Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Вычислительная стохастика и статистические модели

Пимахов Кирилл Юрьевич

Экспоненциальные сигналы в Анализе Сингулярного Спектра

Бакалаврская работа

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент В. В. Некруткин

Рецензент:

к. ф.-м. н., доцент Н. Э. Голяндина

Санкт-Петербург

2016

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Computational Stochastics and Statistical Models

Pimakhov Kirill Yuryevich

Exponential signals in singular spectrum analysis

Bachelor's Thesis

Scientific Supervisor:
Associate Professor V. V. Nekrutkin

Reviewer:
Associate Professor N. E. Golyandina

Saint Petersburg
2016

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1. Общее описание задачи.

Существует семейство методов анализа временных рядов, основанных на *Signal Subspace* подходе. Для них, в частности, точность оценки незашумленного временного ряда зависит от близости некоторых пространств. Следуя [1], рассмотрим следующую задачу.

Пусть имеется исходный ряд («сигнал») $\mathrm{F}_N = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, «помеха» $\mathrm{E}_N = (e_0, e_1, \ldots, e_{N-1})$, и наблюдается ряд $\mathrm{F}_N(\delta) = \mathrm{F}_N + \delta \mathrm{E}_N$. Задача состоит в том, чтобы получить приемлемое приближение $\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta)$ к сигналу F_N.

Прежде чем формально описать рассматриваемый способ решения этой задачи, введем нужные обозначения.

Будем считать, что ряд F_N можно задать с помощью рекуррентной формулы

$$f_n = \sum_{k=1}^{d} b_k f_{n-k}, \quad n \geq d. \tag{1.1.1}$$

с минимально возможным для данного ряда d. Преобразуем временной ряд F_N, удовлетворяющий формуле (1.1.1), в матрицу $\mathbf{H}$ размерности $L \times K$, где $L + K = N - 1$ и $\min{(L, K)} \geq d$:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{K-1} \\ f_1 & \ddots & & f_K \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & \cdots & f_{L+K-1} \end{pmatrix}.$$

Такая матрица называется траекторной. Она содержит много важной информации о ряде. Например, $\operatorname{rank} \mathbf{H} = d$ где d — количество начальных элементов, задающих рекуррентную последовательность (1.1.1). Аналогичную матрицу для ряда E_N будем обозначать $\mathbf{E}$.

Траекторную матрицу для $\mathrm{F}_N(\delta)$ будем обозначать $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$. Но нам больше интересна симметричная матрица $\mathbf{A}$ размера $L \times L$, задаваемая равенством $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. Заметим, что её собственные числа вещественные и неотрицательные. Пусть $\mathbb{U}_0$ — подпространство, порожденное собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$ с собственным числом

0, а $\mathbb{U}_0^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Тогда $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_0^{\perp}$ — соответственно операторы ортогонального проектирования на эти подпространства.

Обозначим $\mathbb{U}_0^{\perp}(\delta)$ подпространство, образованное d собственными векторами матрицы $\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\delta)$, соответствующими её наибольшим собственным числам, а $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ — оператор ортогонального проектирования на это подпространство. $\mathbb{U}_0^{\perp}$ и $\mathbb{U}_0^{\perp}(\delta)$ и есть интересующие нас пространства. Их близость будем оценивать как близость их операторов проектирования $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|$, причем рассматриваться будет асимптотический случай $N \to \infty$.

Один из главных результатов, с помощью которого делаются оценки $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|$, основан на классическом разложении Т. Като [2] и имеет (см. [1, th.2.1]) следующий вид.

Теорема 1.1.1 (Разложение Като)**.** *Если существует такое* δ_0 *, что при любом* $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ *выполнено неравенство* $\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{\min}/2$*, то*

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta), \tag{1.1.2}$$

где

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1+\cdots+l_{p-1}=p,\, l_j \geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \ldots, l_{p+1})$$

и

$$\mathbf{W}_p(l_1, \ldots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{l_1}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{l_2} \ldots\ \mathbf{S}_0^{l_p}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{l_{p+1}}.$$

Также имеет место ещё одно разложение:

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)}, \tag{1.1.3}$$

где

$$\mathbf{V}_0^{(n)} = \sum_{p=\lceil n/2 \rceil}^{n} (-1)^n \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_p=n,\, s_i=1,2 \\ l_1+\cdots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0}} \mathbf{V}_0^{(n)}(\mathfrak{s}, \mathfrak{l}),$$

$\mathfrak{s} = (s_1, \ldots, s_p)$, $\mathfrak{l} = (l_1, \ldots, l_{p+1})$ *и* $\mathbf{V}_0^{(n)}(\mathfrak{s}, \mathfrak{l}) = \mathbf{S}_0^{l_1}\mathbf{A}^{(s_1)}\mathbf{S}_0^{l_2} \ldots\ \mathbf{S}_0^{l_p}\mathbf{A}^{(s_p)}\mathbf{S}_0^{l_{p+1}}$.

Пусть $\mathbf{S}_0$ — псевдообратная матрица к $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k > 1$. Обозначим $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta\mathbf{A}^{(1)} + \delta^2\mathbf{A}^{(2)}$, а также $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$ — минимальное и максимальное положительные собственные числа $\mathbf{A}$.

Далее используется несколько результатов о близости проекторов $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ и $\mathbf{P}_0$ (именно на близости пространств $\mathbb{U}_0^{\perp}$ и $\mathbb{U}_0^{\perp}(\delta)$ основаны многие Signal Subspace методы).

Теорема 1.1.2. [1, th.2.3].

Если существует такое $\delta_0 > 0$, *что при любом* $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ *выполнено неравенство* $\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{\min}/4$, *то*

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0\| \leqslant 4C \frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}}\ , \tag{1.1.4}$$

где C *— некоторая абсолютная константа.*

Теорема 1.1.3. [1, prop.3.1].

Пусть $\Theta = \Theta_1\Theta_2$, $\Theta_1 = \sqrt{\nu_{\max}/\mu_{\max}}$, $\Theta_2 = \mu_{\max}/\mu_{\min}$, *где* $\mu_{\min}, \mu_{\max}$ *— минимальное и максимальное положительные собственные числа матрицы* $\mathbf{A}$, *а* $\nu_{\max}$ *— максимальное собственное число* $\mathbf{A}^{(2)}$. *Если* $\Theta \to 0$ *при* $N \to \infty$, *то*

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\right\| = \delta^2 O(\Theta^2),$$

где

$$\mathbf{V}_0^{(1)} = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0. \tag{1.1.5}$$

В настоящей работе рассматривается один из Signal Subspace методов, называемый SSA (Singular Spectrum Analysis). Он используется для разделения исходного ряда на несколько различных интерпретируемых аддитивных компонент. Подробное описание метода можно найти в [3] или в [4].

В статье [1] рассматривается вариант SSA, посвященный уже описанной задаче отделения сигнала $\mathrm{F}_N = (f_0, \ldots, f_{N-1})$ от аддитивной помехи $\mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_{N-1})$ при больших N.

В рассматриваемой ситуации процедуру SSA можно описать следующим образом.

1. производится сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}(\delta)$;

2. элементарные матрицы этого разложения, соответствующие d наибольшим сингулярным числам, суммируются. В результате получается матрица $\widetilde{\mathbf{H}}$;

3. производится ганкелизация матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}$, то есть строится ганкелева матрица, наиболее близкая к $\widetilde{\mathbf{H}}$ по норме Фробениуса;

4. наконец, эта матрица взаимно-однозначным образом преобразуется во временной ряд $\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta)$, который объявляется приближением к F_N. В дальнейшем оператор перехода от произвольной матрицы $\mathbf{G}$ к порождаемому ею временному ряду G обозначается $\mathcal{S}$, так что $\mathrm{G} = \mathcal{S}(\mathbf{G})$.

В [1] показано, что ряд $\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N$ (то есть ряд из погрешностей полученной аппроксимации сигнала F_N) имеет следующий вид;

$$\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N = \mathcal{S}\big(\big(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\big)\,\mathbf{H}(\delta) + \delta\,\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\big)\,. \tag{1.1.6}$$

Формула (1.1.6) подчеркивает роль близости пространств $\mathbb{U}_0^{\perp}$ и $\mathbb{U}_0^{\perp}(\delta)$ в методе SSA.

Представление (1.1.6), в частности, было применено в [1] для растущего экспоненциального сигнала $f_n = a^n$ с $a > 1$ и постоянной помехи $e_n = 1$. При этом оказалось, что максимальная по модулю погрешность аппроксимации элементов сигнала F_N не будет стремиться к нулю, если $L \sim \alpha N$ с $\alpha \in (0,1)$ при $N \to \infty$. Такой же результат имеет место для "пилообразной" помехи $e_n = (-1)^n$ (см. [5]).

Основной целью настоящей работы является исследование точности метода SSA для сигнала $f_n = a_1^n + c a_2^n$ с простейшей постоянной помехой при условии $a_1 > a_2 > 1$ и $N \to \infty$. Для этого понадобятся точные выражения (и их асимптотики) собственных чисел $\mu_{\max}$ и $\mu_{\min}$ матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.

При отыскании этих собственных чисел будут использоваться следующие общие утверждения, доказательство которых можно найти в [6].

Пусть матрица $\mathbf{G}$ размера $L \times K$ ранга $d < \min L, K$ представлена в виде

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^{d} P_k Q_k^{\mathrm{T}}, \quad P_k \in \mathbb{R}^L,\ Q_k \in \mathbb{R}^K,$$

где $P_1, \ldots, P_d$ (и $Q_1, \ldots, Q_d$) — линейно независимые вектора. Введем следующие обозначения.

- $\sigma_i = \|P_i\|\|Q_i\|$. Не умаляя общности, будем считать, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_d$.
- $X_i = P_i/\|P_i\|$, $Y_i = Q_i/\|Q_i\|$.
- $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_d]$, $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_d]$.
- $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное число $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$.
- $\mathbf{U} = [P_1 : \ldots : P_d]$, $\mathbf{V} = [Q_1 : \ldots : Q_d]$.
- $$\Pi_{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} \|P_1\| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \|P_d\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|Q_1\| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \|Q_d\| \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{C} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\Pi_{\mathrm{PQ}}\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}\Pi_{\mathrm{PQ}}$,
- $\mathbf{C}' = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$.

Лемма 1.1.1. [6, lem. 2.1]

Если λ — положительное собственное число $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ с собственным вектором Z, то

1. *λ — собственное число $\mathbf{C}$ с собственным вектором $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}Z$.*
2. *λ является собственным числом $\mathbf{C}'$ с собственным вектором $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}Z$.*

Теорема 1.1.4. [6, prop. 2.1]

Пусть вектора P_k, Q_k меняются так, что

$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \to \mathbf{B}_1$, $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} \to \mathbf{B}_2$, где матрицы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ обратимы.

1. *Пусть $\sigma_1 \to \infty$ и $\sigma_j/\sigma_1 \to c_j$. Обозначим*

$$\Lambda_{\max} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_d \end{pmatrix}.$$

Если матрица $\mathbf{M}_1 = \mathbf{B}_1\Lambda_{\max}\mathbf{B}_2\Lambda_{\max}$ не нильпотентная, то $\lambda_{\max}/\sigma_1^2 \to \theta > 0$, где θ_1 — максимальное собственное число $\mathbf{M}_1$.

2. *Пусть $\sigma_d \to \infty$ и $\sigma_d/\sigma_j \to d_j$. Обозначим*

$$\Lambda_{\min} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если матрица $\mathbf{M}_2 = \Lambda_{\min}\mathbf{B}_2^{-1}\Lambda_{\min}\mathbf{B}_1^{-1}$ не нильпотенная, то $\lambda_{\min}/\sigma_d^2 \to \theta_2 > 0$, где $1/\theta_2$ — максимальное собственное число $\mathbf{M}_2$.

1.2. Результаты работы

Как уже говорилось, в работе проводилось изучение метода SSA для частного случая сигнала $f_n = a_1^n + ca_2^n$ и постоянной помехи $e_n = 1$. Приведем описание полученных результатов по разделам.

В главе 2 изучается асимптотика нормы $\|\mathbf{B}(\delta)\|$.

Условие $\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{\min}/2$ при грубой оценке порождает неестественное ограничение $a_1 < a_2^2$ на исследуемый сигнал, как, например, в предложении [1, prop.3.3]. Первой целью работы является попытка ослабления этого условия с помощью нахождения точной асимптотики $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}$. В теореме 2.2.1 раздела 2.2 показано, что таким образом ослабить условие не удается. Для получения этого результата понадобился анализ асимптотического поведения собственных чисел матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, что составляет содержание раздела 2.1. Эти асимптотики неоднократно используются и в дальнейших разделах.

Существует оценка нормы разности проекторов [1, prop.3.3], полученная с помощью (1.1.4), которая при условиях $a_1/a_2^2 < 1$ и $L, K \to \infty$, в рассматриваемом случае имеет вид

$$\limsup_N \,(LK)^{-1/2}\big(a_1/a_2^2\big)^{-N}\big\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\big\| \le C|\delta|, \tag{1.2.1}$$

где C — некоторая константа. В теореме 3.1.1 раздела 3.1 доказана (в тех же условиях, что и (1.2.1)) более точная оценка сверху нормы разности проекторов, она имеет порядок $\sqrt{L}a_2^{-N}$. Эта теорема является одним из двух основных результатов главы 3.

Второй основной результат главы связан с асимптотикой нормы оператора $\mathbf{V}_0^{(1)}$, который определяет линейный (по параметру возмущения δ) член разложения (1.1.3). В разделе 3.2 (см. теорему 3.2.1) найден вид этой асимптотики, и, кроме того, показано, что $\mathbf{V}_0^{(1)}$ является главным членом разности $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}$ при дополнительном условии $a_1 < a_2^{3/2}$.

Последняя глава 4 работы посвящена ошибкам восстановления в методе Анализа Сингулярного Спектра. В разделе 4.1 описывается (следуя [1, Ch. 5. 3]) общая схема нахождения таких ошибок, а в разделе 4.2 исследуется ошибка восстановления последнего элемента сигнала. Оказывается (теорема 4.2.1), что эта ошибка, при дополнительном условии $a_1 < a_2^{4/3}$, имеет конечный предел r_∞, который, вообще говоря, не совпадает с нулем. В этом случае, конечно, максимальная по модулю ошибка метода Анализа Сингулярного Спектра тоже не будет стремиться к нулю при длине ряда, стремящемся к бесконечности.

В Приложении помещены графические иллюстрации к доказанным результатам. Кроме того, графики, помещенные в разделы A.7 и A.8 (см. рисунки A.12, A.14 и A.15) позволяют высказать предположение, что условие $a_1/a_2^2 < 1$, при котором доказывались многие перечисленные результаты работы, является излишне сильным.

Наконец, из рис. А.9, А.10 в разделе А.6 следует, что предельная ошибка r_∞ восстановления последнего элемента сигнала действительно, вообще говоря, не является нулевой.

Глава 2

Достаточное условие разложения Като

Как уже упоминалось, достаточным условием справедливости разложения Като (теорема 1.1.1) является выполнение неравенства $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} < 1/2$. Поскольку нас такое неравенство интересует для любых δ при больших N, то возникает вопрос об асимптотическом поведении $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}$ при $N \to \infty$.

