Санкт-Петербургский государственный университет

ИВАНОВ Всеволод Павлович

Выпускная квалификационная работа

О числе путей на решетках в областях, заданных линейными неравенствами

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2019 «Математика»

Научный руководитель:
Профессор
Факультет математики
и компьютерных наук СПбГУ
доктор ф.-м. наук
Фёдор Петров

Рецензент:
Старший научный сотрудник
Факультет
компьютерных наук,
Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Санкт-Петергбургское отеделние
Математического института им.
В.А.Стеклова
Российской академии наук
Никитин Павел Павлович

Санкт-Петербург
2023 год

Содержание

1 Введение

Рассмотрим пути на решётке $\mathbb{Z}^d$, в которых каждый шаг соответствует увеличению одной из координат на 1 (так называемый d-мерный граф Паскаля). Количество путей между двумя вершинами $(a_1, \ldots, a_d)$ и $(b_1, \ldots, b_d)$ равно, как известно, мультиномиальному коэффициенту $\binom{\sum(b_i - a_i)}{b_1 - a_1, \ldots, b_d - a_d}$.

Пусть теперь в решётке рассматриваются только точки с возрастающими неотрицательными координатами $\{0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_d\}$. Этот индуцированный подграф графа Паскаля называется (ограниченным) графом Юнга, его вершины соответствуют диаграммам Юнга не более чем с d строками. Теперь пути между двумя вершинами можно отождествить с косыми таблицами Юнга. В случае, когда начало пути совпадает с началом координат, речь об обычных таблицах Юнга, количество которых считается по формуле крюков.

Недавно А. М. Вершик поставил вопрос об индуцированных подграфах графа Паскаля, заданных другими неравенствами.

Настоящая работа посвящена первому нетривиальному случаю: $d = 3$, неравенства состоят в том что первая координата всегда не меньше двух других.

2 Формулировка основных результатов

Для начала, мы узнаем, чему равны недиагональные числа Каталана в размерностях 2 и 3. Точнее, посчитаем число путей из точки $(0, 0)$ в точку (a_1, a_2), таких, что в любой точке пути (x_1, x_2) выполняется $(x_1 \geq x_2)$ (Подобное число путей можно посчитать в любой размерности, где координаты любой вершины пути нестрого упорядочены). В дальнейшем будем обозначать это число C_{a_1,a_2}. Для этого мы переформулируем нашу задачу с помощью следующего утверждения (я сформулирую его в размерности 2, но оно аналогичным образом распространяется на любую размерность):

Предложение 1. Есть множество чисел $1, 2, \ldots (a_1 + a_2)$. Также есть пустая таблица состоящая из двух строк: перрвая строка длины a_1, вторая длины a_2. Мы хотим записать в каждую ячейку таблицы одно из чисел множества по следующему правилу: числа должны возрастать при движении слева направо и сверху вниз. Тогда количество заполнений этой таблице в точности равно C_{a_1,a_2}.

Теперь для подсчета количества заполнений подобных таблиц есть формула крюков. Крюк клетки - это она сама, а также клетки, расположенные справа от неё, и клетки, расположенные снизу. Длина крюка — это количество его клеток. Теперь мы готовы сформулировать теорему:

Теорема 1. *(Формула крюков) Количество заполнений таблицы равно факториалу количества её клеток, делённому на произведение длин всех её крюков.*

Мы интересуемся другим, менее тривиальным случаем, а именно: рассматриваются пути по целочисленной решётке в размерности 3 из точки $(0, 0, 0)$ в точку (a, b, c), в которых каждый шаг состоит в увеличении одной из координат на 1 с дополнительным ограничением: в каждой точке пути первая координата должна быть не меньше, чем максимум из двух других (Далее обозначаем как $F(a, b, c)$).
В параграфах 5 и 6, происходит вывод формулы для $F(a, b, c)$ в виде суммы $b \cdot c$ слагаемых, а также явная формула, в случае когда $a = b$ или $a = c$.
Затем, в параграфе 7 выводится формула для производящей функции для $F(a, b, c)$ с помощью Теоремы Лагранжа об обращении рядов.
Наконец, используя формулу, полученную в параграфе 7, мы находим асимптотику данной последовательности, когда (a, b, c) пропорционально стремятся к бесконечности

3 Явная формула для $C_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ из формулы крюков

