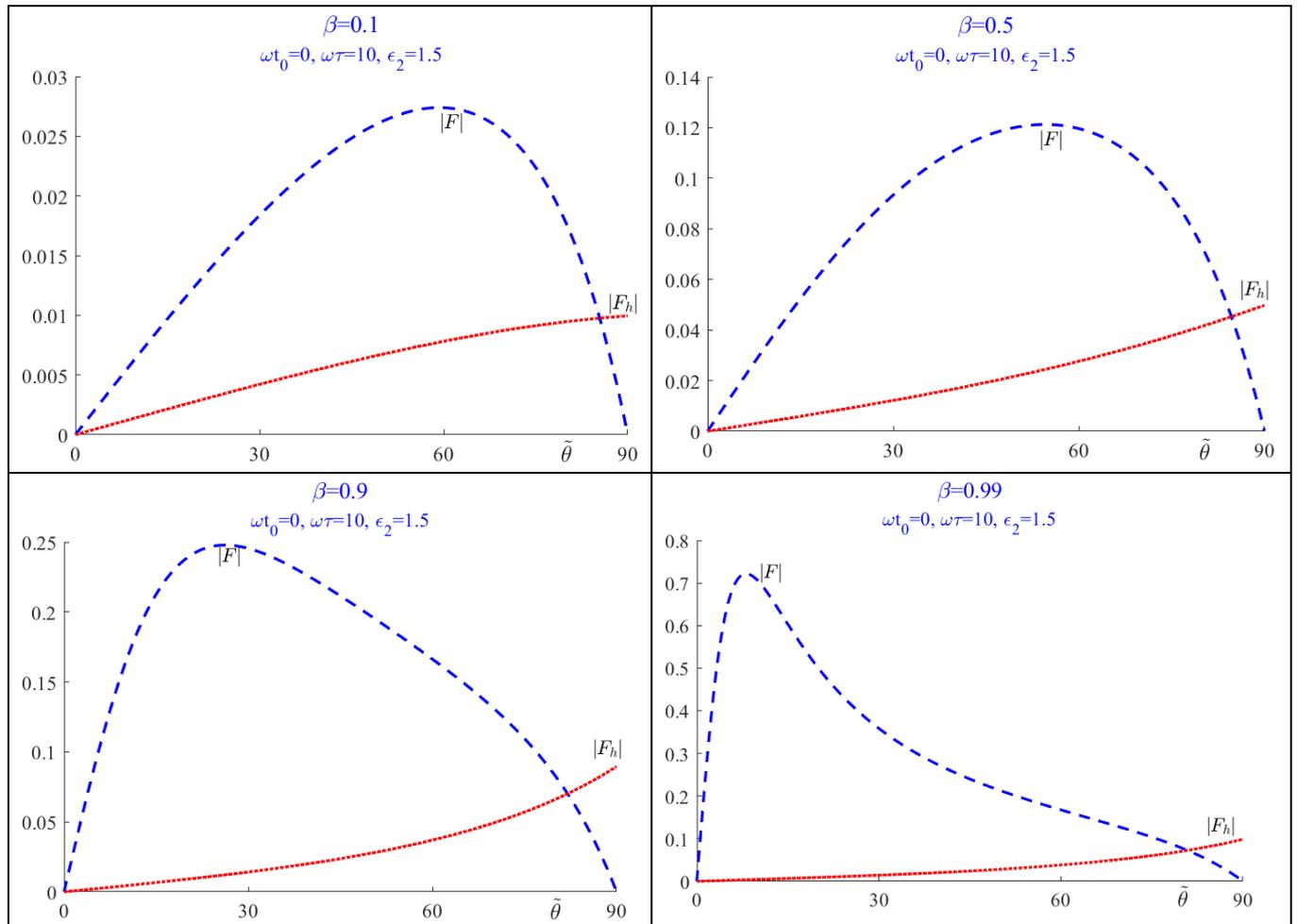
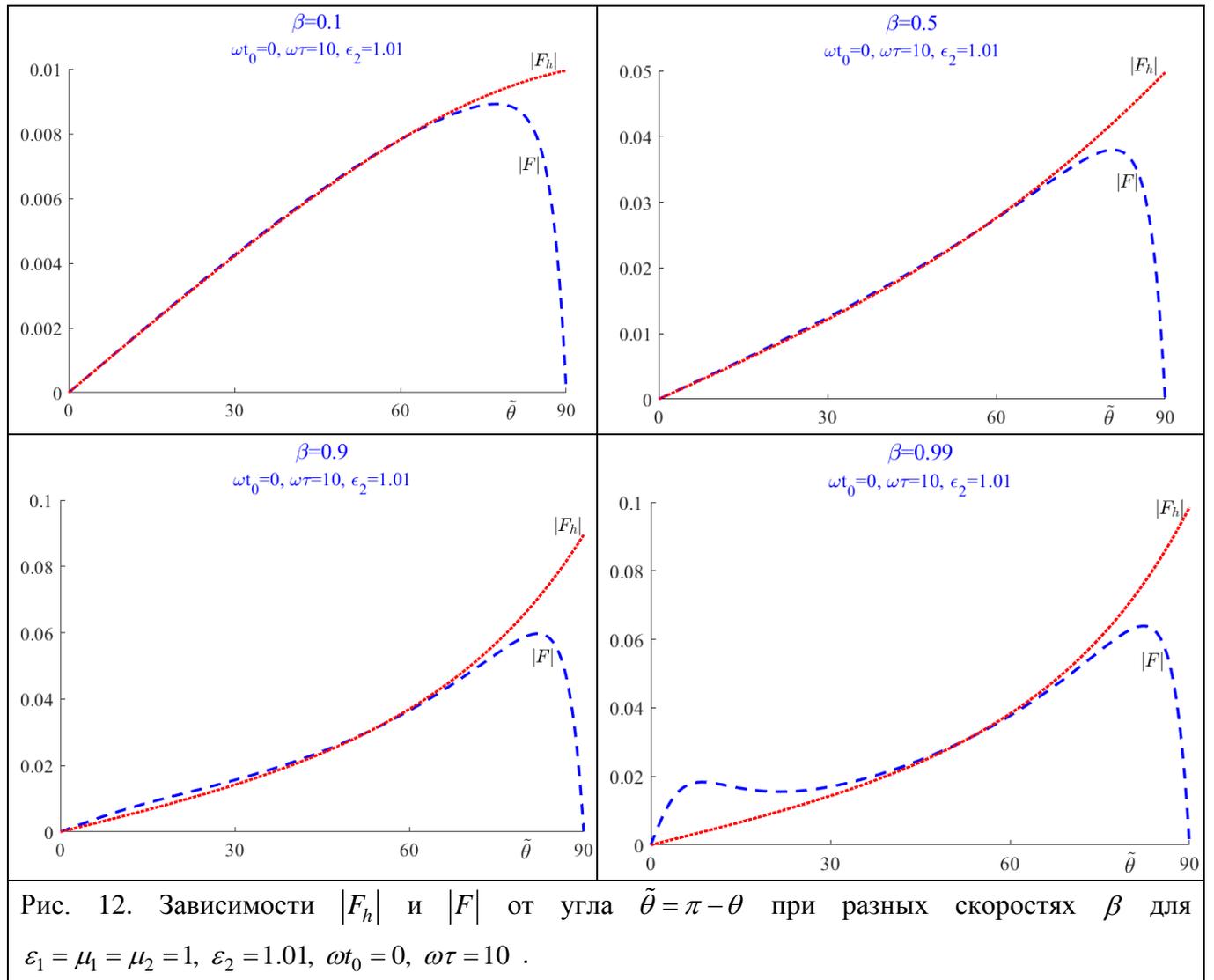