Использование грубого неравенства

$$\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} \leq |\delta| \|\mathbf{A}^{(1)}\| + \delta^2 \, \|\mathbf{A}^{(2)}\|$$

приводит (см. [1, prop 3.3]) к условию $a_1/a_2^2 < 1$, при невыполнении которого, малость отношения $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}$ не может быть гарантирована при больших N.

Здесь будет представлено точное асимптотическое выражение $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}$ и будет показано, что условие $a_1/a_2^2 < 1$ при больших N ослабить нельзя.

2.1. Асимптотика $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$

Пусть $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$ — минимальное и максимальное положительные собственные числа матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. Найдем их явные выражения, а также асимптотики при $N \to \infty$.

Обозначим при $j = 1, 2$ и $i \geq 1$

$$A_{ij} = \left(1, a_j, a_j^2, \ldots, a_j^{i-1}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{2.1.1}$$

Лемма 2.1.1. *Пусть* $\mathbf{U} = [A_{L1} : A_{L2}]$, $\mathbf{V} = [A_{K1} : cA_{K2}]$, $\mathbf{C}' = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$, *где*

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix},$$

с

$$u_{11} = A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1}, \quad u_{12} = A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2}, \quad u_{22} = A_{L2}^{\mathrm{T}} A_{L2},$$
$$v_{11} = A_{K1}^{\mathrm{T}} A_{K1}, \quad v_{12} = c\, A_{K1}^{\mathrm{T}} A_{K2}, \quad v_{22} = c^2\, A_{K2}^{\mathrm{T}} A_{K2}.$$

Кроме того, положим

$$c_{11} = u_{11}v_{11} + u_{12}v_{12}, \quad c_{12} = u_{11}v_{12} + u_{12}v_{22},$$

$$c_{21} = u_{12}v_{11} + u_{22}v_{12}, \quad c_{22} = u_{12}v_{12} + u_{22}v_{22}.$$

Тогда

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2}\left(c_{11} + c_{22} + \sqrt{c_{11}^2 - 2c_{11}c_{22} + 4c_{12}c_{21} + c_{22}^2}\right). \tag{2.1.2}$$

и

$$\mu_{\min} = \frac{1}{2}\left(c_{11} + c_{22} - \sqrt{c_{11}^2 - 2c_{11}c_{22} + 4c_{12}c_{21} + c_{22}^2}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 1.1.1, положительные собственные числа матриц $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ совпадают. Явный вид собственных чисел получается непосредственно решением характеристического уравнения с матрицей $\mathbf{C}'$. □

Замечание 2.1.1. Заметим, что, так как $1 < a_2 < a_1$, то при $L, K \to \infty$,

$$c_{11} \sim \frac{a_1^{2N+2}}{(a_1^2-1)^2} + c\frac{(a_1a_2)^{2N+2}}{(a_1a_2-1)^2} \sim \frac{a_1^2}{(a_1^2-1)^2}\ a_1^{2N}\ ,$$

$$c_{12} \sim \frac{c\,a_1^{2L+K}a_2^K}{(a_1^2-1)(a_1a_2-1)} + \frac{c^2a_1^La_2^{2L+K}}{(a_1a_2-1)(a_2^2-1)} \sim \frac{c\,a_1}{(a_1^2-1)(a_1a_2-1)}\ a_1^{N+L}a_2^K\ ,$$

$$c_{21} \sim \frac{a_1^{L+2K}a_2^L}{(a_1a_2-1)(a_1^2-1)} + \frac{ca_1^Ka_2^{2L+K}}{(a_2^2-1)(a_1a_2-1)} \sim \frac{a_1}{(a_1a_2-1)(a_1^2-1)}\ a_1^{N+K}a_2^L,$$

$$c_{22} \sim \frac{c(a_1a_2)^{N+2}}{(a_1a_2-1)^2} + \frac{c^2a_2^{2N+2}}{(a_2^2-1)^2} \sim \frac{c(a_1a_2)^2}{(a_1a_2-1)^2}\,(a_1a_2)^N\,.$$

Теперь перейдем к асимптотикам собственных чисел. Положим

$$x_M = \cos(A_{M1}, A_{M2}) = \frac{(a_1a_2)^M-1}{a_1a_2-1}\sqrt{\frac{(a_1^2-1)(a_2^2-1)}{(a_1^{2M}-1)(a_2^{2M}-1)}} \quad \text{и}$$

$$x = \lim_{M\to\infty} x_M = \frac{\sqrt{(a_1^2-1)(a_2^2-1)}}{a_1a_2-1}\,. \tag{2.1.3}$$

Предложение 2.1.1. *Если $L, K \to \infty$, то*

$$\mu_{\max} \sim \frac{a_1^2}{(a_1^2-1)^2}\ a_1^{2N} \quad \text{и} \quad \mu_{\min} \sim c^2\,\frac{a_2^2(1-x^2)^2}{(a_2^2-1)^2}\ a_2^{2N}\ . \tag{2.1.4}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.1.4. В обозначениях этой теоремы

$$\mathbf{X} = [A_{L1}/\|A_{L1}\| : A_{L2}/\|A_{L2}\|], \quad \mathbf{Y} = [A_{K1}/\|A_{K1}\| : A_{K2}/\|A_{K2}\|],$$

$$\sigma_1 = \sqrt{(a_1^{2L}-1)(a_1^{2K}-1)}/(a_1^2-1), \quad \sigma_2 = c\sqrt{(a_2^{2L}-1)(a_2^{2K}-1)}/(a_2^2-1)\,. \tag{2.1.5}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_L \\ x_L & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & x_K \\ x_K & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1.$$

Сначала найдем асимптотику $\mu_{\max}$.

$$\Lambda_{\max} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{поэтому} \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{B}_1\Lambda_{\max}\mathbf{B}_2\Lambda_{\max} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{M}_1$ не нильпотентна, так как $\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{M}_1$, а её максимальное собственное число $\theta_1 = 1$, таким образом $\mu_{\max} \sim \sigma_1^2$ (σ_1 и σ_2 определены в (2.1.5)).

Теперь найдем $\mu_{\min}$.

$$\Lambda_{\min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1^{-1} = \frac{1}{1-x^2}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2^{-1} = \frac{1}{1-x^2}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\mathbf{M}_2 = \Lambda_{\min}\mathbf{B}_2^{-1}\Lambda_{\min}\mathbf{B}_1^{-1} = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{M}_2$ также не нильпотентна, а её максимальное собственное число имеет вид $\theta_2 = 1/(1-x^2)^2$. Поэтому $\mu_{\min} \sim \sigma_2^2(1-x^2)^2$. $\square$

Замечание 2.1.2. Аналогичным образом можно показать, что

$$\mu_{\max} \sim \begin{cases} \dfrac{(a_1^{2L_0}-1)}{(a_1^2-1)^2}\, a_1^{2K} & \text{при } L = L_0,\ K \to \infty, \\ \dfrac{(a_1^{2K_0}-1)}{(a_1^2-1)^2}\, a_1^{2L} & \text{при } K = K_0,\ L \to \infty \end{cases}$$

и

$$\mu_{\min} \sim \begin{cases} c^2\dfrac{(a_2^{2L_0}-1)(1-x_{L_0}^2)(1-x^2)}{(a_2^2-1)^2}\, a_2^{2K} & \text{при } L = L_0,\ K \to \infty, \\ c^2\dfrac{(a_2^{2K_0}-1)(1-x^2)(1-x_{K_0}^2)}{(a_2^2-1)^2}\, a_2^{2L} & \text{при } K = K_0,\ L \to \infty. \end{cases}$$

2.2. Асимптотика $\mathbf{B}(\delta)/\mu_{\min}$

Лемма 2.2.1. *Матрица*

$$\mathbf{B}(\delta) = \delta\big(\mathbf{HE}^{\mathrm{T}} + \mathbf{EH}^{\mathrm{T}}\big) + \delta^2\mathbf{EE}^{\mathrm{T}} \tag{2.2.1}$$

представима в виде $\mathbf{B}(\delta) = P_1Q_1^{\mathrm{T}} + P_2Q_2^{\mathrm{T}}$, *где вектора* P_1, P_2 *и* Q_1, Q_2 *линейно независимы.*

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{E} = E_L E_K^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{H} = A_{L1}A_{K1}^{\mathrm{T}} + cA_{L2}A_{K2}^{\mathrm{T}}$, где A_{ij} определено в (2.1.1). Отметим также, что $\mathbf{EE}^{\mathrm{T}} = KE_LE_L^{\mathrm{T}}$, где $E_i = \big(1,\ldots,1\big)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^i$. Далее,

$$\mathbf{HE}^{\mathrm{T}} = A_{L1}A_{K1}^{\mathrm{T}}E_KE_L^{\mathrm{T}} + c\,A_{L2}A_{K2}^{\mathrm{T}}E_KE_L^{\mathrm{T}} = (s_{K1}\,A_{L1} + c\,s_{K2}\,A_{L2})E_L^{\mathrm{T}}, \tag{2.2.2}$$

где

$$s_{Ki} = A_{Ki}^{\mathrm{T}}E_K = \sum_{j=0}^{K-1} a_i^j = (a_i^K - 1)/(a_i - 1)\ . \tag{2.2.3}$$

Аналогично

$$\mathbf{EH}^{\mathrm{T}} = E_L(s_{K1}\,A_{L1}^{\mathrm{T}} + c\,s_{K2}\,A_{L2}^{\mathrm{T}}). \tag{2.2.4}$$

Подставляя получившиеся выражения в правую часть (2.2.1), получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\delta) &= \delta\big(s_{K1}\,A_{L1} + c\,s_{K2}\,A_{L2} + \delta\,KE_L\big)E_L^{\mathrm{T}} + \delta E_L\big(s_{K1}\,A_{L1}^{\mathrm{T}} + c\,s_{K2}\,A_{L2}^{\mathrm{T}}\big) = \\ &= P_1Q_1^{\mathrm{T}} + P_2Q_2^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

где

$$Q_1 = P_2 = E_L,\ P_1 = \delta(s_{K1}A_{L1} + cs_{K2}A_{L2} + \delta KE_L),\ Q_2 = \delta(s_{K1}A_{L1} + cs_{K2}A_{L2}). \tag{2.2.6}$$

Векторы P_1, P_2 и Q_1, Q_2 линейно независимы, так как они не коллинеарны. □

Ясно, что $\|Q_1\| = \|P_2\| = \sqrt{L}$. Кроме того, так как $a_1 > a_2$, то при $L, K \to \infty$

$$\|Q_2\| = |\delta|\sqrt{\sum_{i=0}^{L-1}\big(s_{K1}\,a_1^i + cs_{K2}\,a_2^i\big)^2} \sim |\delta|\,\frac{a_1^K - 1}{a_1 - 1}\sqrt{\frac{a_1^{2L} - 1}{a_1^2 - 1}} \sim |\delta|\frac{a_1}{(a_1 - 1)\sqrt{a_1^2 - 1}}\,a_1^N; \tag{2.2.7}$$

$$\|P_1\| = |\delta|\sqrt{\sum_{i=0}^{L-1}\big(s_{K1}\,a_1^i + cs_{K2}\,a_2^i + K\delta\big)^2} \sim \|Q_2\| \sim |\delta|\frac{a_1}{(a_1 - 1)\sqrt{a_1^2 - 1}}\,a_1^N,$$

$$Q_1^{\mathrm{T}}Q_2 = \delta\left(s_{K1}\,\frac{a_1^L - 1}{a_1 - 1} + s_{K2}\,\frac{a_2^L - 1}{a_2 - 1}\right) \sim \frac{\delta\,a_1}{(a_1 - 1)^2}\,a_1^N \tag{2.2.8}$$

и

$$P_1^{\mathrm{T}}P_2 = Q_1^{\mathrm{T}}Q_2 + \delta^2KL \sim Q_1^{\mathrm{T}}Q_2.$$

Теорема 2.2.1. *При $L, K \to \infty$ верна асимптотика*

$$\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} \sim |\delta|\, \beta_1\, (a_1/a_2^2)^N \sqrt{L}, \tag{2.2.9}$$

где

$$\beta_1 = \frac{a_1(a_2^2-1)^2}{a_2^2 c^2 (1-x^2)^2 (a_1-1)\sqrt{a_1^2-1}}\ , \tag{2.2.10}$$

а x определено в (2.1.3).

Доказательство. Учитывая разложение (2.2.5), (2.2.6), применим теорему 1.1.4 с $\mathbf{B}(\delta) = \mathbf{G}$. Для этого рассмотрим матрицу $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^2$, где $b_{ii} = 1$, а в нашем случае (см. (2.2.7) и (2.2.8))

$$b_{12} = b_{21} = \frac{1}{\|Q_1\|\|Q_2\|}\ Q_1^{\mathrm{T}} Q_2 \sim \frac{\mathrm{sign}(\delta)}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{a_1+1}{a_1-1}}\ .$$

В результате получаем, что последовательность матриц $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$ сходится к единичной матрице. Такой же предел имеет последовательность матриц $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$, поскольку

$$\|P_1\| \sim \|Q_2\|,\ \|P_2\| = \|Q_1\| \text{ и } Q_1^{\mathrm{T}} Q_2 \sim P_1^{\mathrm{T}} P_2. \tag{2.2.11}$$

Далее, из (2.2.11) видим, что

$$\sigma_1 = \|P_1 Q_1\| \sim \sigma_2 = \|P_2 Q_2\| \sim |\delta| \sqrt{L}\, \frac{a_1}{(a_1-1)\sqrt{a_1^2-1}}\ a_1^N, \tag{2.2.12}$$

поэтому матрица $\Lambda_{\max}$ единичная. Значит, матрица $\mathbf{M}_1$ тоже единичная.

Следовательно, согласно утверждению теоремы 1.1.4, максимальное собственное число $\lambda_{\max}$ матрицы $\mathbf{B}(\delta)\mathbf{B}(\delta)^{\mathrm{T}}$ эквивалентно σ_1^2. Отсюда, учитывая (2.1.4) и (2.2.12), получаем требуемое. □

Замечание 2.2.1. Если $L = L_0$ или $K = K_0$, то (2.2.9) также имеет место, но коэффициент β_1 вместо (2.2.10) принимает другие значения.

Замечание 2.2.2. Результат теоремы 2.2.1 показывает, что в рамках теоремы 1.1.1 для рассматриваемой задачи условие $a_1/a_2^2 < 1$ при $L, K \to \infty$ ослабить нельзя.

Глава 3

О скорости сходимости $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\|$ и асимптотике $\left\|\mathbf{V}_0^{(1)}\right\|$

Из результата [1, prop.3.3], в частности, следует, что для рассматриваемых сигнала и помехи, при $a_1 < a^2$ и $L, K \to \infty$,

$$\limsup_{N} (LK)^{-1/2}\big(a_1/a_2^2\big)^{-N}\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| \le C|\delta|, \tag{3.0.1}$$

где C — некоторая абсолютная постоянная. В этом разделе оценка скорости сходимости к нулю нормы $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\|$ будет уточнена.

Кроме того, будет найдено асимптотическое поведение нормы оператора $\mathbf{V}_0^{(1)}$.

3.1. Оценка теоремы 1.1.2

Если $a_1/a_2^2 < 1$, то в правой части неравенства (1.1.4) за скорость сходимости нормы разности проекторов при $L, K \to \infty$ отвечает числитель $\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|$. Найдем его асимптотику. (Заметим, что неравенство (3.0.1) получено в [1, prop.3.3] путем грубой оценки этой нормы).