Пользуясь предложением из прошлого параграфа, а также формулой крюков, можно найти явную формулу для $C_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$. Введем следующие обозначения:
$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ - суммарное число клеток;
$l_i = a_i + k - i$ - длина крюка первой клетке в i строке.
Затем, несложным рассуждением можно понять, что среди длин крюков чисел первой строки присутствуют все числа от 1 до l_1 , кроме разностей $l_1 - l_m$, где $1 < m \leq k$.
Наконец, отбросив верхнюю строку, мы получаем таблицу, к верхней строке которой — второй строке исходной таблицы — применима то же рассуждение. Таким образом, длины крюков второй строки — числа от 1 до l_2 , кроме разностей $l_2 - l_3, ..., l_2 - l_k$. Рассуждая так же для третьей, четвёртой и всех следующих строк, приходим к выводу: произведение длин крюков всех клеток таблицы равно произведению факториалов $l_1!l_2!...l_k!$, делённому на произведение всевозможных разностей $l_i - l_j$, где $1 \leq i < j \leq k$. Итого получаем формулу:

$$C_{a_1,a_2,\ldots,a_k} = \frac{n! \prod\limits_{1\leq i<j\leq k}(l_i - l_j)}{\prod\limits_{i=1}^{k} l_i!} = \frac{(\sum_{i=1}^{k} a_i)! \prod\limits_{1\leq i<j\leq k}(a_i - a_j - (i-j))}{\prod\limits_{i=1}^{k}(a_i + k - i)!}$$

4 Явная формула для путей для некоторых других ограничений

Хоть и формула крюков применима не всегда, но есть случаи, когда задачу можно к формуле крюков свести:
1) В размерности 3, когда на каждую вершину пути (x_1, x_2, x_3) задано только соотношение $x_1 \geq x_2$. Обозначим это число за $A(a_1, a_2, a_3)$ Тогда можно не рассматривать пути по третьей координате а затем эти шаги в любое место между шагами по первой и второй по формуле для шаров и перегородок. Получится:
$A(a_1, a_2, a_3) = C_{a_1,a_2} C_{a_1+a_2+a_3-1}^{a_3-1}$
2) В размерности 3, когда дано чуть более хитрое соотношение, а именно в каждой вершине верно, что $x_1 \geq x_2 + x_3$. Обозначим это число за $B(a_1, a_2, a_3)$. Здесь можно опять свести задачу к классической задаче на плоскости, временно не отличая шаги по второму и третьему направлению, а зачем из $a_2 + a_3$ шагов выбрать те a_2, которые соответствуют второму направлению. Получаем формулу:
$B(x_1, x_2, x_3) = C_{a_1,a_2+a_3} C_{a_2+a_3}^{a_2}$

5 Основная задача

5.1 Постановка задачи, определение $P_{b,c}(z)$

А теперь, давайте усложним задачу: мы рассматриваем пути по трехмерной целочисленной решетке из точки $(0, 0, 0)$ в точку (a, b, c), где в каждой точке (a_0, b_0, c_0) выполняются неравенства $a_0 \geq b_0$ и $a_0 \geq c_0$. Она уже не решается методами, показанными ранее, нужно придумать что-то новое. Во- первых обозначим искомое количество путей за $F(a, b, c)$. Также, уточним, что граничными точками мы будем называть следующие (a, b, c):
1) либо b, либо c равно нулю
2) либо $a = c$, либо $b = c$
Тогда для всех точек не на границе верно следующее соотношение:
$F(a, b, c) = F(a - 1, b, c) + F(a, b - 1, c) + F(a, b, c - 1) \qquad (1)$

Теперь введем и докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Для неотрицательных значений b и c и $a \geq max(b,c)$, $F(a,b,c)$ принимает те же значения, что и полином $P_{b,c}(z)$ степени $b+c$ в точке a.*

1) Определим многочлен в случае, когда $b = c = 0$. В этом случае $F(a,0,0) = 1$. Тогда так и определим наш многочлен, $P_{0,0}(z) = 1$.
2) Также легко разбирается случай, когда из одна из переменных b, c равна нулю. НУО $b = 0$. Тогда определим наш многочлен так:
$P_{0,c}(z) = C^{c}_{z+c} - C^{c-1}_{z+c}$
3) В случае, когда $min(b,c) \geq 1$, хочется применить (1), однако есть проблемы с точками на границе, а именно в случае, когда $max(b,c) = a$. Выпишем его в случае, когда $max(b,c) < z$
$F(z,b,c) = F(z-1,b,c) + F(z,b-1,c) + F(z,b,c-1)$ и перепишем его в таком виде:
$F(z,b,c) - F(z-1,b,c) = F(z,b-1,c) + F(z,b,c-1) \qquad (2)$
Теперь, если доказывать индукцией по переменным b, c, то правую часть (2) мы можем переписать в виде:
$F(z,b,c) - F(z-1,b,c) = P_{b-1,c}(z) + P_{b,c-1}(z)$
Наконец заметим, если $a = max(b,c)$, НУО $a = c$, то мы имеем следующее соотношение:
$F(a,b,a) = F(a,b-1,a) + F(a,b,a-1)$, В таком случае, предполагаем $P_{b,c}(c-1) = 0$ и завершаем доказательство леммы.