Рис. 11. Зависимости  $|F_h|$  и  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при разных скоростях  $\beta$  для  $\epsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 1.5$ ,  $\omega t_0 = 0$ ,  $\omega\tau = 10$ .

Рисунок 12 показывает спектрально-угловую плотность энергии излучения в случае вакуума и в случае границы со средой, проницаемость которой близка к вакуумной. Как видим, хотя кривые близки друг к другу в большей части рассматриваемого углового диапазона, однако не везде. Особенно велико различие вблизи границы раздела ( $\tilde{\theta} \approx 90^\circ$ ). При больших скоростях заметные различия имеются также в направлении, близком к нормальному ( $\tilde{\theta} \approx 0^\circ$ ).



### 3.2. Энергетические характеристики сферической волны во второй среде

Во второй среде имеются три распространяющиеся сферические волны: волна переходного излучения, волна, распространяющаяся от области убывания заряда к точке наблюдения, и волна, распространяющаяся от области убывания заряда к границе и затем от нее отражающаяся (см. рис. 6). Формулу (2.45) можно записать так:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E_{\theta\omega}^{(2I)} \\ H_{\varphi\omega}^{(2I)} \end{array} \right\} &\approx -\frac{q_0 n_2}{\pi c} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \sqrt{\varepsilon_2 / \mu_2} \end{array} \right\} \times \\ &\times \left[ \frac{C_+^t}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{i\beta}{2\varepsilon_2} n_2 \sin \theta e^{i\omega t_0} \left( U_2 e^{-i\omega t_0 n_2 \beta \cos \theta} - \frac{\varepsilon_2 N_{12} - \varepsilon_1 n_2 \cos \theta}{\varepsilon_2 N_{12} + \varepsilon_1 n_2 \cos \theta} \tilde{U}_2 e^{i\omega t_0 n_2 \beta \cos \theta} \right) \right] \frac{e^{ik_2 R}}{R}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $N_{12} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \sin^2 \theta}$ ,

$$C_+^t = \frac{1}{\varepsilon_2 N_{12} + \varepsilon_1 n_2 \cos \theta} \left[ \frac{(n_1^2 \beta^2 - 1) N_{12} + n_2^2 \beta \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 N_{12}^2} - \frac{(n_2^2 \beta^2 - 1) N_{12} + \varepsilon_1 \mu_2 \beta \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 n_2^2 \cos^2 \theta} \right], \quad (3.11)$$

$$U_2 = \frac{1}{i(1 - n_2 \beta \cos \theta) [1 - i\tau\omega(1 - n_2 \beta \cos \theta)]}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{1}{i(1 + n_2 \beta \cos \theta) [1 - i\tau\omega(1 + n_2 \beta \cos \theta)]}.$$

Спектрально-угловая плотность энергии излучения определяется выражением

$$\frac{d^2 W_2}{d\Omega d\omega} = c \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} R^2 |E_{\theta\omega}^{(2)}|^2 = \frac{q_0^2}{4\pi^2 c} |F|^2, \quad (3.13)$$

где безразмерная величина  $|F|^2$  представляет собой спектрально-угловую плотность энергии излучения в единицах  $q_0^2 / 4\pi^2 c$ :

$$F = \frac{2}{\operatorname{tg} \theta} \frac{(\varepsilon_2^3 \mu_2)^{1/4}}{\varepsilon_2 N_{12} + \varepsilon_1 n_2 \cos \theta} \left[ -\frac{(n_1^2 \beta^2 - 1) N_{12} + n_2^2 \beta \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 N_{12}^2} + \frac{(n_2^2 \beta^2 - 1) N_{12} + \varepsilon_1 \mu_2 \beta \sin^2 \theta}{1 - \beta^2 n_2^2 \cos^2 \theta} \right] - i\beta (\varepsilon_2 \mu_2^3)^{1/4} \sin \theta e^{i\omega t_0} \left( U_2 e^{-i\omega t_0 n_2 \beta \cos \theta} - \frac{\varepsilon_2 N_{12} - \varepsilon_1 n_2 \cos \theta}{\varepsilon_2 N_{12} + \varepsilon_1 n_2 \cos \theta} \tilde{U}_2 e^{i\omega t_0 n_2 \beta \cos \theta} \right). \quad (3.14)$$

Первая часть в (3.14) определяет энергию классического переходного излучения (переходное излучение заряда постоянной величины), а вторая часть – энергию сферической волны за счёт убывания величины заряда и соответствующей отраженной волны.