Сначала нам понадобятся операторы проектирования на подпространства ненулевых собственных векторов $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, поскольку $\mathbf{S}_0 = \sum_{\mu>0}\mathbf{P}_\mu/\mu$, где $\mathbf{P}_\mu$ — оператор проектирования на собственное подпространство собственного числа μ, а суммирование идет по всем положительным собственным числам $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. В нашем случае

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_{\mu_{\max}}/\mu_{\max} + \mathbf{P}_{\mu_{\min}}/\mu_{\min}, \tag{3.1.1}$$

так как, во-первых, $\operatorname{rank}\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = 2$, во-вторых, согласно предложению 2.1.1 при достаточно больших N два положительных собственных числа различны.

Известно, что если μ — собственное число кратности 1, то $\mathbf{P}_\mu = UU^{\mathrm{T}}$ где U — нормированный на 1 собственный вектор с собственным числом μ.

Чтобы найти U, соответствующий какому-нибудь положительному собственному числу, представим $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ в виде $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = X_1Y_1^{\mathrm{T}} + X_2Y_2^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = (A_{L1}A_{K1}^{\mathrm{T}} + cA_{L2}A_{K2}^{\mathrm{T}})(A_{L1}A_{K1}^{\mathrm{T}} + cA_{L2}A_{K2}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} =$$

$$= A_{L1}(A_{K1}^{\mathrm{T}}A_{K1}A_{L1}^{\mathrm{T}} + cA_{K1}^{\mathrm{T}}A_{K2}A_{L2}^{\mathrm{T}}) + A_{L2}(cA_{K2}^{\mathrm{T}}A_{K1}A_{L1}^{\mathrm{T}} + c^2A_{K2}^{\mathrm{T}}A_{K2}A_{L2}^{\mathrm{T}}) =$$
$$= X_1Y_1^{\mathrm{T}} + X_2Y_2^{\mathrm{T}}, \tag{3.1.2}$$

где $X_1 = A_{L1}, \quad X_2 = A_{L2}$ (вектора A_{ij} определены в (2.1.1))

$$Y_1 = A_{K1}^{\mathrm{T}}A_{K1}A_{L1} + cA_{K1}^{\mathrm{T}}A_{K2}A_{L2} \;\text{ и }\; Y_2 = cA_{K2}^{\mathrm{T}}A_{K1}A_{L1} + c^2A_{K2}^{\mathrm{T}}A_{K2}A_{L2}.$$

При $L, K \to \infty$

$$\|X_1\| = \sqrt{\frac{a_1^{2L}-1}{a_1^2-1}} \sim \frac{a_1^L}{\sqrt{a_1^2-1}}\;, \quad \|X_2\| = \sqrt{\frac{a_2^{2L}-1}{a_2^2-1}} \sim \frac{a_2^L}{\sqrt{a_2^2-1}}\;,$$
$$\|Y_1\| \sim \frac{a_1^{2K+L}}{(a_1^2-1)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \|Y_2\| \sim |c|\,\frac{a_1^{K+L}\,a_2^L}{(a_1a_2-1)\sqrt{a_1^2-1}}\;.$$

Пусть U_1 — собственный вектор с собственным числом $\mu_1 = \mu_{\min}$, а U_2 — собственный вектор с собственным числом $\mu_2 = \mu_{\max}$.

Так как вектора X_1, X_2 (как и Y_1, Y_2) линейно независимы, то собственные вектора U_i являются линейной комбинацией X_1, X_2.

Поскольку X_1 не является собственным вектором матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, то нормированные собственные вектора этой матрицы имеют вид

$$U_i = (\alpha_i X_1 + X_2)/\|\alpha_i X_1 + X_2\|, \quad i = 1, 2. \tag{3.1.3}$$

Теперь найдем числа α_i.

Лемма 3.1.1. *При $i = 1, 2$ имеют место равенства*

$$\alpha_i = \frac{\mu_i - b_{12} - b_{22}}{b_{11} + b_{21} - \mu_i}\;, \tag{3.1.4}$$

где $\mu_1 = \mu_{\min}$, $\mu_2 = \mu_{\max}$, $b_{11} = Y_1^{\mathrm{T}}X_1$, $b_{12} = Y_1^{\mathrm{T}}X_2$, $b_{21} = Y_2^{\mathrm{T}}X_1$ и $b_{22} = Y_2^{\mathrm{T}}X_2$.

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\alpha_i X_1 + X_2) = (X_1Y_1^{\mathrm{T}} + X_2Y_2^{\mathrm{T}})(\alpha_i X_1 + X_2),$$

то α_i удовлетворяет системе

$$(X_1Y_1^{\mathrm{T}} + X_2Y_2^{\mathrm{T}})(\alpha_i X_1 + X_2) = \mu_i(\alpha_i X_1 + X_2),$$

что переписывается в виде

$$\alpha_i\,(b_{11}\,X_1 + b_{21}\,X_2 - \mu_i\,X_1) = \mu_i\,X_2 - b_{12}\,X_1 - b_{22}\,X_2. \tag{3.1.5}$$

Чтобы найти α_i, достаточно рассмотреть первые компоненты векторов в обеих частях (3.1.5). Поскольку первые компоненты X_i равны 1, то

$$\alpha_i\,(b_{11}+b_{21}-\mu_i)=\mu_i-b_{12}-b_{22}.$$

Отсюда получаем (3.1.4). □

Замечание 3.1.1. При доказательстве леммы 3.1.1 пропущена проверка того, что знаменатель выражения (3.1.4) отличен от нуля. При достаточно больших L, K это будет следовать из последующих утверждений отдельно для $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$.

Найдем теперь асимптотические выражения для α_1 и α_2 при $L, K\to\infty$. Прежде всего отметим, что при этом условии

$$\begin{aligned} &b_{11}\sim\frac{a_1^2}{(a_1^2-1)^2}\,a_1^{2N}\,,\quad b_{12}\sim\frac{a_1}{(a_1^2-1)(a_1a_2-1)}\,a_1^{N+K}a_2^{L}\,,\\ &b_{21}\sim c\,\frac{a_1}{(a_1^2-1)(a_1a_2-1)}\,a_1^{N+L}a_2^{K}\,,\quad b_{22}\sim c\,\frac{a_1a_2}{(a_1a_2-1)^2}\,(a_1a_2)^N\,. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Предложение 3.1.1. *При $L, K\to\infty$, для α_1 и α_2 имеют место асимптотики*

$$\alpha_1\sim-\frac{a_1^2-1}{a_1a_2-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^L\quad \text{и} \tag{3.1.7}$$

$$\alpha_2\sim\frac{a_1a_2-1}{c(a_1^2-1)}\,\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^K. \tag{3.1.8}$$

Доказательство. Асимптотика в правой части (3.1.7) имеет место, так как числитель в (3.1.4) эквивалентен $-b_{12}$, а знаменатель — b_{11}.

Доказательство (3.1.8) проходит немного сложнее, так как (учитывая результаты предложения 2.1.1) в знаменателе формулы (3.1.4) при $i=2$ слагаемые b_{11} и $\mu_{\max}$ эквивалентны, а b_{21} имеет меньший порядок.

Заметим, что $b_{11}=c_{11}$, поэтому (см. формулу (2.1.2))

$$b_{11}-\mu_{\max}=\frac{1}{2}\left(c_{11}-\sqrt{c_{11}^2-2c_{11}c_{22}+4c_{12}c_{21}+c_{22}^2}-c_{22}\right).$$

Нетрудно проверить (см. замечание 2.1.1), что $-2c_{11}c_{22}+4c_{12}c_{21}+c_{22}^2=o(c_{11}^2)$ при $L, K\to\infty$.

Воспользуемся тем, что для любых последовательностей $f(n), g(n)$ удовлетворяющих условиям $f(n)\to\infty$ и $g(n)=o(f^2(n))$ имеет место соотношение

$$f(n)-\sqrt{f^2(n)+g(n)}\sim-0.5\,g(n)/f(n).$$

В нашем случае $f(n) = c_{11} - c_{22}$, а $g(n) = 4c_{12}c_{21}$. Значит

$$b_{11} - \mu_{\max} \sim -\frac{4c_{12}c_{21}}{4(c_{11} - c_{22})} \sim -c_{12}c_{21}/c_{11} \sim -c\frac{a_1a_2}{(a_1a_2 - 1)^2}(a_1a_2)^N.$$

Ввиду уже полученной асимптотики (3.1.6) для b_{21}, при $L, K \to \infty$,

$$b_{11} + b_{21} - \mu_{\max} \sim b_{21} \sim c\,\frac{a_1}{(a_1^2 - 1)(a_1a_2 - 1)}\; a_1^{N+L}a_2^K.$$

Теперь найдем асимптотику числителя (3.1.4):

$$\mu_{\max} - b_{12} - b_{22} \sim \mu_{\max} \sim \frac{a_1^2}{(a_1^2 - 1)^2}\, a_1^{2N}.$$

Итого, учитывая асимптотики числителя и знаменателя (3.1.4), получаем точную асимптотику (3.1.8) величины α_2. □

Замечание 3.1.2. 1. На самом деле асимптотика (3.1.7) справедлива при $L \to \infty$ и любом поведении K. При $L = L_0 = \mathrm{const}$,

$$\alpha_1 \to -\frac{(a_1^{L_0}a_2^{L_0} - 1)(a_1^2 - 1)}{(a_1^{2L_0} - 1)(a_1a_2 - 1)}.$$

2. При $K \to \infty$ и $L = L_0$, если L_0 достаточно велико, то

$$\alpha_2 \sim \frac{a_1a_2 - 1}{c(a_1^2 - 1)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^K = \frac{a_1a_2 - 1}{c(a_1^2 - 1)}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^K.$$

3. При $L \to \infty$, $K = K_0$,

$$\alpha_2 \sim \frac{(a_1^{2K_0} - 1)(a_1a_2 - 1)}{c(a_1^2 - 1)(a_1^{K_0}a_2^{K_0} - 1)} = c_{\alpha_2}^{K_0}.$$

Таким образом, поведение коэффициентов α_1 и α_2 при $L, K \to \infty$ описано. Опишем теперь асимптотическое поведение норм

$$m_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|\alpha_i X_1 + X_2\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{L-1}\left(\alpha_i a_1^k + a_2^k\right)^2}, \quad i = 1, 2. \tag{3.1.9}$$

Лемма 3.1.2. *Для величин m_i, определенных в (3.1.9), при $L, K \to \infty$ верны асимптотики:*

$$m_1 \sim c_{m_1}a_2^L, \quad m_2 \sim c_{m_2}\,\frac{a_1^{L+K}}{a_2^K}\;, \tag{3.1.10}$$

где

$$c_{m_1} = \sqrt{\frac{1}{a_2^2 - 1} - \frac{a_1^2 - 1}{(a_1a_2 - 1)^2}} \quad \text{и} \quad c_{m_2} = \frac{a_1a_2 - 1}{|c|(a_1^2 - 1)^{3/2}}\;. \tag{3.1.11}$$

Доказательство. Асимптотики проверяются непосредственно с помощью результатов предложения 3.1.1. □

Замечание 3.1.3. В случаях $L = L_0$ или $K = K_0$ величины m_i имеют тот же порядок, что и в лемме 3.1.2, только с другими коэффициентами c_{m_i}.

В дальнейших доказательствах нам понадобятся следующие асимптотики.

Лемма 3.1.3. *При* $a_1 > a_2 > 1$ *и* $c \neq 0$,

$$\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} + A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2} \sim -c\frac{(a_1 - a_2)^2(a_1^2 - 1)a_2^{2L+K}}{(a_1a_2 - 1)^3(a_2^2 - 1)a_1^K} . \qquad (3.1.12)$$

Доказательство. Учитывая (3.1.7), нетрудно видеть, что

$$A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2} \sim -\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} \sim \frac{a_1^L a_2^L}{a_1 a_2 - 1} .$$

То есть возникает необходимость рассматривать меньшие по порядку слагаемые. Поэтому вернемся к общему виду α_1 (3.1.4):

$$\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} + A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2} = \frac{a_1^L a_2^L - 1}{a_1 a_2 - 1} + \frac{a_1^{2L} - 1}{a_1^2 - 1}\,\frac{\mu_{\min} - b_{12} - b_{22}}{b_{11} + b_{21} - \mu_{\min}}. \qquad (3.1.13)$$

Обозначим $z_{ij}^{(k)} = A_{ki}^{\mathrm{T}} A_{kj} \sim (a_i^k a_j^k - 1)/(a_i a_j - 1)$, тогда

$$b_{11} = Y_1^{\mathrm{T}} X_1 = z_{11}^{(K)} z_{11}^{(L)} + c z_{12}^{(K)} z_{12}^{(L)}, \quad b_{12} = Y_1^{\mathrm{T}} X_2 = z_{11}^{(K)} z_{12}^{(L)} + c z_{12}^{(K)} z_{22}^{(L)}$$
$$b_{21} = Y_2^{\mathrm{T}} X_1 = c z_{12}^{(K)} z_{11}^{(L)} + c^2 z_{22}^{(K)} z_{12}^{(L)}, \quad b_{22} = Y_2^{\mathrm{T}} X_2 = c z_{12}^{(K)} z_{12}^{(L)} + c^2 z_{22}^{(K)} z_{22}^{(L)}.$$

Учитывая асимптотику (2.1.4) для $\mu_{\min}$ и (3.1.13), получаем

$$\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} + A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2} = \frac{S_1 + S_2}{T} , \qquad (3.1.14)$$

где

$$T = (a_1^2 - 1)(a_1 a_2 - 1)\big(z_{11}^{(K)} z_{11}^{(L)} + c z_{12}^{(K)} z_{12}^{(L)} + c z_{12}^{(K)} z_{11}^{(L)} + c^2 z_{22}^{(K)} z_{12}^{(L)} - O(a_2^{2N})\big),$$
$$S_1 = (a_1 a_2 - 1)(a_1^{2L} - 1)\big(O(a_2^{2N}) - z_{11}^{(K)} z_{12}^{(L)} - c z_{12}^{(K)} z_{22}^{(L)} - c z_{12}^{(K)} z_{12}^{(L)} - c^2 z_{22}^{(K)} z_{22}^{(L)}\big),$$
$$S_2 = (a_1^2 - 1)(a_1^L a_2^L - 1)\big(z_{11}^{(K)} z_{11}^{(L)} + c z_{12}^{(K)} z_{12}^{(L)} + c z_{12}^{(K)} z_{11}^{(L)} + c^2 z_{22}^{(K)} z_{12}^{(L)} - O(a_2^{2N})\big).$$

Как нетрудно видеть,

$$T \sim (a_1^2 - 1)(a_1 a_2 - 1) z_{11}^{(K)} z_{11}^{(L)} \sim \frac{a_1 a_2 - 1}{a_1^2 - 1}\, a_1^{2L+2K}.$$