5.2 Введение $\phi(b,c)$ и вывод формулы $P_{b,c}(z)$ через ϕ

В конечном итоге мы получили следующую формулу при $min(b,c) \geq 1$
$P_{b,c}(z) - P_{b,c}(z-1) = P_{b-1,c}(z) + P_{b,c-1}(z) \qquad (3)$
Оказывается, что удобно рассмотреть наш многочлен и в отрицательных точках. Введем следующее обозначение:
$\phi(b,c) := P_{b,c}(-b-c)$
Теперь, вычтем выражения вида (3) для z и $z-1$:
$P_{b,c}(z) - P_{b,c}(z-1) - (P_{b,c}(z-1) - P_{b,c}(z-2)) = P_{b,c}(z) - 2P_{b,c}(z-1) + P_{b,c}(z-2) =$
$= (P_{b-1,c}(z) + P_{b,c-1}(z)) - (P_{b-1,c}(z-1) + P_{b,c-1}(z-1)) =$
$= (P_{b-1,c}(z) - P_{b-1,c}(z-1)) + (P_{b,c-1}(z) - P_{b,c-1}(z-1)) =$ (Из (3))
$= (P_{b-2,c}(z) + P_{b-1,c-1}(z)) + (P_{b-1,c-1}(z) + P_{b,c-2}(z)) = P_{b-2,c}(z) + 2P_{b-1,c-1}(z) + P_{b,c-2}(z)$
В общем случае, по индукции по n и из основного тождества для биномиальных коэффициентов, получаем формулу:
$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C^j_n P_{b,c}(z-j) = \sum_{j=0}^{n} C^j_n P_{b-n+j,c-j}(z) \qquad (4)$
Подставим в эту формулу $z = n-b-c$, $\zeta = -b-c$, а выражение слева обозначим за $[\Delta^n P_{b,c}(\zeta)]_{\zeta=-b-c}$. Тогда, поскольку $(b-n+j)+(c-j) = (b+c-n)$, формулу (4) можно переписать в виде:
$[\Delta^n P_{b,c}(\zeta)]_{\zeta=-b-c} = \sum_{j=0}^{n} C^j_n \phi(b-n+j, c-j) \qquad (5)$
Однако, любой многочлен $P(z), z \in Z$ выражается с помощью его значения и его производных в фиксированной точке:
$P(z) = \sum\limits_{n\geq 0} [\Delta^n P(z)]_{z=z_0} C^n_{z-z_0}$
Применяя эту формулу в нашем случае, получаем:
$P_{a,b}(z) = \sum\limits_{n\geq 0} [\sum\limits_{j=0}^{n} C^j_n \phi(b-n+j, c-j)] C^n_{z+b+c} \qquad (6)$
Теперь давайте введем переменную $i := n-j$. Тогда (6) можно переписать в виде:

$P_{a,b}(z) = \sum\limits_{i \geq 0} \sum\limits_{j \geq 0} \phi(b-i, c-j) C_{i+j}^{j} C_{z+a+b}^{i+j} \qquad (7)$

Наконец, мы можем получить формулу $F(a,b,c)$, заменив z на a, а также введем переменные $h := b - i$, $k := c - j$ и получим:

$F(a,b,c) = \sum\limits_{h} \sum\limits_{k} \phi(h,k) C_{b-h,c-k,a+h+k} \qquad (8)$

Здесь суммирование может вестись только для $0 \leq h \leq b$ и $0 \leq k \leq c$, остальные члены обнуляются, так что если посчитать значение ϕ, то мы получим формулу для $F(a,b,c)$, содержащую квадратичное количество слагаемых.

5.3 Вычисление формулы для $\phi(h,k)$. Окончательная формула для $F(a,b,c)$

Для начала разберемся со случаем, когда $h + k < 2$, то есть $(h,k) = (0,0),(0,1),(1,0)$. В этом случае их легко вычислить из явных формул для $P_{0,0}(z) = 1, P_{0,1}(z) = z, P_{1,0}(z) = z$. Получим, что $\phi(0,0) = 1$ и $\phi(1,0) = \phi(0,1) = -1$. В случае, когда $h = 0$, $k \geq 2$, мы знаем что: $\phi(0,k) = P_{0,k}(-k) = C_0^k - C_0^{k-1} = 0$. Теперь, утверждается, что если $h,k \geq 1$, то верна следующая формула:

$\phi(h,k) = \frac{2(-1)^{h+k}(h+k-1)!(2h+2k-3)!}{h!k!(2h-1)!(2k-1)!} \qquad (9)$

Заметим, что формула на самом деле работает даже при $h + k \geq 2$, с оговоркой, что наличие в знаменателе отрицательных факториалов делает дробь равных 0. При желании ее можно распространить на случай $h + k \geq 0$, но в этом нет нужды.