Функция  $F$  имеет полюс в точке  $\theta = \chi_p = \arccos(1/n_2\beta)$ , вблизи которой метод перевала неприменим (это граница области существования черенковского излучения). Имеется также особенность типа точки ветвления в точке  $\theta = \chi_b = \arcsin(n_1/n_2)$ , вблизи которой метод перевала также неприменим. При  $\theta \rightarrow \chi_p$  отдельные слагаемые в (3.14) стремятся к бесконечности, однако в целом величина  $F$  остается конечной. Ее значение при  $\theta = \chi_p = \arccos(1/n_2\beta)$  равно

$$F \approx \frac{(\mu_2 / \varepsilon_2)^{1/4}}{\varepsilon_2 \sqrt{n_1^2 \beta^2 - n_2^2 \beta^2 + 1} + \varepsilon_1} \left[ \frac{-2}{\sqrt{n_2^2 \beta^2 - 1}} \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} \frac{(n_1^2 \beta^2 - 1) \sqrt{n_1^2 \beta^2 - n_2^2 \beta^2 + 1} + (n_2^2 \beta^2 - 1)}{n_2^2 - n_1^2} + i\sqrt{n_2^2 \beta^2 - 1} \left( \varepsilon_2 \sqrt{n_1^2 \beta^2 - n_2^2 \beta^2 + 1} - \varepsilon_1 \right) \left( \frac{\omega\tau}{1 - 2i\tau\omega} + \frac{1}{2i} \right) e^{2i\omega t_0} \right] - i(\mu_2 / \varepsilon_2)^{1/4} \sqrt{n_2^2 \beta^2 - 1} (\omega t_0 + \omega\tau). \quad (3.15)$$

На рис. 13 – 18 приведены примеры зависимостей  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  для случая  $\varepsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.5$  (рис. 13 – 15) и  $\varepsilon_2 = 4$  (рис. 16 – 18). На этих рисунках показаны зависимости во всем диапазоне углов  $0 \leq \tilde{\theta} \leq \pi$ , так что они включают и диапазон  $0 \leq \tilde{\theta} \leq \pi/2$  (первая среда).

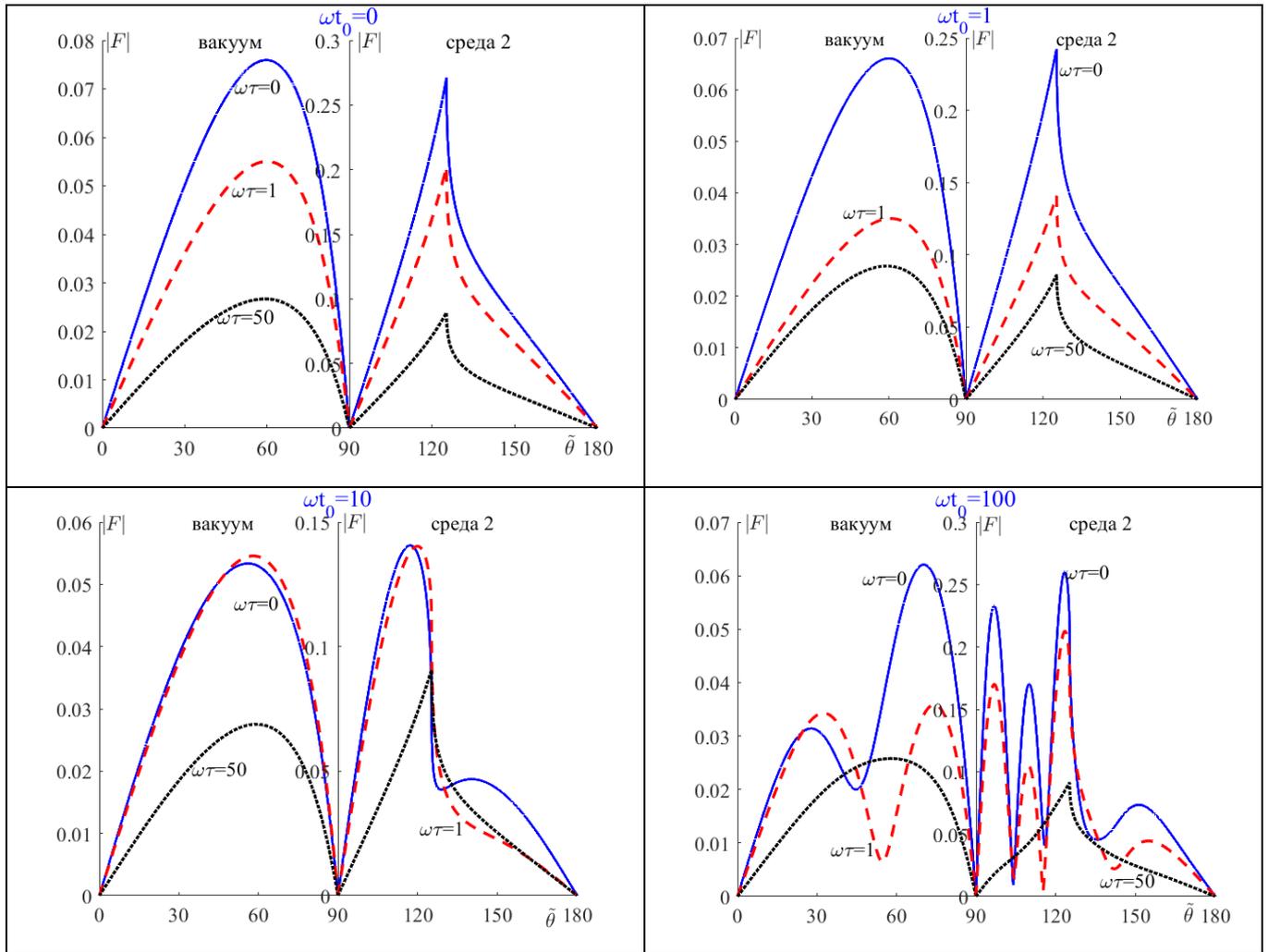


Рис. 13. Зависимость  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при  $\beta = 0.1$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.5$  в случаях  $\omega t = 0$  (синяя линия),  $\omega t = 1$  (красный пунктир) и  $\omega t = 50$  (чёрный мелкий пунктир (точки)).