Сгруппируем слагаемые в сумме $S_1 + S_2$:

$$-(a_1^{2L}-1)(a_1a_2-1)z_{11}^{(K)}z_{12}^{(L)} + (a_1^La_2^L-1)(a_1^2-1)z_{11}^{(K)}z_{11}^{(L)} = O(a_1^{2L});$$
$$-(a_1^{2L}-1)(a_1a_2-1)cz_{12}^{(K)}z_{12}^{(L)} + (a_1^La_2^L-1)(a_1^2-1)cz_{12}^{(K)}z_{11}^{(L)} = O(a_1^{2L});$$
$$-(a_1^{2L}-1)(a_1a_2-1)cz_{12}^{(K)}z_{22}^{(L)} + (a_1^La_2^L-1)(a_1^2-1)cz_{12}^{(K)}z_{12}^{(L)} =$$
$$= -c\frac{(a_1-a_2)^2}{(a_1a_2-1)^2(a_2^2-1)}a_1^{2L+K}a_2^{2L+K} + O(a_1^{2L});$$
$$(a_1^{2L}-1)(a_1a_2-1)\big(O(a_2^{2N}) - c^2z_{22}^{(K)}z_{22}^{(L)}\big) + (a_1^La_2^L-1)(a_1^2-1)\big(c^2z_{22}^{(K)}z_{12}^{(L)} - O(a_2^{2N})\big) =$$
$$= O(a_1^{2L}a_2^{2N}).$$

Выделяя главные части в числителе и знаменателе (3.1.14), получаем требуемое. □

Следствие 3.1.1. Пусть $s_{Ki} = (a_i^K-1)/(a_i-1)$, тогда при $a_1 > a_2 > 1$ и $c \neq 0$,

$$s_{K1}(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L1} + A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2}) + cs_{K2}(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2} + A_{L2}^{\mathrm{T}}A_{L2}) \sim$$
$$\sim c\,a_2^{2L+K}\left(\frac{(a_1-a_2)^3}{(a_1a_2-1)^3(a_2^2-1)(a_2-1)}\right). \tag{3.1.15}$$

Доказательство. Найдем асимптотику $\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2} + A_{L2}^{\mathrm{T}}A_{L2}$:

$$\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2} + A_{L2}^{\mathrm{T}}A_{L2} \sim -\frac{a_1^2-1}{a_1a_2-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^L\frac{a_1^La_2^L}{a_1a_2-1} + \frac{a_2^{2L}}{a_2^2-1} =$$
$$= a_2^{2L}\left(\frac{1}{a_2^2-1} - \frac{a_1^2-1}{(a_1a_2-1)^2}\right) = a_2^{2L}\frac{(a_1-a_2)^2}{(a_1a_2-1)^2(a_2^2-1)}. \tag{3.1.16}$$

Учитывая (3.1.12) и (3.1.16), получаем требуемое. □

Теорема 3.1.1. *При $L, K \to \infty$ для любого $\delta \neq 0$,*

$$\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \sim |\delta| d\sqrt{L}\,a_2^{-N}, \quad \text{где} \tag{3.1.17}$$

$$d = \frac{(a_1-a_2)^3(a_2^2-1)}{|c|a_2(a_1a_2-1)^3(a_2-1)(1-x^2)^2c_{m_1}}\ , \quad x = (a_1-1)(a_2-1)/(a_1a_2-1), \tag{3.1.18}$$

а (см. лемму 3.1.2)

$$c_{m_1} = \sqrt{\frac{1}{a_2^2-1} - \frac{a_1^2-1}{(a_1a_2-1)^2}}\ .$$

Доказательство. Подставляя выражение для $\mathbf{S}_0$ (3.1.1) в левую часть (3.1.17), приходим к равенству $\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| = \|\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0/\mu_1 + \mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0/\mu_2\|$. Сначала найдем асимптотику нормы $\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0/\mu_1$. Обозначим $V_i = \alpha_i A_{L1} + A_{L2}$ (собственный вектор с собственным числом μ_i). Учитывая, что $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mu_1} - \mathbf{P}_{\mu_2}$, где $\mathbf{P}_{\mu_i} = V_i V_i^{\mathrm{T}}/m_i^2$, и подставляя разложение $\mathbf{B}(\delta)$ (2.2.5), получаем

$$\|\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0/\mu_1\| =$$
$$= \frac{1}{\mu_1 m_1^2}\Big\|V_1V_1^{\mathrm{T}}(P_1Q_1^{\mathrm{T}} + P_2Q_2^{\mathrm{T}}) - V_1V_1^{\mathrm{T}}(P_1Q_1^{\mathrm{T}} + P_2Q_2^{\mathrm{T}})(V_1V_1^{\mathrm{T}}/m_1^2 + V_2V_2^{\mathrm{T}}/m_2^2)\Big\| =$$
$$= \frac{1}{\mu_1 m_1^2}\|\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2\|$$

с

$$\mathbf{J}_1 = (\alpha_1 A_{L1} + A_{L2})(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})(P_1Q_1^{\mathrm{T}} + P_2Q_2^{\mathrm{T}}) =$$
$$= \alpha_1 A_{L1}(d_1Q_1^{\mathrm{T}} + d_2Q_2^{\mathrm{T}}) + A_{L2}(d_1Q_1^{\mathrm{T}} + d_2Q_2^{\mathrm{T}}) = \big(\alpha_1 A_{L1} + A_{L2}\big)\widetilde{Q}^{\mathrm{T}},$$

где $\widetilde{Q} = d_1Q_1 + d_2Q_2$,

$$d_1 = (\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})P_1 = \alpha_1\, s_{K1}\,\delta\, A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L1} + \delta\, s_{K1}\, A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2} + O(a_2^L) \sim$$
$$\sim \delta c a_2^{2L+K}\,\frac{(a_1 - a_2)^3}{(a_1a_2 - 1)^3(a_2^2 - 1)(a_2 - 1)} \tag{3.1.19}$$

(см. следствие 3.1.1) и

$$d_2 = (\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})P_2 = \alpha_1\frac{a_1^L - 1}{a_1 - 1} + \frac{a_2^L - 1}{a_2 - 1} \sim a_2^L\frac{a_1 - a_2}{(a_2 - 1)(a_1a_2 - 1)}. \tag{3.1.20}$$

Кроме того,

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_1\Big((\alpha_1 A_{L1} + A_{L2})(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})/m_1^2 + (\alpha_2 A_{L1} + A_{L2})(\alpha_2 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})/m_2^2\Big)\ .$$

Сгруппируем сомножитель в скобках:

$$(\alpha_1 A_{L1} + A_{L2})(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})/m_1^2 + (\alpha_2 A_{L1} + A_{L2})(\alpha_2 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})/m_2^2 =$$
$$= A_{L1}\Big((\alpha_1^2 A_{L1}^{\mathrm{T}} + \alpha_1 A_{L2}^{\mathrm{T}})/m_1^2 + (\alpha_2^2 A_{L1}^{\mathrm{T}} + \alpha_2 A_{L2}^{\mathrm{T}})/m_2^2\Big) +$$
$$+ A_{L2}\Big((\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})/m_1^2 + (\alpha_2 A_{L1}^{\mathrm{T}} + A_{L2}^{\mathrm{T}})/m_2^2\Big) = A_{L1}\widetilde{X}_1^{\mathrm{T}} + A_{L2}\widetilde{X}_2^{\mathrm{T}},$$

где

$$\widetilde{X}_1 = (\alpha_1^2 A_{L1} + \alpha_1 A_{L2})/m_1^2 + (\alpha_2^2 A_{L1} + \alpha_2 A_{L2})/m_2^2 = \alpha_1 V_1/m_1^2 + \alpha_2 V_2/m_2^2 \quad \text{и}$$
$$\widetilde{X}_2 = (\alpha_1 A_{L1} + A_{L2})/m_1^2 + (\alpha_2 A_{L1} + A_{L2})/m_2^2 = V_1/m_1^2 + V_2/m_2^2.$$

В этих обозначениях

$$\mathbf{J}_2 = (\alpha_1 A_{L1}\widetilde{Q}^{\mathrm{T}} + A_{L2}\widetilde{Q}^{\mathrm{T}})(A_{L1}\widetilde{X}_1^{\mathrm{T}} + A_{L2}\widetilde{X}_2^{\mathrm{T}}) = (\alpha_1 A_{L1} + A_{L2})\big(\widetilde{Q}^{\mathrm{T}}A_{L1}\widetilde{X}_1^{\mathrm{T}} + \widetilde{Q}^{\mathrm{T}}A_{L2}\widetilde{X}_2^{\mathrm{T}}\big).$$

и

$$\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2 = (\alpha_1 A_{L1} + A_{L2})(\widetilde{Q}^{\mathrm{T}} - \widetilde{Q}^{\mathrm{T}} A_{L1} \widetilde{X}_1^{\mathrm{T}} - \widetilde{Q}^{\mathrm{T}} A_{L2} \widetilde{X}_2^{\mathrm{T}}),$$

значит

$$\|\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2\| = \|\alpha_1 A_{L1} + A_{L2}\| \left\|\widetilde{Q} - \widetilde{Q}^{\mathrm{T}} A_{L1} \widetilde{X}_1 - \widetilde{Q}^{\mathrm{T}} A_{L2} \widetilde{X}_2\right\|. \tag{3.1.21}$$

Распишем подробнее второй множитель в правой части (3.1.21):

$$\begin{gathered}\widetilde{Q} - \widetilde{Q}^{\mathrm{T}} A_{L1} \widetilde{X}_1 - \widetilde{Q}^{\mathrm{T}} A_{L2} \widetilde{X}_2 = d_1 E_L + d_2(\delta s_{K1} A_{L1} + \delta c s_{K2} A_{L2}) - \\ - \left(d_1 E_L^{\mathrm{T}} A_{L1} + d_2(\delta s_{K1} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} + \delta c s_{K2} A_{L2}^{\mathrm{T}} A_{L1})\right) \left(\frac{\alpha_1}{m_1^2} V_1 + \frac{\alpha_2}{m_2^2} V_2\right) - \\ - \left(d_1 E_L^{\mathrm{T}} A_{L2} + d_2(\delta s_{K1} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2} + \delta c s_{K2} A_{L2}^{\mathrm{T}} A_{L2})\right) \left(\frac{1}{m_1^2} V_1 + \frac{1}{m_2^2} V_2\right).\end{gathered} \tag{3.1.22}$$

Рассмотрим отдельно сумму слагаемых (3.1.22), имеющих наибольший порядок нормы:

$$\begin{gathered}d_2 \delta s_{K1} \left(A_{L1} - \frac{\alpha_1}{m_1^2}\, A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1}(\alpha_1 A_{L1} + A_{L2}) - \frac{\alpha_2^2}{m_2^2} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} A_{L1} - \frac{1}{m_1^2} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2}(\alpha_1 A_{L1} + A_{L2})\right) = \\ = d_2 \delta s_{K1} \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{m_2^2} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} - \frac{\alpha_1^2}{m_1^2} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} - \frac{\alpha_1}{m_1^2} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2}\right) A_{L1} - \\ - d_2 \delta s_{K1} \left(\frac{\alpha_1}{m_1^2} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} + \frac{1}{m_1^2} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2}\right) A_{L2} =: M.\end{gathered} \tag{3.1.23}$$

Ввиду (3.1.12), $\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} + A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L2} = O(a_2^{2L+K}/a_1^K)$. Также имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered}1 - \frac{\alpha_2^2}{m_2^2} A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1} = \frac{1}{m_2^2} \left(\alpha_2^2 \sum_{i=0}^{L-1} a_1^{2i} + 2\alpha_2 \sum_{i=0}^{L-1} a_1^i a_2^i + \sum_{i=0}^{L-1} a_2^{2i} - \alpha_2^2 A_{L1}^{\mathrm{T}} A_{L1}\right) = \\ = \frac{1}{m_2^2} \left(2\alpha_2 \sum_{i=0}^{L-1} a_1^i a_2^i + O(a_2^{2L})\right) = O\left(\frac{a_2^N}{a_1^N}\right).\end{gathered}$$

Продолжим (3.1.23):

$$M = d_2 \delta s_{K1} \left(O\left(\frac{a_2^N}{a_1^N}\right) - \frac{\alpha_1}{m_1^2} O\left(\frac{a_2^{2L+K}}{a_1^K}\right)\right) A_{L1} - \frac{1}{m_1^2} d_2 \delta s_{K1} O\left(\frac{a_2^{2L+K}}{a_1^K}\right) A_{L2}.$$

Исходя из асимптотик (3.1.20), (3.1.10), (3.1.7) и (3.1.8), нетрудно видеть, что $\|M\| = O(a_2^{2L+K})$. Далее, принимая во внимание (3.1.19), получаем, что $\|d_1 E_L\| = O(\sqrt{L} a_2^{2L+K})$. Прямыми вычислениями получаем, что порядок нормы нерассмотренных слагаемых (3.1.22) не превосходит a_2^{2L+K}. Тогда

$$\|\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2\| \sim \|\alpha_1 A_{L1} + A_{L2}\| \|d_1 E_L\| = d_1 m_1 \sqrt{L}$$

и

$$\|\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0/\mu_1\| \sim \frac{d_1}{m_1\mu_1} \sim |\delta| d\sqrt{L}\, a_2^{-N},$$

где d определено в (3.1.18).

Осталось доказать, что $\|\mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0/\mu_2\| = o\left(\|\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0/\mu_1\|\right)$. Пользуясь асимптотиками теоремы 2.2.1 и (2.1.4), имеем

$$\|\mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0/\mu_2\| \le \|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_2 = O(\sqrt{L}a_1^{-N}).$$

Отсюда сразу же следует требуемое. □

Замечание 3.1.4. При $1 < a_2 < a_1 < a_2^2$, согласно теореме 2.2.1, знаменатель (1.1.4) стремится к 1, и из результата теоремы 3.1.1 следует, что для некоторой постоянной C при $L, K \to \infty$,

$$\limsup_N a_2^N \left\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\right\|/\sqrt{L} \le C|\delta|.$$

3.2. Асимптотика нормы матрицы $\mathbf{V}_0^{(1)}$

Как и раньше, мы предполагаем, что матрица $\mathbf{V}_0^{(1)}$ определяется равенством (1.1.5). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2.1. *При $L, K \to \infty$,*

$$\left\|\mathbf{V}_0^{(1)}\right\| \sim d\sqrt{L}\, a_2^{-N}, \tag{3.2.1}$$

где

$$d = \frac{(a_1 - a_2)^3(a_2^2 - 1)}{|c|a_2(a_1a_2 - 1)^3(a_2 - 1)(1 - x^2)^2 c_{m_1}}\ , \quad x = (a_1 - 1)(a_2 - 1)/(a_1a_2 - 1),$$

а (см. лемму 3.1.2)

$$c_{m_1} = \sqrt{\frac{1}{a_2^2 - 1} - \frac{a_1^2 - 1}{(a_1a_2 - 1)^2}}\ .$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1 + \mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2$, где $\mu_1 = \mu_{\min}$, $\mu_2 = \mu_{\max}$:

$$\left\|\mathbf{V}_0^{(1)}\right\| = \left\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1 + \mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2) + (\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1 + \mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2)\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0\right\| =$$
$$= \left\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1 + \mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0/\mu_1 + \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2 + \mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0/\mu_2\right\|. \tag{3.2.2}$$

Обозначим

$$\mathbf{V}' = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1 + \mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0/\mu_1 \tag{3.2.3}$$

и найдем асимптотику нормы $\mathbf{V}'$. Подставляя $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mu_1} - \mathbf{P}_{\mu_2}$ и выражения (2.2.2) и (2.2.4) для $\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ в (3.2.3), получаем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{V}'\| = \Big\|(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mu_1} - \mathbf{P}_{\mu_2})(s_{K1}E_L A_{L1}^{\mathrm{T}} + cs_{K2}E_L A_{L2}^{\mathrm{T}})\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1 + \\ + \mathbf{P}_{\mu_1}(s_{K1}A_{L1}E_L^{\mathrm{T}} + cs_{K2}A_{L2}E_L^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mu_1} - \mathbf{P}_{\mu_2})/\mu_1\Big\|.\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Разобьём подмодульное выражение в правой части (3.2.4) на следующие слагаемые:

$$\begin{aligned}&J_1 = \mathbf{Z}\,\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1, \quad J_2 = -\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{Z}\,\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1, \quad J_3 = -\mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{Z}\,\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1, \\ &J_4 = \mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}/\mu_1, \quad J_5 = -\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1, \quad J_6 = -\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_1,\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

где $\mathbf{Z} = s_{K1}E_L A_{L1}^{\mathrm{T}} + cs_{K2}E_L A_{L2}^{\mathrm{T}}$.