Для иллюстрации, вычисленные $\phi(h,k)$ для $h,k \leq 5$:

	k = 0	1	2	3	4	5
h = 0	1	−1	0	0	0	0
1	−1	2	−2	2	−2	2
2	0	−2	10	−28	60	−110
3	0	2	−28	168	−660	2002
4	0	−2	60	−660	4290	−20020
5	0	2	−110	2002	−20020	136136

Формула (9) выводится так:

Давайте выражение справа в формуле (9) временно обозначим за $\phi'(h,k)$, а выражение в формуле (8), где ϕ заменили на ϕ' обозначим за $P'_{b,c}(z)$. Следующие утверждения доказывают, что $P' = P$ для всех b,c:

(i) $P'_{0,0}(z) = 1$

(ii) $P'_{b,c}(z) - P'_{b,c}(z-1) = P'_{b-1,c}(z) + P'_{b,c-1}(z)$, то есть аналог формулы (3)

(iii) $P'_{b,c}(max(b,c) - 1) = 0$

Тем самым мы вывели формулу для $F(a,b,c)$ в виде суммы квадратичного числа слагаемых. Также приведем пример вычисления $F(6,3,4)$:

$$f(6,3;4) = \binom{13}{4\ \ 3\ \ 6} - \binom{13}{4\ \ 2\ \ 7}$$

$$- \binom{13}{3\ \ 3\ \ 7} + 2\binom{13}{3\ \ 2\ \ 8} - 2\binom{13}{3\ \ 1\ \ 9} + 2\binom{13}{3\ \ 0\ \ 10}$$

$$- 2\binom{13}{2\ \ 2\ \ 9} + 10\binom{13}{2\ \ 1\ \ 10} - 28\binom{13}{2\ \ 0\ \ 11}$$

$$+ 2\binom{13}{1\ \ 2\ \ 10} - 28\binom{13}{1\ \ 1\ \ 11} + 168\binom{13}{1\ \ 0\ \ 12}$$

$$- 2\binom{13}{0\ \ 2\ \ 11} + 60\binom{13}{0\ \ 1\ \ 12} - 660\binom{13}{0\ \ 0\ \ 13}$$

$$f(6,3;4) = -660 + \binom{13}{1}(168+60) - \binom{13}{2}(28 + 2\times 28 + 2)$$

$$+ \binom{13}{3}(2 + 3\times 10 + 3\times 2) - \binom{13}{4}(4\times 2 + 6\times 2)$$

$$+ \binom{13}{5}(10\times 2) - \binom{13}{6}(15 + 20) + \binom{13}{7}35$$

$$= -660 + 13\times 228 - 78\times 86 + 286\times 38 - 715\times 20 + 1287\times 20 - 1716\times 35 + 1716\times 35$$

$$= 17.904$$

6 Вывод явной формулы для $F(a,b,a)$

6.1 Полином $A_h(z)$ и производящая функция $\Psi_h(t)$

Восользуемся формулой (8) из прошлого параграфа и подставим в неё значения a, b, a:

$$F(a,b,a) = \sum_h \sum_k \phi(h,k) C_{b-h,a-k,a+h+k}$$

Вынесем все множители с k во внутренню сумму. Получим:

$$F(a,b,a) = \sum_h [\frac{(2a+b)!}{(b-h)!(2a+h)!} \sum_k C_{2a+h}^{a-k} \phi(h,k)]$$

Для $h \geq 2$ определим многочлен $A_h(z)$ степени $3h-3$ следующим образом:

$$A_h(z) = \frac{1}{h!(2h-1)!}(2z-3)_{2h-2} \cdot (z-1)_{h-1}$$

Заметим, что при таком определении выполняется равенство $\phi(h,k) = 2(-1)^{h+k} A_h(k+h)$

Перепишем наше выражение для $F(a,b,a)$:

$$F(a,b,a)=\sum_h\left[\frac{2(-1)^h(2a+b)!}{(b-h)!(2a+h)!}\sum_k(-1)^kC_{2a+h}^{a-k}A_h(k+h)\right] \qquad (10)$$

Внутреннюю сумму обозначим за $T_{a,h}$. То есть: (поскольку $A_h(h)=0$)
$(-1)^aT_{a,h}=C^0_{2a+h}A(a+h)-C^1_{2a+h}A(a+h-1)+\ldots+(-1)^{a-1}C^{a-1}_{2a+h}A(h+1)$
Заведём производящую функцию $\Psi_h(t)$ для последовательности $A_h(h+1), A_h(h+2),\ldots$:

$$\Psi_h(t)=A_h(h+1)+tA_h(h+2)+\ldots$$

Заметим, что в этом случае $(-1)^aT_{a,h}$ это просто коэффициент при t^{a-1} у произведения $(1-t)^{2a+h}\Psi_h(t)$

6.2 Полином $P_h(t)$.