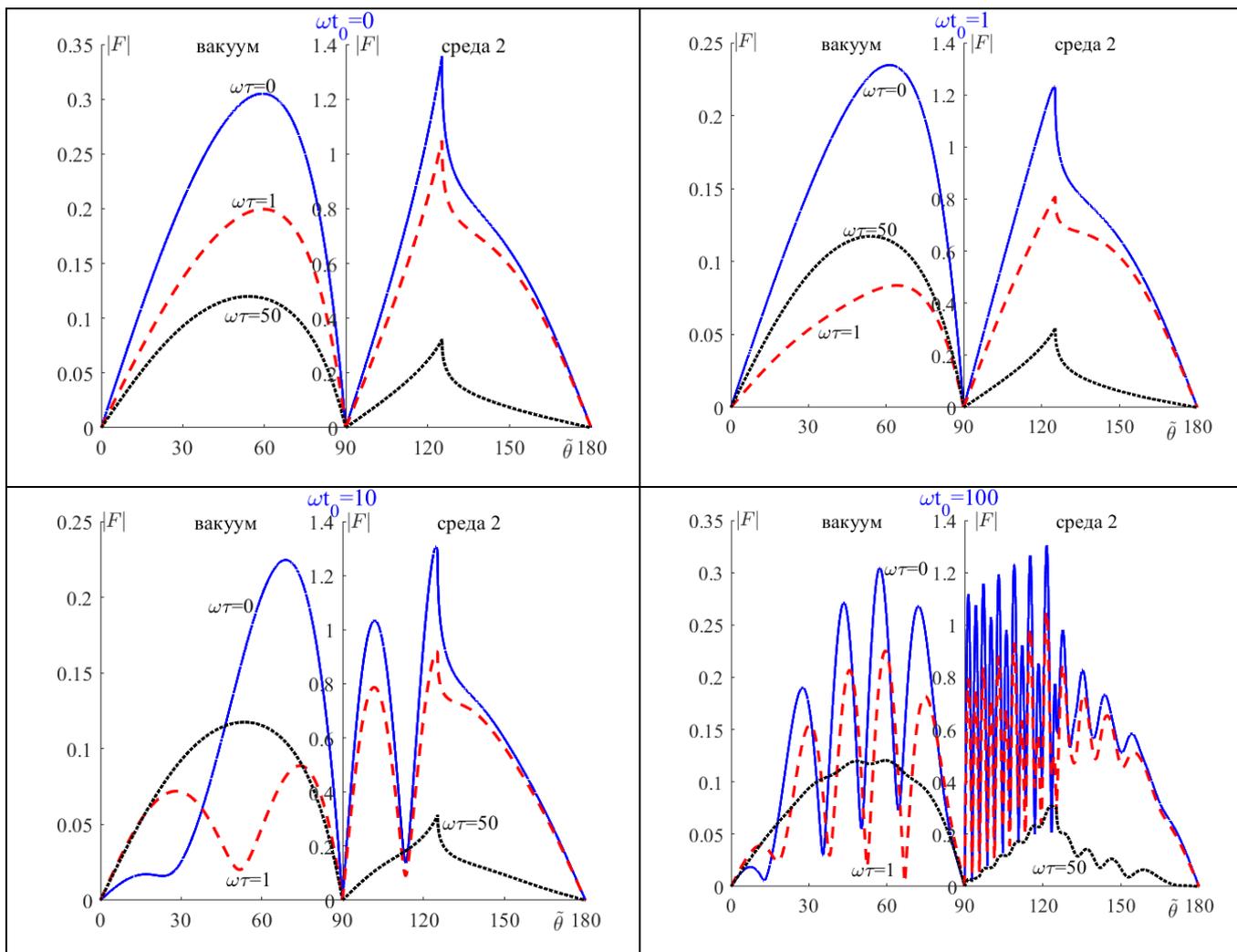


Рис. 14. Зависимость  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при  $\beta = 0.5$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.5$  в случаях  $\omega\tau = 0$  (синяя линия),  $\omega\tau = 1$  (красный пунктир) и  $\omega\tau = 50$  (чёрный мелкий пунктир (точки)).