Заметим, что нормы слагаемых J_1 – J_3 равны нормам J_4 – J_6 соответственно, как нормы транспонированных матриц. Покажем, что нормы J_2 и J_3 имеют меньший порядок, чем норма J_1.

Найдем асимптотику нормы J_1. Константы s_{Ki} определены в (2.2.3), асимптотики m_i указаны в лемме 3.1.2, асимптотики μ_i в предложении 2.1.1 и, согласно (3.1.2), $A_{Li} = X_i$.

$$\begin{aligned}\|J_1\| &= \left\|\frac{1}{\mu_1}(s_{K1}E_L A_{L1}^{\mathrm{T}} + cs_{K2}E_L A_{L2}^{\mathrm{T}})\left(\frac{1}{m_1^2}(\alpha_1 X_1 + X_2)(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})\right)\right\| = \\ &= \frac{1}{\mu_1 m_1^2}\left\|\big(s_{K1}E_L(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L1} + A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2}) + cs_{K2}E_L(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2} + A_{L2}^{\mathrm{T}}A_{L2})\big)(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})\right\| \sim \\ &\sim \frac{s_{K1}(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L1} + A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2}) + cs_{K2}(\alpha_1 A_{L1}^{\mathrm{T}}A_{L2} + A_{L2}^{\mathrm{T}}A_{L2})}{\mu_1 m_1^2}\left\|E_L(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})\right\|.\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Учитывая (3.1.15), получаем

$$\begin{aligned}\|J_1\| &\sim |c|\, a_2^{2L+K}\left(\frac{(a_1 - a_2)^3}{(a_1a_2 - 1)^3(a_2^2 - 1)(a_2 - 1)}\right)\frac{1}{\mu_1 m_1^2}\left\|E_L(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})\right\| \sim \\ &\sim \frac{|c|(a_1 - a_2)^3 a_2^{2L+K}}{(a_1a_2 - 1)^3(a_2^2 - 1)(a_2 - 1)}\,\frac{(a_2^2 - 1)^2\left\|E_L(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})\right\|}{c^2(a_2^{2L} - 1)(a_2^{2K} - 1)(1 - x^2)^2\,(c_{m_1})^2\, a_2^{2L}} \sim \\ &\sim c_1\,\frac{1}{a_2^{2L+K}}\left\|E_L(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})\right\| \sim c_2\,\frac{\sqrt{L}}{a_2^N}\ ,\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

где

$$c_1 = \frac{(a_1 - a_2)^3(a_2^2 - 1)}{|c|(a_1a_2 - 1)^3(a_2 - 1)(1 - x^2)(1 - y^2)\,(c_{m_1})^2},$$

$$c_2 = c_2 c_{m_1}/a_2.$$

Слагаемое J_2 получается домножением J_1 слева на $-\mathbf{P}_{\mu_1}$, поэтому

$$\|J_2\| = \left\| \frac{1}{\mu_1}\mathbf{P}_{\mu_1}(s_{K1}E_L A_{L1}^{\mathrm{T}} + c s_{K2} E_L A_{L2}^{\mathrm{T}}) \left(\frac{1}{m_1^2}(\alpha_1 X_1 + X_2)(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) \right) \right\| \sim$$
$$\sim c_1 \frac{1}{a_2^{2L+K}} \frac{1}{m_1^2} \left\| (\alpha_1 X_1 + X_2)(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) E_L (\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) \right\| =$$
$$= c_1 \frac{(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})E_L}{a_2^{2L+K} m_1^2} \|(\alpha_1 X_1 + X_2)\|^2 = c_1 \frac{(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})E_L}{a_2^{2L+K}} = O(a_2^{-N})$$

Что касается слагаемого J_3, то

$$\|J_3\| = \left\| \frac{1}{\mu_1}\mathbf{P}_{\mu_2}(s_{K1}E_L A_{L1}^{\mathrm{T}} + c s_{K2} E_L A_{L2}^{\mathrm{T}}) \left(\frac{1}{m_1^2}(\alpha_1 X_1 + X_2)(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) \right) \right\| \sim$$
$$\sim c_1 \frac{1}{a_2^{2L+K}} \frac{1}{m_2^2} \left\| (\alpha_2 X_1 + X_2)(\alpha_2 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) E_L (\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) \right\| = O(a_2^{-N}),$$

поскольку в силу асимптотики α_2 (см. предложение 3.1.1), $(\alpha_2 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}})E_L$ имеет порядок роста a_1^N/a_2^K, и, согласно асимптотике m_2 (лемма 3.1.2),

$$\frac{1}{m_2^2}\left\| (\alpha_2 X_1 + X_2)(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) \right\| = \frac{1}{m_2^2} \left\| (\alpha_2 X_1 + X_2) \right\| \left\| (\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) \right\| =$$
$$= \frac{1}{m_2} \left\| (\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) \right\| = O\left(\frac{a_2^N}{a_1^N} \right).$$

Таким образом, слагаемые J_1 и J_4 являются главными членами (3.2.4), то есть

$$\|\mathbf{V}'\| \sim c_1 \frac{1}{a_2^{2L+K}} \left\| E_L(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) + E_L^{\mathrm{T}}(\alpha_1 X_1 + X_2) \right\|.$$

Обозначим $Z_1 = E_L/\|E_L\|$, $Z_2 = (\alpha_1 X_1 + X_2)/\|\alpha_1 X_1 + X_2\|$, $\mathbf{X} = [Z_1, Z_2]$, $\mathbf{Y} = [Z_2, Z_1]$, а также $\mathbf{G} = E_L(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) + E_L^{\mathrm{T}}(\alpha_1 X_1 + X_2)$. Согласно первому утверждению леммы 1.1.1, максимальные собственные числа матриц $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ и

$$\mathbf{C} = \|E_L\|^2 \|\alpha_1 X_1 + X_2\|^2 \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$$

совпадают. Поскольку $E_L^{\mathrm{T}}(\alpha_1 X_1 + X_2)$ имеет порядок роста a_2^L, а $\|E_L\|\,\|(\alpha_1 X_1 + X_2)\|$ — порядок $\sqrt{L}\,a_2^L$, то $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \to \mathbf{I}$, $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} \to \mathbf{I}$. Значит,

$$\|\mathbf{V}'\| \sim c_1 \frac{1}{a_2^{2L+K}} \left\| E_L(\alpha_1 X_1^{\mathrm{T}} + X_2^{\mathrm{T}}) + E_L^{\mathrm{T}}(\alpha_1 X_1 + X_2) \right\| \sim c_1 \frac{1}{a_2^{2L+K}} \sqrt{\|C\|} \sim$$
$$\sim c_1 \sqrt{L} c_{m_1} a_2^L \frac{1}{a_2^{2L+K}} \sim d\,\frac{\sqrt{L}}{a_2^N}, \tag{3.2.8}$$

где $d = c_1 c_{m_1}/a_2$.

Докажем, наконец, что $\|\mathbf{V}_0^{(1)}\| \sim \|\mathbf{V}'\|$. Ввиду (3.2.2), для этого достаточно, чтобы $\left\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2 + \mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0/\mu_2\right\| = o\left(\sqrt{L}/a_2^N\right)$.

Заметим сначала, что $\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2\| = \|\mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0/\mu_2\|$. Далее,

$$\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2\| \le \|\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\|/\mu_2 \le \|\mathbf{E}\|\|\mathbf{H}\|/\mu_2 = \sqrt{KL}\; O(a_1^N)\cdot O(a_1^{-2N}) = o(\sqrt{L}a_2^{-N}),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 3.2.1. Согласно теореме 1.1.3, при $L, K \to \infty$,

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\right\| = \delta^2 O(\Theta^2) = \delta^2 O\left(\left(\sqrt{\frac{\nu_{\max}}{\mu_{\max}}}\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}\right)^2\right) =$$

$$= \delta^2 O\left(\left(\sqrt{\frac{KL}{a_1^{2N}}}\frac{a_1^{2N}}{a_2^{2N}}\right)^2\right) = \delta^2 O\left(\frac{KLa_1^{2N}}{a_2^{4N}}\right). \tag{3.2.9}$$

Так как при любом фиксированном δ при $L, K \to \infty$

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| \le |\delta|\left\|\mathbf{V}_0^{(1)}\right\| + \left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\right\| = O\big(\sqrt{L}a_2^{-N}\big) + O\big(LKa_1^{2N}a_2^{-4N}\big),$$

то отсюда сразу же получается, что при $1 < a_2 < a_1 < a_2^2 \le a_1^{4/3}$,

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| = O\big(LKa_1^{2N}a_2^{-4N}\big),$$

а при $1 < a_2 < a_1 < a_2^{3/2}$, $\delta\mathbf{V}_0^{(1)}$ является главным членом $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}$ и

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| \sim \delta\|\mathbf{V}_0^{(1)}\|.$$

Глава 4

Ошибки восстановления

4.1. Общие описание задачи и метода решения

Как уже было упомянуто в разделе 1.1, ошибка восстановления исходного ряда зависит от разности проекторов. Основываясь на рассуждениях, приведенных в [1, Ch. 5. 3], будем оценивать ошибки восстановления в равномерной норме

$$\|\widetilde{F}_N(\delta) - F_N\|_{\max} = \max_{0\le i<N} |\widetilde{f}_i \ - \ f_i|,$$

где $\widetilde{f}_i$ — элементы восстановленного сигнала (см. описание в разделе (1.1)).

Из формулы (1.1.6) получаем, что

$$\begin{gathered}\|\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N\|_{\max} \le \\ \le \left\|\mathcal{S}\left(\left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\right)\mathbf{H}(\delta)\right)\right\|_{\max} + \left\|\mathcal{S}\left(\delta\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta) + \delta\,\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\right)\right\|_{\max},\end{gathered} \tag{4.1.1}$$

где матрица $\mathbf{V}_0^{(1)}$ определена в (1.1.5), а $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$.

Известно, что равномерная норма ограничивается сверху спектральной. Поэтому, если при $N \to \infty$

$$\left\|\left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\right)\mathbf{H}(\delta)\right\| \to 0, \tag{4.1.2}$$

то

$$\left\|\left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\right)\mathbf{H}(\delta)\right\|_{\max} \to 0. \tag{4.1.3}$$

Заметим, что ближайшая по норме Фробениуса ганкелева матрица получается заменой элементов на побочных диагоналях средними вдоль этих диагоналей, а равномерная норма временного ряда равна равномерной норме соответствующей траекторной матрицы. Поэтому линейный оператор $\mathcal{S}$ ограничен, как оператор из пространства матриц с равномерной нормой в пространство временных рядов с равномерной нормой. То есть из (4.1.3) (а значит и из (4.1.2)) следует

$$\left\|\mathcal{S}\left(\left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\right)\mathbf{H}(\delta)\right)\right\|_{\max} \to 0, \tag{4.1.4}$$

и (4.1.1) можно переписать в виде

$$\|\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N\|_{\max} = |\delta| \left\|\mathcal{S}\Big(\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta) + \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\Big)\right\|_{\max} + o(1).$$

Учитывая (3.2.9) и то, что норма $\mathbf{H}(\delta)$ имеет порядок a_1^N, получаем, что выполнения неравенства $a_1^{3/2}/a_2^2 < 1$ достаточно для сходимости (4.1.4). Действительно, в этом случае

$$\left\|\Big(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\Big)\,\mathbf{H}(\delta)\right\| \le \left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \delta\mathbf{V}_0^{(1)}\right\| \|\mathbf{H}(\delta)\| =$$
$$= \delta^2 O\left(KL\frac{a_1^{2N}}{a_2^{4N}}\right)\cdot O(a_1^N) = \delta^2 O\left(KL\frac{a_1^{3N}}{a_2^{4N}}\right) \to 0.$$

Тем самым анализ ошибок восстановления при $N\to\infty$ сводится к анализу рядов, получаемых диагональным усреднением матриц вида

$$\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta) + \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}, \tag{4.1.5}$$

что существенно облегчает задачу.

Известно, что максимальная по модулю ошибка восстановления отделена от нуля при $N\to\infty$ в случае сигнала $f_n = a^n$, $a > 1$ при постоянной помехе $e_n = 1$ [1, Prop. 5.4] и «пилообразной» помехе $e_n = (-1)^n$ [5, Предл. 3.2.1].

Ниже будет доказано, что этот же результат имеет место для сигнала $f_n = a_1^n + ca_2^n$ и постоянной помехи, если $a_1 > a_2 > 1$ и $a_1^{3/2}/a_2^2 < 1$. На самом деле доказательство сведется к анализу ошибки $\widetilde{f}_{N-1} - f_{N-1}$ восстановления сигнала в последней точке, то есть к исследованию асимптотики нижнего правого элемента матриц (4.1.5) при $N\to\infty$.

4.2. Ошибка восстановления последнего элемента сигнала

Обозначим r_{LK} нижний правый элемент матрицы (4.1.5).

Теорема 4.2.1. *При $L, K \to \infty$,*

$$r_{LK} \to r_\infty \stackrel{\text{def}}{=} r_1^{as} + r_2^{as} + v_1^{as}(1 - r_1^{as} - r_2^{as}) + w_2^{as}(1 - r_1^{as} - r_2^{as}), \tag{4.2.1}$$

где

$$r_1^{as} = -\frac{(a_1-a_2)^2}{a_1a_2(a_2-1)(a_1a_2-1)^2c_{m_1}^2}\ , \quad r_2^{as} = \frac{(a_1a_2-1)^2}{c^2a_1(a_1-1)(a_1^2-1)^2c_{m_2}^2}\ ,$$
$$v_1^{as} = -c_1\,\frac{c(a_1-a_2)^3}{a_1a_2(a_1a_2-1)(a_2^2-1)}\ , \quad w_1^{as} = \frac{(a_1a_2-1)^2}{c^2(a_1-1)(a_1^2-1)^2c_{m_2}^2a_1}$$

и

$$c_1 = \frac{(a_1-a_2)^3(a_2^2-1)}{c(a_1a_2-1)^3(a_2-1)(1-x^2)^2\,c_{m_1}^2}\ .$$

Кроме того, постоянные c_{m_i} определены в (3.1.11), а константа x — в (2.1.3).

Доказательство. Рассмотрим сначала второе слагаемое в сумме (4.1.5). Проектор на подпространство собственного вектора с собственным числом μ кратности 1 имеет вид $\mathbf{P}_\mu = U_\mu U_\mu^{\mathrm{T}}$, где U_μ — соответствующий нормированный собственный вектор. В нашем случае 2 отличных от нуля собственных числа и они имеют кратность 1, а соответствующие собственные векторы указаны в (3.1.3), поэтому

$$\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E} = \mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{E} + \mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{E} =$$
$$= \frac{1}{m_1^2}(\alpha_1 A_{L1}+A_{L2})(\alpha_1 A_{L1}+A_{L2})^{\mathrm{T}}E_L E_K^{\mathrm{T}} + \frac{1}{m_2^2}(\alpha_2 A_{L1}+A_{L2})(\alpha_2 A_{L1}+A_{L2})^{\mathrm{T}}E_L E_K^{\mathrm{T}},$$

где $m_i = \|\alpha_i A_{L1}+A_{L2}\|$, а α_i определены в (3.1.4).