Поскольку $A_h(z)$ - полином степени $3h-3$ от переменной z, то все коэффициенты при степенях $\geq 3h-2$ равны нулю. Из этого мы делаем вывод, что функция $P_h(t)=(1-t)^{3h-2}\Psi_h(t)$ - полином степени не более $3h-3$ от переменной t. Вспоминаем, что по определению:

$$A_h(1)=A_h(2)=\ldots=A_h(h)=0$$

Из этого можно сделать вывод, чо функция $t^h\Psi_h(t)$ является производящей функцией для последовательности $A_h(1),A_h(2),\ldots,A_h(h+1),\ldots$. Поэтому, функция $(1-t)^{3h-2}t^h\Psi_h(t)$ также явлется полиномом степени не более $3h-3$ по t. Из этого делаем вывод, что введённый нами полином $P_h(t)$ на самом деле имеет степень не более $2h-3$. Запишем его в таком виде: $P_h(z)=a_0^{(h)}+a_1^{(h)}t+\ldots+a_{2h-3}^{(h)}t^{2h-3}$.
Дальше хотим получить реккурентное соотношение на полином $P_h(t)$. Для этого сначала выпишем реккуренту на $A_h(h+n+1)$ через $A_h(h+n)$. Нетрудно убедиться, что:

$$h(2h-3-2n)A_h(h+n+1)+h(2n+4h-3)A_h(h+n)-(2h-3)(2n+h)A_{h-1}(h+n)=0$$

Теперь, поскольку $\Psi_h'(t)=\sum\limits_{h\geq 0}nA_h(h+n+1)t^{n-1}$, то из предыдущего выражения можно получить соотношение на $\Psi_h,\Psi_h',\Psi_{h-1},\Psi_{h-1}'$:

$$h\{(2h-3+(4h-1)t)\Psi_h(t)-2t(1-t)\Psi_h'(t)\}=(2h-3)\{h\Psi_{h-1}(t)+2t\Psi_{h-1}'(t)\}$$

И наконец, вспоминая, что $\Psi_h(t)=(1-t)^{-3h+2}P_h(t)$ мы получаем, что:

$$h(2h-3)P_h(t)-2htP_h'(t)=(2h-3)(1-t)\cdot\{(h+5(h-2)t)P_{h-1}(t)+2t(1-t)P_{h-1}'(t)\}$$

Приравняв коэффициенты при t^n мы также получаем следующее соотношение на коэффициенты этих многочленов:

$$h(2h-3-2n)a_n^{(h)}=(2h-3)\cdot\{(2n+h)a_n^{(h-1)}+2(2h-3-2n)a_{n-1}^{(h-1)}-(5h-6-2n)a_{n-2}^{(h-1)}\}$$

6.3 Замена переменной $\theta = t(1+t)^{-2}$

Заметим, что последнее выражение в предыдущем параграфе говорит нам о том, что $a_n^{(h)} = a_{2h-3-n}^{(h)}$. Это симметричность побуждает нас рассматривать коэффициенты $a_n^{(h)}$ как линейную комбинацию нечётных строк треугольника Паскаля. А именно:

$$\begin{array}{llllllll} & (a_0^{(h)} & a_1^{(h)} & a_2^{(h)} & \ldots\ldots & a_{2h-5}^{(h)} & a_{2h-4}^{(h)} & a_{2h-3}^{(h)}\ ) \\ = \beta_{h-2}^0 & (C_{2h-3}^0 & C_{2h-3}^1 & C_{2h-3}^2 & \ldots\ldots & C_{2h-3}^{2h-5} & C_{2h-3}^{2h-4} & C_{2h-3}^{2h-3}) \\ + \beta_{h-2}^1 & (0 & C_{2h-5}^0 & C_{2h-5}^1 & \ldots\ldots & C_{2h-5}^{2h-6} & C_{2h-5}^{2h-5} & 0\ \ ) \\ + \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ + \beta_{h-2}^{h-2} & (0 & 0 & 0\ldots C_1^0 & C_1^1 \ldots 0 & & 0 & 0\ \ ). \end{array} \qquad (11)$$

Полагая $h-2=i$ (≥ 0, поскольку $h \geq 2$), мы видим что:

$$P_{i+2}(t) = \beta_i^0 (1+t)^{2i+1} + \beta_i^1 t(1+t)^{2i-1} + \ldots + \beta_i^i t^i (1+t)$$