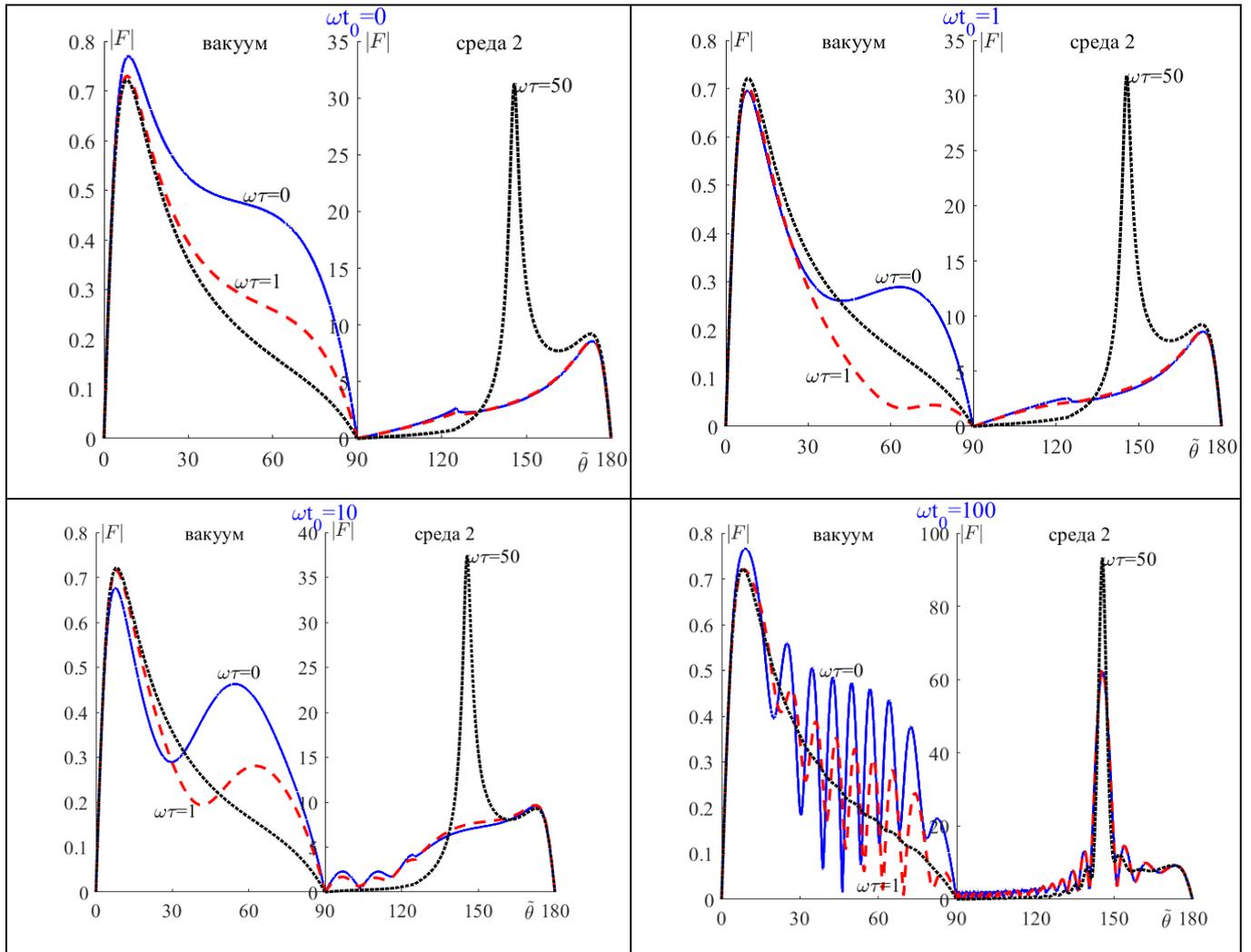


Рис. 15. Зависимость  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при  $\beta = 0.99$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.5$  в случаях  $\omega\tau = 0$  (синяя линия),  $\omega\tau = 1$  (красный пунктир) и  $\omega\tau = 50$  (чёрный мелкий пунктир (точки)).

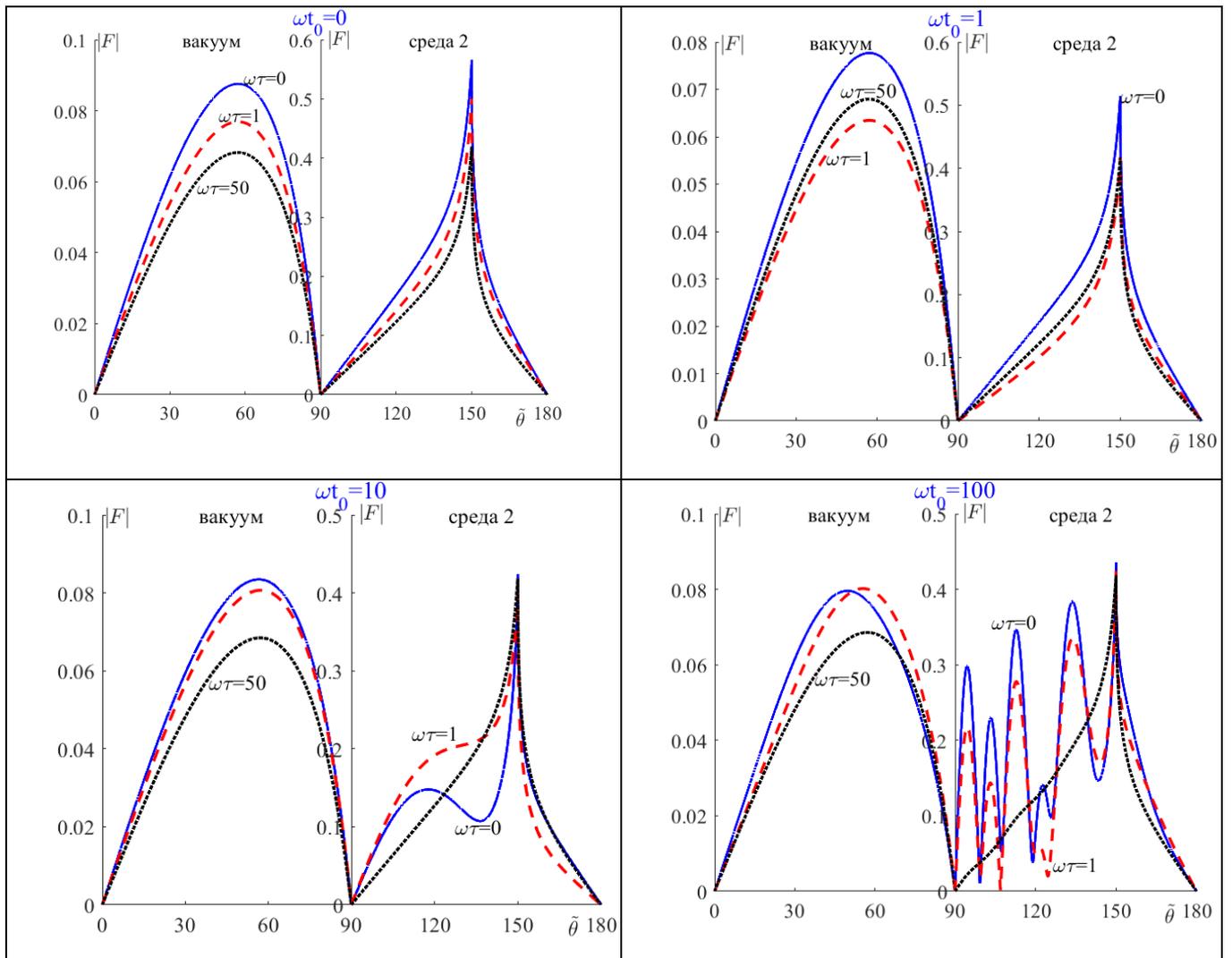


Рис. 16. Зависимость  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при  $\beta = 0.1$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 4$  в случаях  $\omega\tau = 0$  (синяя линия),  $\omega\tau = 1$  (красный пунктир) и  $\omega\tau = 50$  (чёрный мелкий пунктир (точки)).