Обозначим нижние правые элементы матриц $\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{E}, \mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{E}$ как r_1, r_2.

Прямыми вычислениями, используя (3.1.7), (3.1.8) и (3.1.10), получаем, что при $N\to\infty$

$$\frac{1}{m_1}(\alpha_1 A_{L1}+A_{L2})^{\mathrm{T}}E_L \to \frac{a_1-a_2}{(a_2-1)(a_1a_2-1)c_{m_1}} \quad \text{и} \tag{4.2.2}$$

$$\frac{1}{m_2}(\alpha_2 A_{L1}+A_{L2})^{\mathrm{T}}E_L \to \frac{a_1a_2-1}{c(a_1-1)(a_1^2-1)c_{m_2}}\ . \tag{4.2.3}$$

Правыми нижними элементами матриц

$$\frac{1}{m_1}(\alpha_1 A_{L1}+A_{L2})E_K^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{m_2}(\alpha_2 A_{L1}+A_{L2})E_K^{\mathrm{T}}$$

будут соответственно

$$\rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha_1 a_1^{L-1}+a_2^{L-1}}{m_1} \quad \text{и} \quad \rho_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha_2 a_1^{L-1}+a_2^{L-1}}{m_2}\ ,$$

причем при $N\to\infty$

$$\rho_1 \to -\frac{a_1-a_2}{a_1a_2(a_1a_2-1)c_{m_1}} \quad \text{и} \quad \rho_2 \to \frac{a_1a_2-1}{a_1c(a_1^2-1)c_{m_2}}\ .$$

Таким образом, $r_1 \to r_1^{as}$ и $r_2 \to r_2^{as}$.

Теперь найдем асимптотику нижнего правого элемента r_V матрицы $\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta)$. Учитывая (1.1.5) и то, что $\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1 + \mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2$, получаем равенство

$$\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta) = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_1 + \mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0/\mu_1\right)\mathbf{H}(\delta) +$$

$$+\left(\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2+\mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0/\mu_2\right)\mathbf{H}(\delta). \tag{4.2.4}$$

Сначала рассмотрим первое слагаемое в правой части (4.2.4). Как и в теореме 3.2.1, представим его в виде $\sum_{i=1}^{6} J_i\mathbf{H}(\delta)$, где J_i определены в (3.2.5). Заметим, что

$$(J_4+J_5+J_6)\mathbf{H}(\delta)=\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0(\mathbf{H}+\delta\mathbf{E})/\mu_1=\delta\ (J_4+J_5+J_6)\mathbf{E}.$$

Обозначим теперь при $i=1,2,3$ нижние правые элементы матриц $J_i\mathbf{H}(\delta)$ через v_i. При $i=4,5,6$, v_i будут обозначать нижние правые элементы матриц $\delta J_i\mathbf{E}$.

С помощью аналогичных (3.2.7) преобразований получим, что

$$J_1\mathbf{H}(\delta)=c_1\,\frac{1}{a_2^{2L+K}}E_L(\alpha_1A_{L1}^{\mathrm{T}}+A_{L2}^{\mathrm{T}})(A_{L1}A_{K1}^{\mathrm{T}}+cA_{L2}A_{K2}^{\mathrm{T}}+\delta E_LE_K^{\mathrm{T}})=$$

$$=\frac{c_1}{a_2^{2L+K}}E_L\left((\alpha_1A_{L1}^{\mathrm{T}}+A_{L2}^{\mathrm{T}})A_{L1}A_{K1}^{\mathrm{T}}+(\alpha_1A_{L1}^{\mathrm{T}}+A_{L2}^{\mathrm{T}})A_{L2}A_{K2}^{\mathrm{T}}+\delta(\alpha_1A_{L1}^{\mathrm{T}}+A_{L2}^{\mathrm{T}})E_LE_K^{\mathrm{T}}\right),$$

где

$$c_1=\frac{(a_1-a_2)^3(a_2^2-1)}{c(a_1a_2-1)^3(a_2-1)(1-x^2)^2\,(c_{m_1})^2}.$$

Подставляя в выражение для $J_1\mathbf{H}(\delta)$ асимптотики (3.1.12) и (3.1.16) для $(\alpha_1A_{L1}^{\mathrm{T}}+A_{L2}^{\mathrm{T}})A_{L1}$ и $(\alpha_1A_{L1}^{\mathrm{T}}+A_{L2}^{\mathrm{T}})A_{L2}$, получаем:

$$v_1\sim\frac{c_1}{a_2^{2L+K}}\left(d_1\frac{a_2^{2L+K}}{a_1^K}a_1^{K-1}+d_2a_2^{2L}a_2^{K-1}\right),$$

где

$$d_1=-c\,\frac{(a_1-a_2)^2(a_1^2-1)}{(a_1a_2-1)^3(a_2-1)}\ ,\quad d_2=\frac{c(a_1-a_2)^2}{(a_1a_2-1)^2(a_2^2-1)}\ .$$

Таким образом,

$$v_1\to v_1^{as}=-c_1\,\frac{c(a_1-a_2)^3}{a_1a_2(a_1a_2-1)(a_2^2-1)}\ .$$

Сходимости $v_2\to -v_1^{as}r_1^{as}$ и $v_3\to -v_1^{as}r_2^{as}$ проверяются прямыми вычислениями. Наконец,

$$v_4=\frac{1}{\mu_1m_1^2}\,(\alpha_1a_1^{L-1}+a_2^{L-1})(\alpha_1A_{L1}+A_{L2})^{\mathrm{T}}(s_{K1}A_{L1}+cs_{K2}A_{L2})E_L^{\mathrm{T}}E_L\sim$$

$$\sim\frac{c_1L}{a_2^{2L+K}}\,(\alpha_1a_1^{L-1}+a_2^{L-1})=\frac{c_1L}{a_2^{2L+K}}\ O(a_2^L)=o(1).$$

Учитывая (4.2.2) и (4.2.3), видим, что

$$v_5\sim\frac{c_1L}{a_2^{2L+K}}\,(\alpha_1a_1^{L-1}+a_2^{L-1})E_L^{\mathrm{T}}\frac{1}{m_1^2}\,(\alpha_1A_{L1}+A_{L2})(\alpha_1A_{L1}+A_{L2})^{\mathrm{T}}E_L=$$

$$= \frac{c_1 L}{a_2^{2L+K}} \left(\alpha_1 a_1^{L-1} + a_2^{L-1}\right) O(1) = o(1),$$

$$v_6 \sim \frac{c_1 L}{a_2^{2L+K}} \left(\alpha_1 a_1^{L-1} + a_2^{L-1}\right) E_L^{\mathrm{T}} \frac{1}{m_2^2} \left(\alpha_2 A_{L1} + A_{L2}\right)\left(\alpha_2 A_{L1} + A_{L2}\right)^{\mathrm{T}} E_L =$$

$$= \frac{c_1 L}{a_2^{2L+K}} \left(\alpha_1 a_1^{L-1} + a_2^{L-1}\right) O(1) = o(1).$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^{6} v_i \to v_1^{as}(1 - r_1^{as} - r_2^{as})$.

Теперь займемся вторым слагаемым в правой части (4.2.4). Легко видеть, что

$$\left(\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2 + \mathbf{P}_{\mu_2} \mathbf{H} \mathbf{E}^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_0/\mu_2\right) \mathbf{H}(\delta) = \sum_{i=1}^{6} I_j \mathbf{H}(\delta),$$

где

$$I_1 = \mathbf{Z}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2, \quad I_2 = -\mathbf{P}_{\mu_1}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2, \quad I_3 = -\mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{Z}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2,$$

$$I_4 = \mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}/\mu_2, \quad I_5 = -\mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_1}/\mu_2, \quad I_6 = -\mathbf{P}_{\mu_2}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_2}/\mu_2.$$

с $\mathbf{Z} = s_{K1} E_L A_{L1}^{\mathrm{T}} + c s_{K2} E_L A_{L2}^{\mathrm{T}}$. Как и раньше, $I_i \mathbf{H}(\delta) = \delta I_i \mathbf{E}$ при $i = 4, 5, 6$.

Будем обозначать $w_i, i = 1, 2, 3$ нижние правые элементы матриц $I_i \mathbf{H}(\delta)$, а при $i = 4, 5, 6$ — нижние правые элементы матриц $\delta I_i \mathbf{E}$. Далее,

$$I_1 \mathbf{H}(\delta) =$$

$$= \frac{E_L (s_{K1} A_{L1} + c s_{K2} A_{L2})^{\mathrm{T}} (\alpha_2 A_{L1} + A_{L2})(\alpha_2 A_{L1} + A_{L2})^{\mathrm{T}} (A_{L1} A_{K1}^{\mathrm{T}} + c A_{L2} A_{K2}^{\mathrm{T}} + \delta E_L E_K^{\mathrm{T}})}{\mu_2 m_2^2}.$$

Пользуясь асимптотиками (2.1.4), (3.1.8) и леммой 3.1.2, получаем

$$\frac{1}{\mu_2 m_2^2} (s_{K1} A_{L1} + c s_{K2} A_{L2})^{\mathrm{T}} (\alpha_2 A_{L1} + A_{L2}) \sim$$

$$\sim \frac{(a_1^2 - 1)^2}{a_1^{2L+2K} a_1^{2L} c_{m_2}^2} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2K} \frac{a_1 a_2 - 1}{c(a_1^2 - 1)} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{K} \frac{a_1^K}{a_1 - 1} \frac{a_1^{2L}}{a_1^2 - 1} \sim \frac{a_1 a_2 - 1}{c(a_1 - 1) c_{m_2}^2} \frac{a_2^K}{a_1^{2L+2K}}. \tag{4.2.5}$$

Тогда

$$w_1 \sim \frac{a_1 a_2 - 1}{c(a_1 - 1) c_{m_2}^2} \frac{a_2^K}{a_1^{2L+2K}} (\alpha_2 A_{L1} + A_{L2})^{\mathrm{T}} A_{L1} \frac{a_1^K}{a_1} \sim$$

$$\sim \frac{a_1 a_2 - 1}{c(a_1 - 1) c_{m_2}^2} \frac{a_2^K}{a_1^{2L+2K}} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^K \frac{a_1 a_2 - 1}{c(a_1^2 - 1)} \frac{a_1^{2L}}{a_1^2 - 1} \frac{a_1^K}{a_1} = \frac{(a_1 a_2 - 1)^2}{c^2 (a_1 - 1)(a_1^2 - 1)^2 c_{m_2}^2 a_1}.$$

Нетрудно видеть, что $w_2 \to -r_1^{as} w_1^{as}$ и $w_3 \to -r_2^{as} w_1^{as}$.

Подставляя асимптотику (4.2.5) в $\delta I_i \mathbf{E}$ при $i = 4, 5, 6$, видим, что

$$w_4 = \delta \frac{L}{\mu_2 m_2^2} (\alpha_2 a_1^{L-1} + a_2^{L-1})(\alpha_2 A_{L1} + A_{L2})^{\mathrm{T}} (s_{K1} A_{L1} + c s_{K2} A_{L2}) =$$

$$= \delta L \left(\alpha_2 a_1^{L-1} + a_2^{L-1}\right) O\left(\frac{a_2^K}{a_1^{2L+2K}}\right) = o(1).$$

Аналогично, $w_5 = o(1)$ и $w_6 = o(1)$. Таким образом, утверждение доказано. □

Замечание 4.2.1. Нетрудно проверить, что r_∞ не зависит от c. Но ввиду сложной зависимости r_∞ от a_1 и a_2 не удается непосредственно доказать, что при всех значениях этих параметров предельное значение r_{LK} отлично от нуля. Ясно, однако, что такая ситуация является скорее исключением, чем правилом, что продемонстрировано в разделе А.6.

Заключение

В работе рассматривалась задача исследования асимптотического поведения нормы разности проекторов в случае, когда исходный сигнал является суммой двух экспонент $f_n = a_1^n + ca_2^n$, $1 < a_2 < a_1$, $c \neq 0$, а помеха — константой $e_n = 1$. Также проводилось исследование ошибок восстановления в методе SSA в этом случае.

В рамках этих задач получены следующие результаты.

1. Найдены точные условия, при которых $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}$ стремится к нулю. Эти условия оказались не слабее тех, что получены при грубых оценках.

2. Уточнена оценка сверху нормы разности возмущенного и невозмущенного проекторов $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\|$;

3. В случае $a_1 < a_2^{3/2}$ доказано, что полученная оценка точна.

4. Доказано и численно проверено, что ошибка восстановления в последней точке ряда, вообще говоря, не стремится к нулю при $N \to \infty$, а значит и максимальная по модулю ошибка восстановления не стремится к нулю.

5. Основные результаты проиллюстрированы с помощью вычислительных экспериментов, причем некоторые из этих экспериментов приводят к предположению, что условия нескольких доказанных утверждений могут быть ослаблены.

Список литературы

1. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals // Statistics and Its Interface. — 2010. — P. 297–319.
2. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. — М. : Мир, 1972. — С. 740.
3. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure: SSA and related techniques. — Chapman and Hall/CRC, 2001. — Vol. 90 of Monographs on Statistics and Applied Probability. — P. 320.
4. Golyandina N., Zhigljavsky A. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — Berlin-Heidelberg : Springer Briefs in Statistics, Springer, 2013.
5. Иванова Е. Об одном примере, относящемуся к анализу сингулярного спектра временных рядов. Бакалаврская работа. — СПб : СПбГУ, 2015.
6. Nekrutkin V., Vasilinetz I. Asymptotic extraction of common signal subspaces from perturbed signals (in press) // Statistics and Its Interface.

Приложение A

Численная иллюстрация полученных результатов

Проверка и иллюстрация результатов, связанных с асимптотиками, будет проводиться следующим образом: исследуемая величина, например норма матрицы, вычисляется явно (если не сказано иное), затем считается отношение к теоретической асимптотике. На графике ожидается наблюдать сходимость этого отношения к 1 при достаточно больших N.

A.1. Асимптотики собственных чисел

В обозначениях предложения 2.1.1 обозначим

$$\Theta_1(N) = \frac{\mu_{\min}}{\mu_{\min}^{as}} \quad \text{и} \quad \Theta_2(N) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\max}^{as}} \ ,$$

где $\mu_{\max}^{as}$ и $\mu_{\min}^{as}$ — асимптотики максимального и минимального собственных чисел матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, приведенные в правых частях соотношений (2.1.4). Вычисление собственных чисел $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ свелось с помощью пункта 2 леммы 1.1.1 к вычислению собственных чисел 2×2 матрицы $\mathbf{C}'$, которое производилось с помощью встроенной функции языка R — "eigen".