Если мы введём новую переменную $\theta = t(1+t)^{-2}$, то $P_{i+2}(t) = (1+t)^{2i+1} Q_i(\theta)$,
где $Q_i(\theta) = \sum\limits_{j=0}^{i} b_i^j \theta^j$
Поскольку $\theta = t(1+t)^{-2}$, то $d\theta/dt = (1-t)(1+t)^{-3}$. В таком случае, из нашего соотношение на $P_h(t), P_h'(t), P_{h-1}(t), P_{h-1}'(t)$ можно получить соотношение на $Q_i(\theta), Q_i'(\theta), Q_{i-1}(\theta), Q_{i-1}'(\theta)$:

$$(i+2)[(2i+1)Q_i(\theta) - 2\theta Q_i'(\theta)] = (2i+1)\{((i+2) + 4(2i-1)\theta)Q_{i-1}(\theta) + 2\theta(1-4\theta)Q_{i-1}'(\theta)\}$$

Наконец, из этого можно получить соотношение на $\beta_i^j, \beta_{i-1}^{j-1}, \beta_{i-1}^j$:

$$(i+2)(2i-2j+1)\beta_i^j = (2i+1)\{4(2i-2j+1)\beta_{i-1}^{j-1} + (i+j+2)\beta_{i-1}^j\} \qquad (12)$$

6.4 Разложение $T_{a,h}$

Напомним, что у нас $(-1)^a T_{a,h}$ это коэффициент при t^{a-1} у произведения $(1-t)^{2a+h}\Psi_h(t)$.
Далее $(1-t)^{2a+h}\Psi_h(t) = (1-t)^{3h-2}\Phi_h(t) \times (1-t)^{2a-2h+2} = P_h(t) \cdot (1-t)^{2a-2h+2}$
(Заметим, что $2a-2h+2 > 0$, поскольку $h \leq b \leq a$). Из этого получаем, что:

$$(-1)^a T_{a,h} = C_{2a-2h+2}^0 a_{a-1}^{(h)} - C_{2a-2h+2}^1 a_{a-2}^{(h)} + \ldots + (-1)^{a-1} C_{2a-2h+2}^{a-1} a_0^{(h)}$$

Или же:

$$T_{a,h} = \sum_n (-1)^n C_{2a-2h+2}^{a-1-n} a_n^{(h)} \qquad (13)$$

Здесь суммирование можно расширить на все целые n, если считать, что биномиальный коэффициент не равен нулю только при $0 \leq n \leq a-1$ и $a_n^{(h)}$ не равен нулю только при $0 \leq n \leq 2h-3$.
Вспоминая соотношение (11), получаем, что $-T_{a,h}$ является линейной комбинацией коэффициентов $\beta_{h-2}^0 \ldots \beta_{h-2}^{h-2}$. Из первой строки получаем, что при β_{h-2}^0 у нас коэффициент

$\sum\limits_{n\in Z}(-1)^n C_{2a-2h+2}^{a-1-n} C_{2h-3}^{n}$, который мы обозначим как $\rho(a,h)$. Аналогично, j-тая строка даёт нам коэффициент при β_{h-2}^{j} - $\sum\limits_{n\in Z}(-1)^n C_{2a-2h+2}^{a-1-n} C_{2h-2j-3}^{n-j}$, что равно $(-1)^j\cdot\rho(a-j,h-j)$. В итоге получаем следующее равенство:

$$-T_{a,h}=\beta_{h-2}^{0}\rho(a,h)-\beta_{h-2}^{1}\rho(a-1,h-1)+\ldots+(-1)^h\beta_{h-2}^{h-2}\rho(a-h+2,2) \qquad (14)$$

6.5 Вычисление $\rho(a,h)$

Первым делом перепишем $\rho(a,h)$:

$$\rho(a,h)=\frac{(2a-2h+2)!(2h-3)!}{(a-1)!a!}\cdot[C_{a-1}^{0}C_{a}^{2h-3}-C_{a-1}^{1}C_{a}^{2h-4}+\ldots]$$

Заметим, что сумма в квадратных скобках это просто коэффициент при t^{2h-3} у выражения $(1-t)^{a-1}(1+t)^a=(1-t^2)^{a-1}(1+t)$, то есть просто $(-1)^{h-2}C_{a-1}^{h-2}$. Поэтому получаем, что:

$$\rho(a,h)=(-1)^{h-2}\frac{(2a-2h+2)!}{(a-h+1)!}\cdot\frac{(2h-3)!}{(h-2)!a!}$$

Теперь, можно переписать выражение (14) в виде:

$$T_{a,h}=(-1)^{h-2}\frac{(2a-2h+2)!}{(a-h+1)!a!}\sum_{j=0}^{h-2}[(2h-3-2j)_{h-1-j}(a)_j\times\beta_{h-2}^{j}]$$