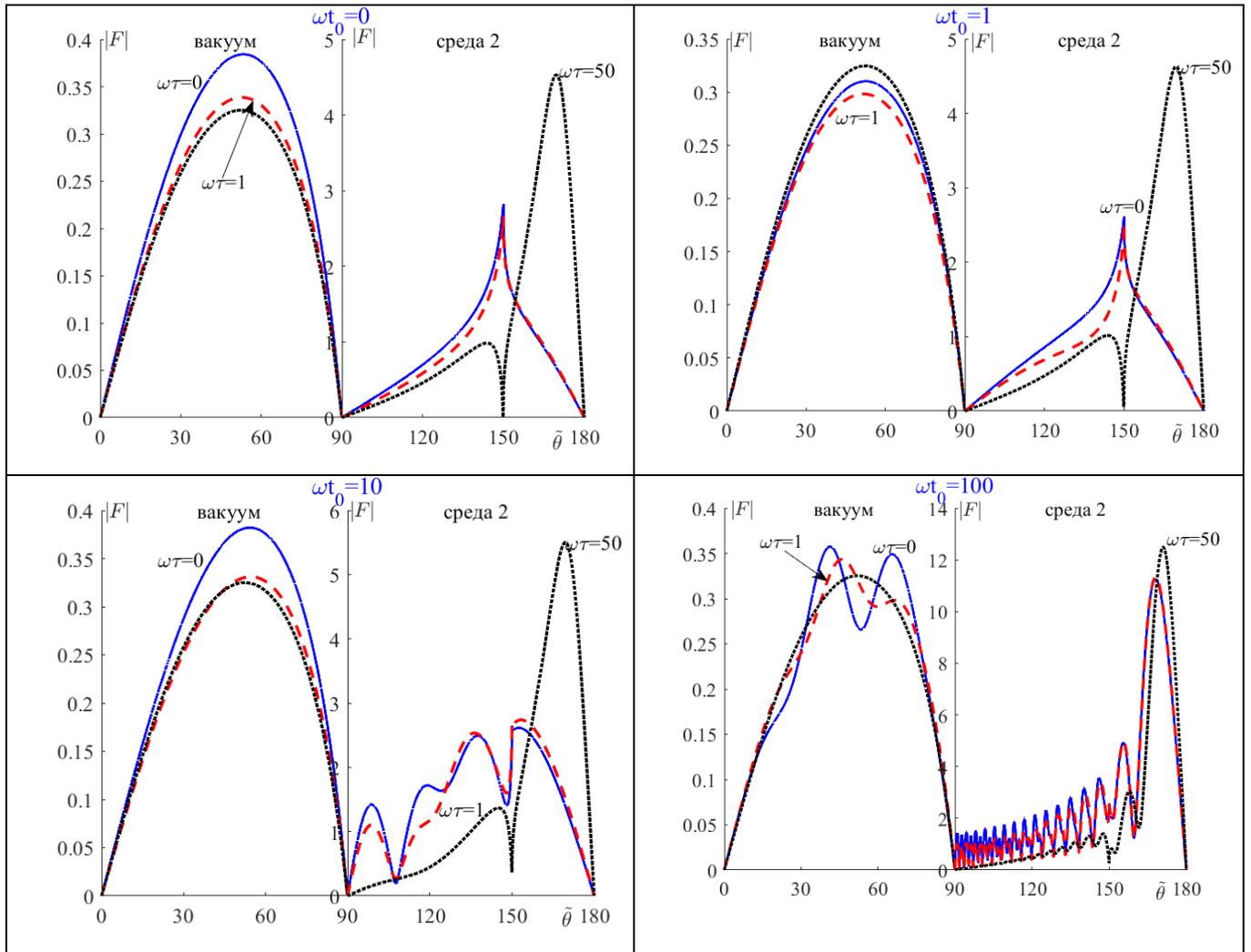


Рис. 17. Зависимость  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при  $\beta = 0.5$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 4$  в случаях  $\omega\tau = 0$  (синяя линия),  $\omega\tau = 1$  (красный пунктир) и  $\omega\tau = 50$  (чёрный мелкий пунктир (точки)).