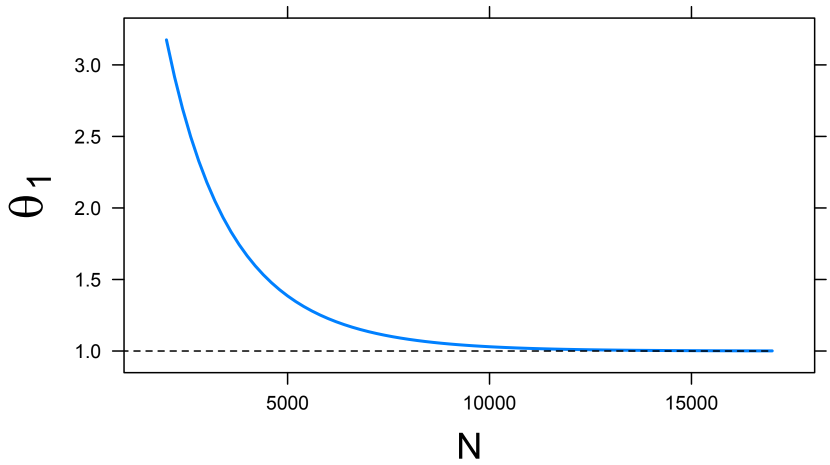

Рис. A.1: Поведение $\Theta_1(N)$ при $a_1 = 1.01$, $a_2 = 1.0095$, $c = 2$ и $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$.

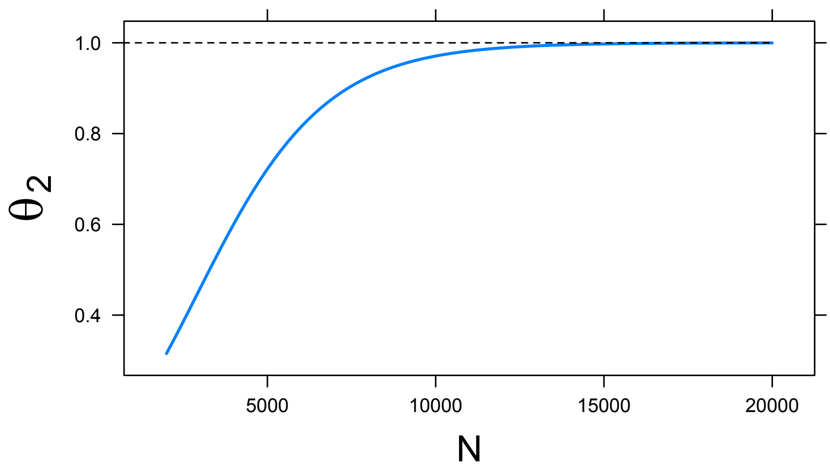

Рис. A.2: Поведение $\Theta_2(N)$ при $a_1 = 1.01$, $a_2 = 1.0095$, $c = 2$ и $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$.

A.2. Асимптотики α_i

Аналогично асимптотикам собственных чисел проверяются асимптотики α_i (предложение 3.1.1). Обозначим $\Xi_1(N) = \alpha_1/\alpha_1^{as}$ и $\Xi_2(N) = \alpha_2/\alpha_2^{as}$, где α_i^{as} — асимптотики в правых частях (3.1.7) и (3.1.8). Вычисление α_i производилось по формуле (3.1.4), а μ_i для этой формулы вычислялись так же, как в разделе A.1.

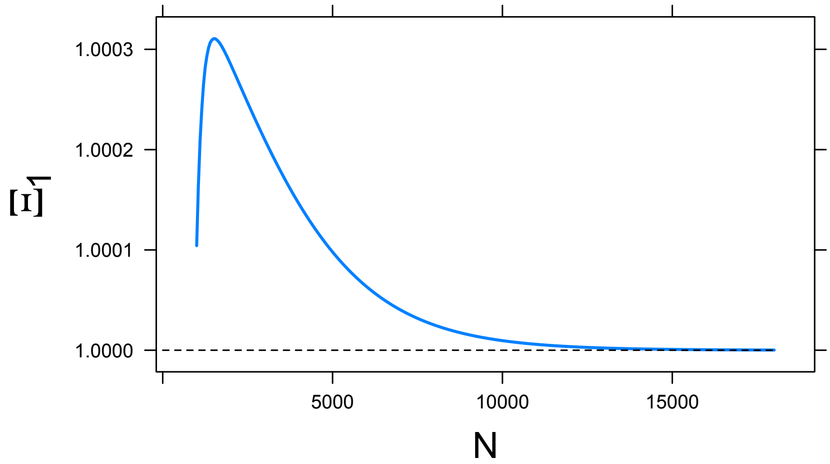

Рис. A.3: Поведение $\Xi_1(N)$ при $a_1 = 1.01$, $a_2 = 1.0095$, $c = 2$ и $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$.

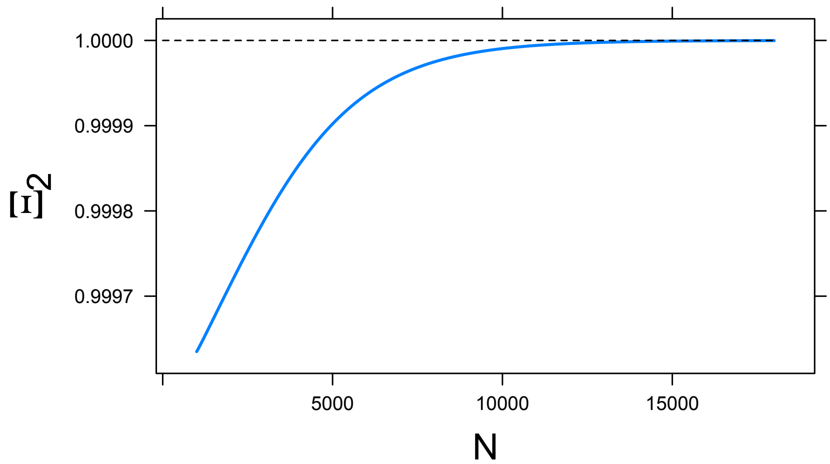

Рис. A.4: Поведение $\Xi_2(N)$ при $a_1 = 1.01$, $a_2 = 1.0095$, $c = 2$ и $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$.

А.3. Асимптотика $\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|$

Следующий график иллюстрирует утверждение теоремы 3.1.1. Изображено асимптотическое поведение

$$D_S = \frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{|\delta| d \sqrt{L}\, a_2^{-N}},$$

где константа d определена в (3.1.18). Норма вычислялась с помощью встроенной функции языка R — "norm", а матрица $\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0$ строилась явно для каждого N. За подробным описанием построения можно обратиться к доказательству теоремы 3.1.1.

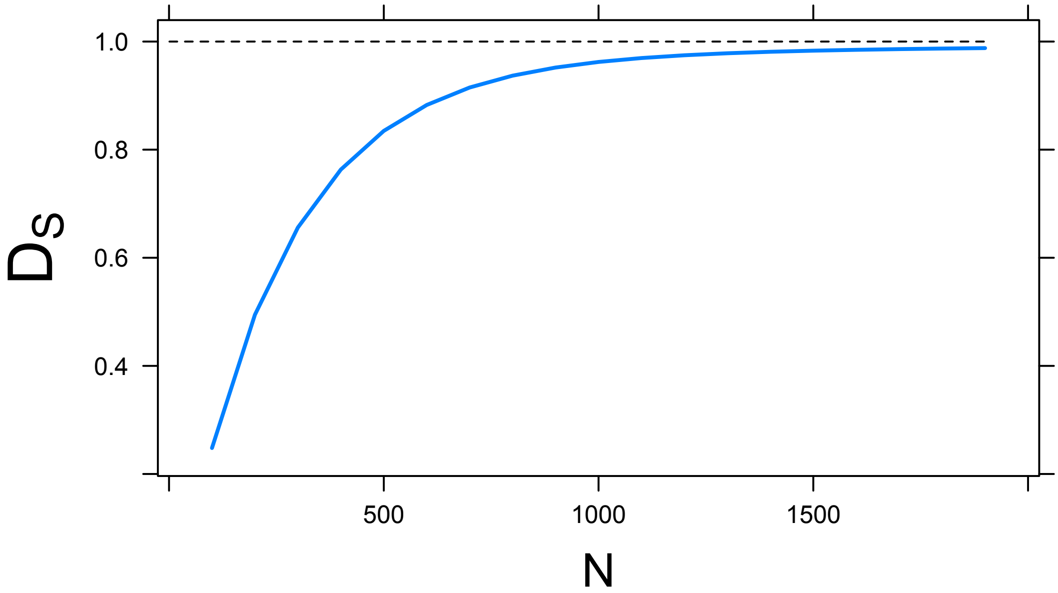

Рис. А.5: Отношение $\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|$ к своей теоретической асимптотике. Параметры: $a_1 = 1.2$, $a_2 = 1.195$, $c = -1$, $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$, $\delta = 1$.

A.4. Асимптотика $\|\mathbf{V}_0^{(1)}\|$

График A.6 иллюстрирует утверждение теоремы 3.2.1, то есть асимптотическое поведение

$$D_V = \frac{\|\mathbf{V}_0^{(1)}\|}{d\sqrt{L}\,a_2^{-N}},$$

где константа d определена в (3.1.18). Как и в разделе A.3, норма вычислялась с помощью встроенной функции языка R — "norm", а матрица $\mathbf{V}_0^{(1)}$ строилась явно, как в доказательстве теоремы 3.2.1.

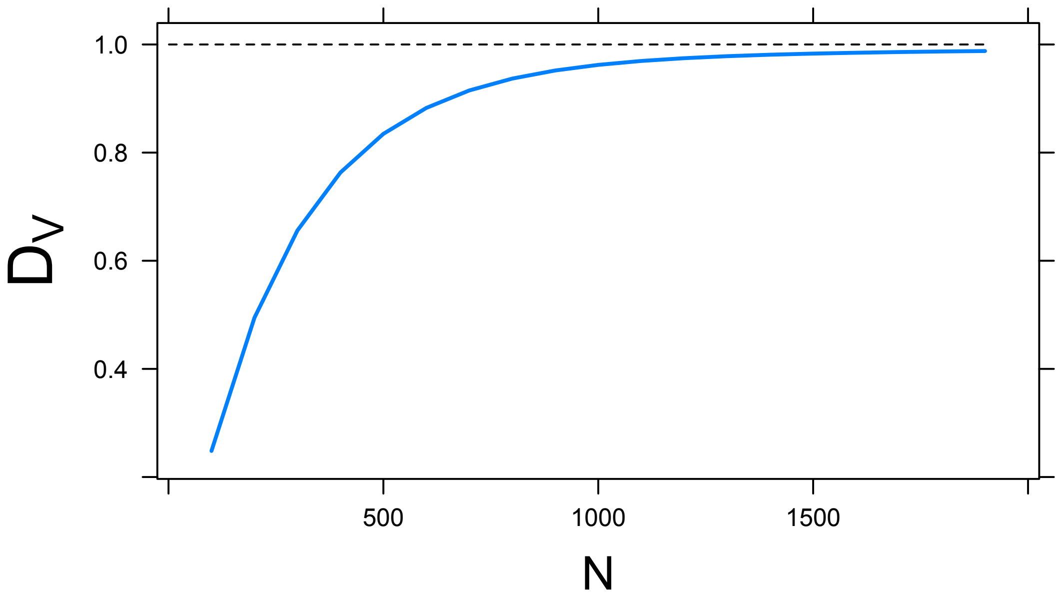

Рис. A.6: Отношение $\|\mathbf{V}_0^{(1)}\|$ к своей теоретической асимптотике. Параметры: $a_1 = 1.2$, $a_2 = 1.195$, $c = -1$, $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$.

A.5. Ошибки восстановления последнего элемента

Сначала проверим асимптотику нижнего правого элемента матрицы (4.1.5). График A.7 иллюстрирует утверждение теоремы 4.2.1, то есть асимптотическое поведение $D_r = r_{LK}/r_\infty$, где r_∞ определено в (4.2.1), а r_{LK} — нижний правый элемент матрицы $\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta) + \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}$. При вычислении D_r, r_{LK} строилось и вычислялось явно, следуя доказательству теоремы 4.2.1.

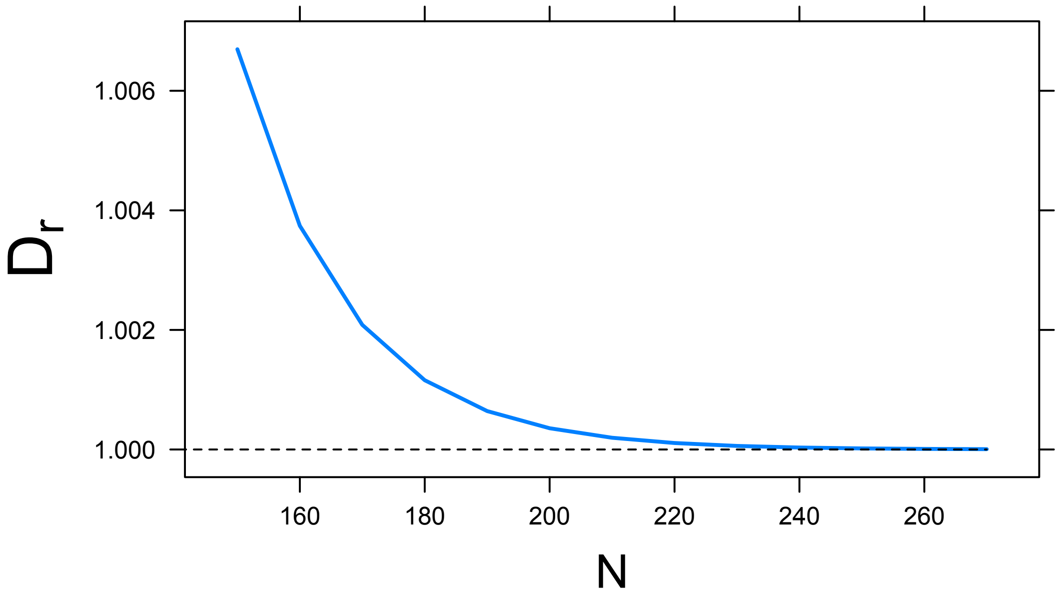

Рис. A.7: Отношение r_{LK} к своей теоретической асимптотике. Параметры: $a_1 = 1.15$, $a_2 = 1.13$, $c = -2$, $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$, $\delta = 1$.

Далее, проверим асимптотику реальной ошибки восстановления последнего элемента, посчитанной с использованием пакета "Rssa". Будем обозначать D_{ssa} отношение реальной ошибки восстановления последнего элемента ряда к r_∞.

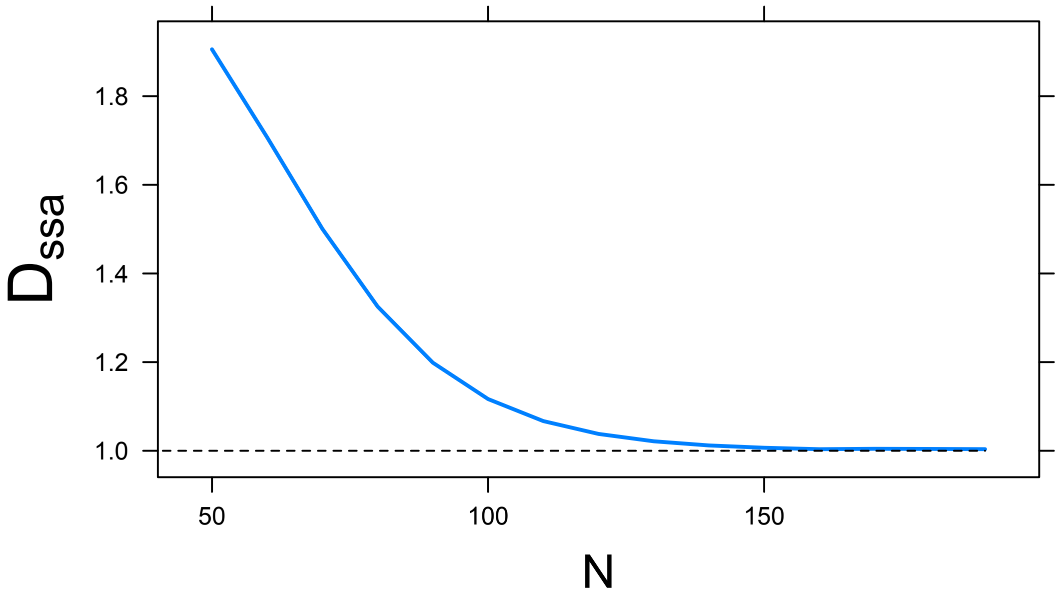

Рис. А.8: Отношение реальной ошибки восстановления последнего элемента ряда к своей теоретической асимптотике.