Внутреннюю сумму будем смотреть, как на многочлен от переменной z, в которую подставили $z=a$:

$$\sum_j[(2i-2j+1)_{i-j+1}(z)_j\times\beta_i^j]$$

6.6 Вычисление $T_{a,h}$

Вычисление приведённого многочлена для нескольких начальных значений i позволяет сделать вывод, что он пропорционален $(2z+i+2)_i$, а точнее:

$$\frac{(2i+2)!}{(i+1)!(i+2)!}(2z+i+2)_i=\sum_j[(2i-2j+1)_{i-j+1}(z)_j\times\beta_i^j] \qquad (15)$$

Оно получается с помощью реккурентных соотношений индукцией по переменной i, то есть мы знаем, что:

$$\frac{(2i)!}{(i)!(i+1)!}(2z+i+1)_{i-1}=\sum_j[(2i-2j-1)_{i-j}(z)_j\times\beta_{i-1}^j]$$

В правой части j замеянем на $j-1$ и домножаем обе части на $\frac{(2i+1)(2i+2)}{(i+1)(i+2)}(2z+2i+2)=\frac{2(2i+1)}{i+2}[2(z-j+1)+i+2j]$. Тогда слева получаем в точности левую часть выражения (15), а справа:

$$\frac{2(2i+1)}{i+2}\sum_j[2\beta_{i-1}^{j-1}(2i-2j+1)_{i-j+1}+\beta_{i-1}^{j}(2i-2j-1)_{i-j}(i+2j+2)](z)_j \qquad (16)$$

Наконец, пользуясь реккурентным соотношениям для β, получаем, что выражение (16) равно: $\sum_j \beta_i^j (2i-2j+1)_{i-j+1}(z)_j$, чем завершаем вывод выражения (15).
Наконец, возвращаясь к обозначению $h = i+2$, пользуясь соотношением (15) мы получаем, что:

$$T_{a,h} = \frac{(-1)^{h-1}(2a-2h+2)!}{(a-h+1)!a!} \cdot \frac{(2h-2)!}{(h-1)!h!} \cdot (2a+h)_{h-2} = \frac{(-1)^{h-1}(2a-2h+2)!}{h!(a-h+1)} \cdot \frac{(2h-2)!}{(h-1)} \cdot \frac{(2a+h)!}{a!(2a+2)!}$$

6.7 Явная формула для $F(a, b, a)$

Вспомним как $F(a, b, a)$ выражалась через $T_{a,h}$:

$$F(a, b, a) = \sum_h \frac{2(-1)^h(2a+b)!}{(b-h)!(2a+h)!} T_{a,h} \qquad (17)$$

Вводим последовательность u_n, заданную следующим образом: $u_0 = -\frac{1}{2}$, $u_n = (2n-2)_{n-1}$ при $n \geq 1$. Тогда выражение (17) переписывается следующим образом:

$$F(a, b, a) = -\frac{2(2a+b)!}{a!b!(2a+2)!}[C_b^0 u_0 u_{a+2} + C_b^1 u_1 u_{a+1} + \ldots + C_b^b u_b u_{a-b+2}] \qquad (18)$$

Осталось заметить, что наша последовательность u_n - коэффициенты производящей функции:

$$g(t) = -\frac{1}{2}(1-4t)^{\frac{1}{2}} = \sum \frac{u_i}{i!}$$

Таким образом, её можно вычислить взятием производных от $g(t)$. $n+1$ производная равна: $g^{(n+1)}(t) = (2n)_n(1-4t)^{-n-\frac{1}{2}}$ или же $g(t)g^{(n+1)}(t) = -\frac{1}{2}(1-4t)^{-n}$. Из последнего выражения получаем, что коэффициент при $\frac{t^b}{b!}$ равен:

$$-2^{2b-1}(n-1+b)_b$$

При подстановке $n = a-b+1$:

$$-2^{2b-1}\frac{a!}{(a-b)!}$$

Итого, получаем формулу для $F(a, b, a) = F(a, a, b)$:

$$F(a, b, a) = 4^b \times \frac{(2a+b)!}{b!(2a+2)!} \times \frac{(2a-2b+2)!}{(a-b)!(a-b+1)!} = \frac{4^b(2a-2b+1}{(a+1)(2a+1)} C_{2a-2b}^{a-b} C_{2a+b}^b \qquad (19)$$