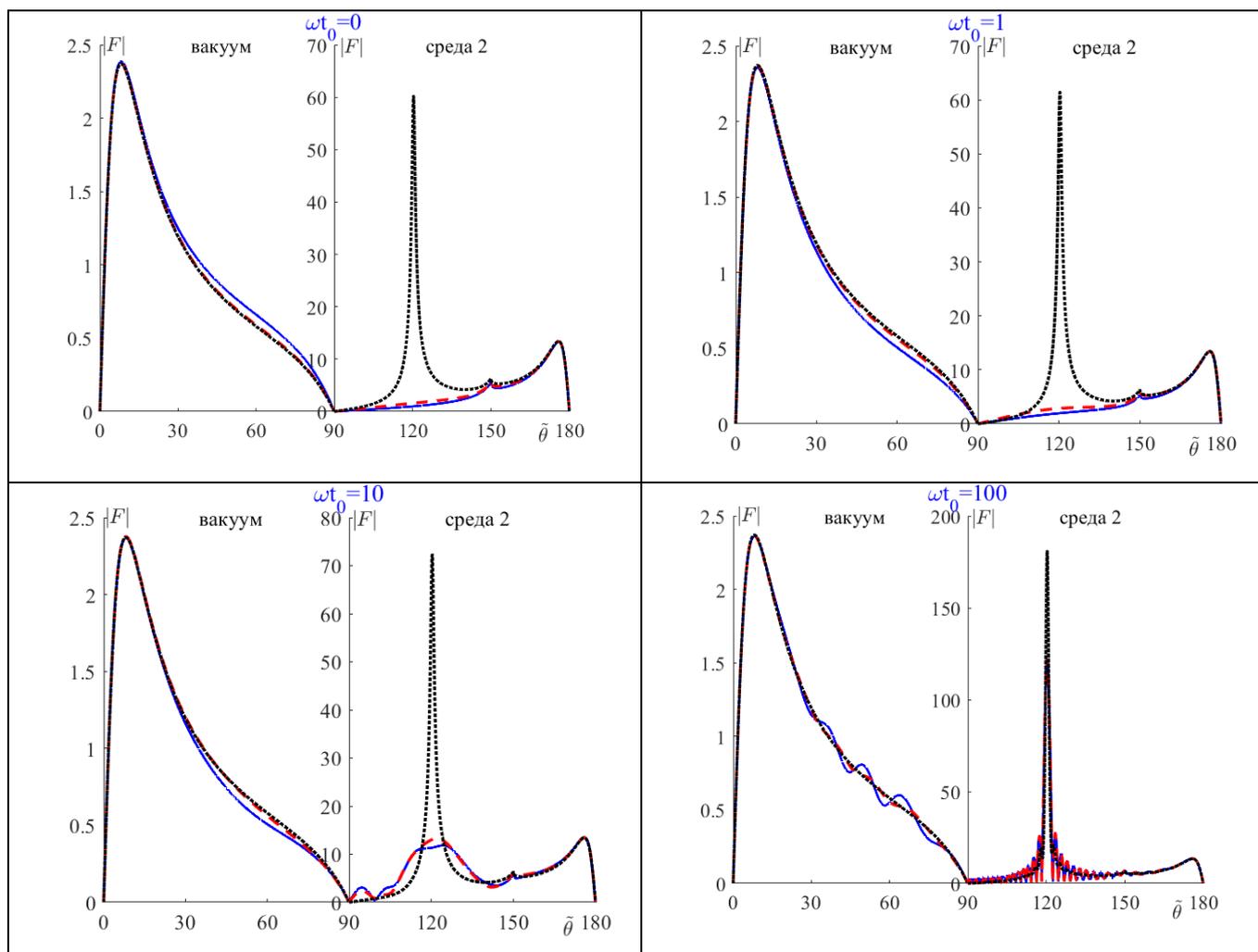


Рис. 18. Зависимость  $|F|$  от угла  $\tilde{\theta} = \pi - \theta$  при  $\beta = 0.99$  для  $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 4$  в случаях  $\omega\tau = 0$  (синяя жирная линия),  $\omega\tau = 1$  (красный пунктир) и  $\omega\tau = 50$  (чёрный мелкий пунктир (точки)).

Из приведенных графиков видно, что излучение в среде 2 ( $90^\circ < \tilde{\theta} < 180^\circ$ ), как правило, является более интенсивным, чем в среде 1 ( $0^\circ < \tilde{\theta} < 90^\circ$ ). Эта разница возрастает с ростом скорости, так что для ультрарелятивистских частиц различие в главных максимумах в областях 1 и 2 может составлять несколько порядков.

Далее отметим, что излучение вдоль границы раздела не распространяется. Из формулы (3.14) при  $\theta = \pi/2$  следует, что энергия классического переходного излучения равна нулю, энергия суммы сферической волны за счёт убывания величины заряда и соответствующей отраженной волны тоже равна нулю. Такой вывод справедлив для среды с произвольными значениями  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\mu_2$ . Это объясняется тем, что при  $\theta \approx \pi/2$  поле в волновой зоне определяется падающей волной и волной, отраженной от границы под «скользящим» углом; коэффициент отражения при этом близок к  $-1$ , вследствие чего суммарное поле близко к нулю.

При фиксированном значении  $\omega t_0$ , чем быстрее уменьшается заряд сгустка (т.е. чем меньше  $\omega \tau$ ), тем больше энергия излучения. Этот эффект вполне понятен, так как уменьшение  $\tau$  означает увеличение числа частиц сгустка, которые останавливаются за единицу времени.

При достаточно большом значении  $\omega t_0$  в среде 2 (как и в среде 1) имеется множество максимумов и минимумов в угловой зависимости. Как уже отмечалось выше, этот эффект объясняется тем, что при достаточно большом удалении области «таяния» заряда сгустка от границы раздела возникает сложная интерференционная картина, обусловленная сложением сферических волн, исходящих из разных областей пространства.

Отметим, что на графиках виден «излом» во второй среде при  $\theta = \chi_b = \arcsin(n_1/n_2)$ . Математически этот эффект связан с тем, что при таком угле имеет место совпадение седловой точки подынтегральной функции с точкой ее ветвления. Строго говоря, при данном угле и в близкой ему области (при  $|\theta - \chi_b| \leq 1/(k_2 R)$ ) полученные асимптотики не справедливы. Однако вследствие условия  $k_2 R \gg 1$  данная угловая область незначительна (а при  $k_2 R \rightarrow \infty$  – бесконечно мала).

Другие важные эффекты можно видеть в случае, когда скорость движения заряда выше скорости волн во второй среде ( $n_2 \beta > 1$ ) и, соответственно, генерируется излучение Вавилова-Черенкова (рис. 15, 18). Подчеркнем, что само черенковское излучение на этих графиках не отражено. Его поле убывает пропорционально  $1/\sqrt{r}$ , вследствие чего оно гораздо больше поля сферических волн. Однако оно существует лишь в некоторой полосе (см. рис. 5), которая в рассматриваемой области  $k_2 R \gg 1$  имеет малую угловую ширину. Если  $k_2 R \rightarrow \infty$ , то это излучение имеется лишь при  $\theta = \chi_p = \arccos(1/(n_2 \beta))$ . Если же  $k_2 R$  – велико, но конечно, то ИВЧ имеется только в узком угловом диапазоне. Приведенные графики неверны в малой угловой области  $|\theta - \chi_p| \leq vt_0/R$ . (Отметим, что равномерные асимптотики, пригодные при  $\theta \approx \chi_p$  для случая однородной безграничной среды были получены нами ранее [15, 16]).