Параметры: $a_1 = 1.15$, $a_2 = 1.13$, $c = -2$, $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$, $\delta = 1$.

A.6. Значения r_∞

Поскольку не доказано, что $r_\infty \neq 0$ (см. замечание 4.2.1), покажем это численно при некоторых a_1, a_2, удовлетворяющих условию $1 < a_2 < a_1 < a_2^2$. Вычислять r_∞ (на графиках — r_{inf}) будем непосредственно, как определено в условии теоремы 4.2.1.

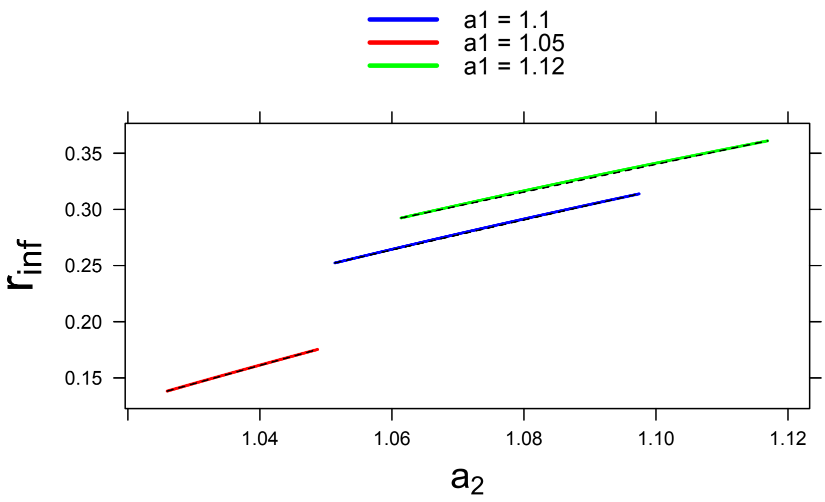

Рис. A.9: Значение r_∞ в зависимости от a_2 при некоторых фиксированных a_1.

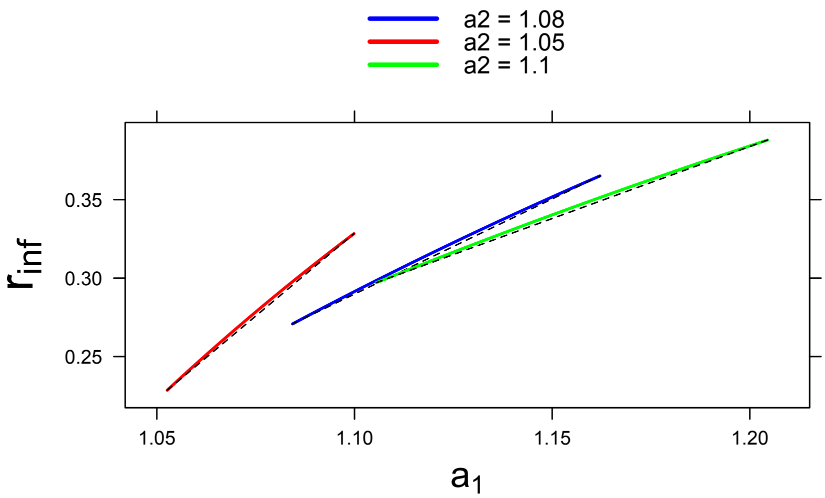

Рис. A.10: Значение r_∞ в зависимости от a_1 при некоторых фиксированных a_2.

A.7. Поведение нормы разности проекторов

Следующие графики обосновывают предположение о том что условие $a_1/a_2^2 < 1$ не является необходимым для сходимости нормы разности проекторов к нулю. Будем обозначать $D = \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$.

$\mathbf{P}_0^\perp$ вычислялось следующим образом: сначала строились нормированные собственные вектора $\mathbf{H}\mathbf{H}^\mathrm{T}$, которые согласно (3.1.3), имеют вид $U_i = (\alpha_i A_{L1} + A_{L2})/\|\alpha_i A_{L1} + A_{L2}\|$ (α_i вычислялись как в разделе A.2). Далее, $\mathbf{P}_0^\perp = U_1 U_1^\mathrm{T} + U_2 U_2^\mathrm{T}$. Что касается нормированных собственных векторов для $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$, то они вычислялись с помощью пакета "Rssa".

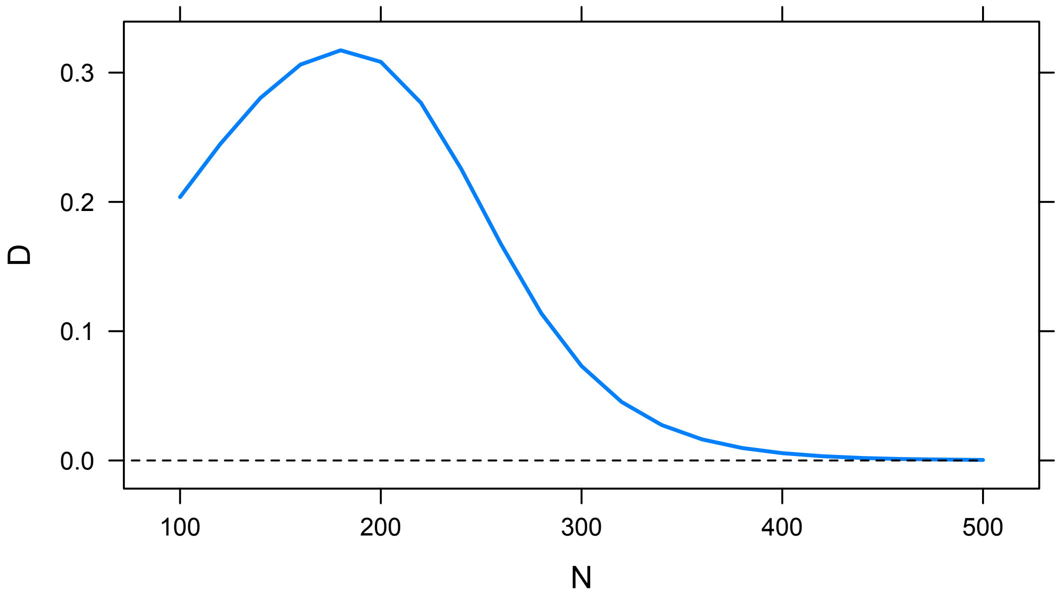

Рис. A.11: Поведение $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$ зависимости от N. Параметры: $a_1 = 1.05$, $a_2 = 1.03$, $c = 0.1$, $\delta = 1$, $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$. Условие $a_1/a_2^2 < 1$ выполнено.

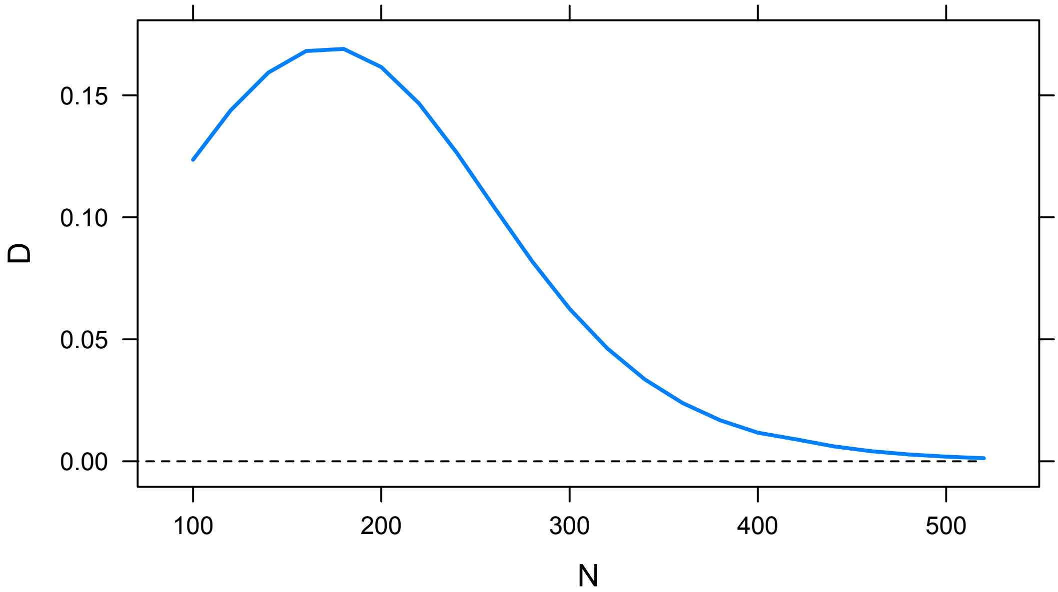

Рис. A.12: Поведение $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|$ зависимости от N. Параметры: $a_1 = 1.05$, $a_2 = 1.022$, $c = 0.1$, $\delta = 0.3$, $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$. Условие $a_1/a_2^2 < 1$ не выполнено.

A.8. Главный член разности проекторов

Следующие графики обосновывают предположение о том, что $\mathbf{V}_0^{(1)}$ является главным членом $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}$ независимо от выполнения условий $a_1 < a_2^{3/2}$ и даже $a_1 < a_2^2$. Обозначим

$$D_m = \frac{\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \delta \mathbf{V}_0^{(1)}\|}{|\delta|\, \|\mathbf{V}_0^{(1)}\|}.$$

Вычисление матриц $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ и $\mathbf{P}_0^{\perp}$ проводилось так же, как в разделе A.7, а $\mathbf{V}_0^{(1)}$ — как в A.4.

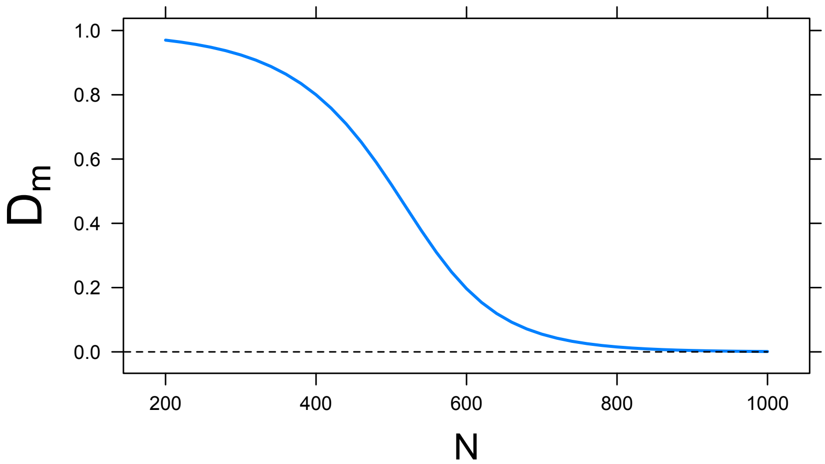

Рис. A.13: Отношение $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \delta \mathbf{V}_0^{(1)}\|$ к $\|\mathbf{V}_0^{(1)}\|$. Параметры: $a_1 = 1.02$, $a_2 = 1.015$, $c = 0.1$, $\delta = 1$, $L = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$. Условие $a_1 < a_2^{3/2}$ выполнено.

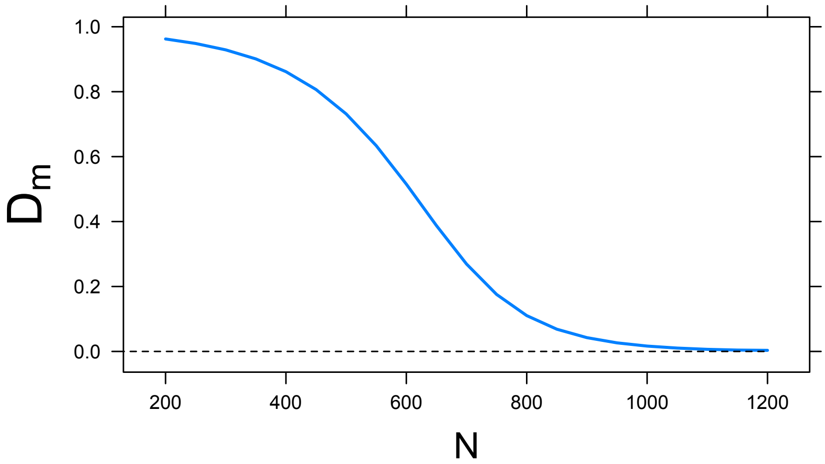

Рис. A.14: Отношение $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)-\mathbf{P}_0^{\perp}-\delta\mathbf{V}_0^{(1)}\|$ к $\|\mathbf{V}_0^{(1)}\|$. Параметры: $a_1=1.017$, $a_2=1.011$, $c=0.1$, $\delta=1$, $L=\lfloor (N+1)/2\rfloor$. Условие $a_1<a_2^2$ выполнено, но не выполнено $a_1<a_2^{3/2}$.

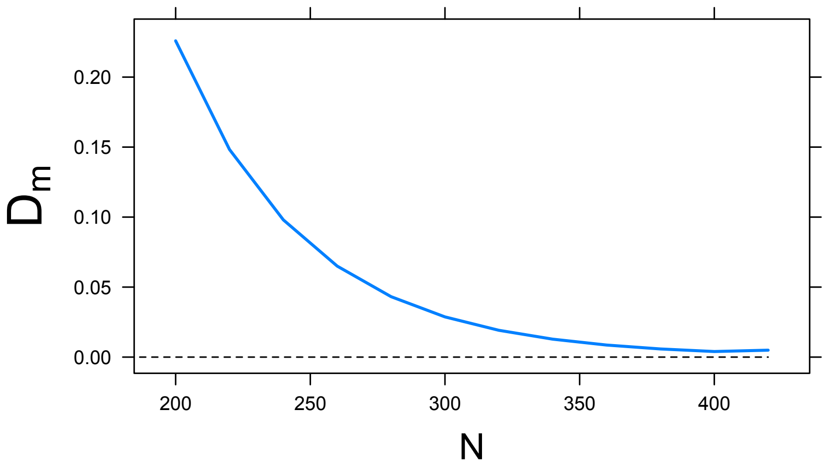

Рис. A.15: Отношение $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)-\mathbf{P}_0^{\perp}-\delta\mathbf{V}_0^{(1)}\|$ к $\|\mathbf{V}_0^{(1)}\|$. Параметры: $a_1=1.05$, $a_2=1.022$, $c=-1$, $\delta=1$, $L=\lfloor (N+1)/2\rfloor$. Условие $a_1<a_2^2$ не выполнено.