В случае  $n_2 \beta > 1$  можно отметить две особенности сферической волны. Во-первых, она намного интенсивнее, чем в случае  $n_2 \beta < 1$ , что видно из сравнения рис. 15 с рис. 13, 14 и рис. 18 с рис. 16, 17. Во-вторых, если величины  $\omega t_0$  и/или  $\omega \tau$  достаточно велики, то имеется резкий максимум при угле  $\theta = \chi_p = \arccos(1/(n_2 \beta))$ . Таким образом, переход от «досветового» ( $n_2 \beta < 1$ ) режима движения заряда к «сверхсветовому» ( $n_2 \beta > 1$ ) приводит не только к появлению излучения Вавилова-Черенкова, но и к радикальным изменениям в спектрально-угловой плотности энергии сферической волны.

## Заключение

В работе исследовано электромагнитное излучение сгустка заряженных частиц малого размера, пересекающего плоскую границу раздела между двумя средами. Предполагалось, что величина заряда экспоненциально убывает, начиная с некоторого момента времени после влета заряда во вторую среду. При этом учитывалось, что в среде образуется нитевидный «след», состоящий из неподвижных зарядов. Первая среда считалась оптически менее плотной, и предполагалось, что излучение Вавилова-Черенкова может генерироваться только во второй среде.

Получено общее решение задачи, которое представляет собой сумму вынужденного поля, т.е. поля заряда в неограниченной среде, и свободного поля, обусловленного влиянием границы раздела. Было проведено асимптотическое исследование полученных выражений в волновой зоне. Были найдены выражения для сферической волны и для цилиндрической волны, которая генерируется во второй среде при достаточно высокой скорости заряда. Сферическая волна радикально отличается от обычного переходного излучения заряда, пересекающего границу раздела, так как фактически она состоит из двух частей: волны переходного излучения и волны, которая генерируется за счёт «таяния» заряда и образования его «следа».

Проведен ряд расчетов для случая влета заряда из вакуума в оптически более плотную среду. Если процесс «таяния» заряда начинается от границы раздела, то угловое распределение энергии сферической волны имеет только один максимум в каждой из двух областей. Во второй области излучение, как правило, значительно больше, чем в вакуумной области, и эта разница нарастает с ростом скорости заряда. Если скорость заряда выше скорости света во второй среде, то в ней, наряду с появлением излучения Вавилова-Черенкова, происходит радикальное изменение свойств сферической волны. В частности, резко возрастает максимум в угловом распределении энергии излучения. При значительном расстоянии от точки влета до области «таяния» заряда имеет место сложная интерференционная картина с рядом экстремумов, обусловленная сложением разных сферических волн.

## Список литературы

1. Франк И.М. Излучение Вавилова-Черенкова: вопросы теории. М.: Наука, 1988. 288 с.
2. Джелли Дж. Черенковское излучение и его применения. М.: Изд. Иностран. лит., 1960. 335 с.
3. Зрелов В.П. Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий. Ч. 1, 2. М.: Атомиздат, 1968.
4. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984. 360 с.
5. Afanasiev G.N. Vavilov-Cherenkov and synchrotron radiation: foundations and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. 491 с.
6. Болотовский Б.М., Теория эффекта Вавилова-Черенкова // Успехи физических наук, т. 62, № 3, с. 201 – 246 (1957).
7. Болотовский Б.М., Теория эффекта Вавилова-Черенкова (III) // Успехи физических наук, т. 75, № 2, с. 295 – 350 (1961).
8. Тюхтин А.В. Излучение Вавилова-Черенкова в изотропной среде. СПб.: СПбГУ, 2019. 79 с.
9. А.Д. Канарейкин. Взаимодействие и динамика электромагнитных волн и релятивистских электронных сгустков в волноводных структурах со сложным заполнением. Дисс. д-ра. физ.-мат. наук. СПб., СПбГУ, 2012).
10. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействие импульсных пучков заряженных частиц с веществом. М., Физматлит, 2003. 288 с.
11. Черняев А.П., Белоусов А.В., Лыкова Е.Н. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом. М.: МГУ, 2019.
12. Батурицкий М.А., Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом, Минск, МГЭУ, 2005.
13. Jang K.W., Yoo W.J., Shin S.H., Shin D., Lee B., Fiber-optic Cerenkov radiation sensor for proton therapy dosimetry // Optics Express, v. 20(13), 13907 (2012).
14. Stuchebrov S.G., Cherepennikov Yu.M., Krasnykh A.A., Miloichikova I.A., Vukolov A.V., The method for the electron beam cross section measurement based on the detection of Cherenkov radiation in dielectric fiber // Journal of Instrumentation, v. 13, C05020 (2018).
15. Фань С., Излучение движущегося в среде сгустка частиц, обладающего переменной величиной заряда // Выпускная квалификационная работа бакалавриата, научн. рук. А.В. Тюхтин. СПб, СПбГУ, 2021.
16. Тюхтин А.В., Фань С., Излучение движущегося сгустка частиц с переменной величиной заряда // Журнал технической физики, т. 92, вып. 9, с. 1415-1424 (2022).
17. Galyamin S.N., Tyukhtin A.V., Kanareykin A., Schoessow P., Reversed Cherenkov-transition radiation by a charge crossing a left-handed medium boundary // Physical Review Letters, 2009, V.103, 194802.
18. Galyamin S.N., Tyukhtin A.V., Electromagnetic field of a moving charge in the presence of a left handed medium // Physical Review B, 2010, V.81, p.235134.
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
20. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
21. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.

22. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Том 1. М.: Мир, 1978. С.472-493.
23. Болотовский Б.М., Столяров С.Н., О принципах излучения в среде с дисперсией // В кн.: Проблемы теоретической физики. Сборник памяти И.Е. Тамма. М., Наука, 1972. С.267-280.