В частности:

$$F(a, a, 0) = \frac{(2a)!}{a!(a+1)!} \qquad (20)$$

$$F(a, a, a) = \frac{4^a(3a)!}{(a+1)!(2a+1)!} \qquad (21)$$

7 Вывод производящей функции для $F(a, b, c)$

В прошлом параграфе, мы получили формулу:
$F(a, a, b) = \frac{4^b(2a-2b+1}{(a+1)(2a+1)} C_{2a-2b}^{a-b} C_{2a+b}^{b}$
Попробуем с её помощью вычислить производящую функцию $f(x, y, z)$:
$f(x, y, z) := \sum\limits_{a=0}^{\infty} \sum\limits_{b \le a} \sum\limits_{c \le a} F(a, b, c) x^a y^b z^c$. Домножим её на $(1 - x - y - z)$. Пользуясь тем, что $F(a, b, c) = F(a-1, b, c) + F(a, b-1, c) + F(a, b, c-1)$ для всех не граничных точек (a, b, c) почти все множители сократяться. С домножением на $-y$ останутся те точки, где $b = a$, а с домножением на $-z$ останутся те точки, где $c = a$. То есть получаем следующее равенство:

$$f(x, y, z) \cdot (1 - x - y - z) = F(0,0,0) - z \cdot \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{0 \le b \le a} F(a, b, a) x^a y^b z^a - y \cdot \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{0 \le c \le a} F(a, a, c) x^a y^a z^c \qquad (22)$$

Выражение в формуле (22) справа мы обозначим за $f_{bound}(x, y, z)$.
Пользуемся тем, что $F(a, b, c)$ симметрична по b и c и переписываем последнее выражение в виде:

$$f_{bound}(x, y, z) = F(0, 0, 0) - \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{0 \le c \le a} F(a, a, c)(x^a y^{a+1} z^c + x^a y^c z^{a+1}) \qquad (23)$$

По сути мы свели нашу задачу к вычислению двойной суммы:
$(S) \sum\limits_{a=0}^{\infty} \sum\limits_{0 \le c \le a} F(a, a, c)(x^a y^a z^b)$

7.1 Вычисление (S)

В предыдущем параграфе мы вычисляли $F(a, a, b) = \frac{4^b(2a-2b+1)}{(a+1)(2a+1)} C_{2a-2b}^{a-b} C_{2a+b}^{b}$
То есть мы вычисляем сумму: $\sum\limits_{a=0}^{\infty} \sum\limits_{0 \le b \le a} \frac{4^b(2a-2b+1)}{(a+1)(2a+1)} C_{2a-2b}^{a-b} C_{2a+b}^{b} (x^a y^b z^a) =$
$= \sum\limits_{a=0}^{\infty} \sum\limits_{0 \le b \le a} \frac{(2a-2b+1)}{(a+1)(2a+1)} C_{2a-2b}^{a-b} C_{2a+b}^{b} (xz)^a (4y)^b$
Сделаем несколько замен переменных: $n := xz, k = 4y, d := a - b$ и перепишем наше выражение в терминах этих переменных:
$\sum\limits_{b=0}^{\infty} \sum\limits_{d=0}^{\infty} \frac{(2d+1)}{(b+d+1)(2b+2d+1)} C_{2d}^{d} C_{3b+2d}^{b} n^{b+d} k^b$
Теперь, хотим уменьшить количество линейных множителей. Для этого рассмотрим следующую разность:
$C_{3b+2d}^{b} - 2C_{3b+2d}^{b-1} = \frac{(3b+2d)!}{(2b+2d)!b!} - \frac{2 \cdot (3b+2d)!}{(2b+2d+1)!(b-1)!} = \frac{(3b+2d)!}{(2b+2d+1)!b!)} \cdot (2b + 2d + 1 - 2b) = \frac{(2d+1) \cdot (3b+2d)!}{(2b+2d+1)!b!)} = \frac{2d+1}{2b+2d+1} C_{3b+2d}^{b}$. Эта выкладка помогает нам написать следующее равенство:
$(S) = \sum\limits_{b=0}^{\infty} \sum\limits_{d=0}^{\infty} \frac{1}{b+d+1} C_{2d}^{d} (C_{3b+2d}^{b} - 2 \cdot C_{3b+2d}^{b-1}) n^{b+d} k^b$
Времено забудем про множитель $\frac{1}{b+d+1}$. Разобьем это выражение в две суммы и вынесем множители, где не учавствует переменная b за одно из суммирований. Получим:
$\sum\limits_{d=0}^{\infty} (C_{2d}^{d} n^d \sum\limits_{b=0}^{\infty} C_{3b+2d}^{b} (nk)^b) - 2 \sum\limits_{d=0}^{\infty} (C_{2d}^{d} n^d \sum\limits_{b=1}^{\infty} C_{3b+2d}^{b-1} (nk)^b)$
Первым делом разберемся с внутренней суммой. По сути, наша текущая задача вычислить следующее:
$(S.1) \sum\limits_{b=0}^{\infty} C_{3b+2d}^{b} (nk)^b$
$(S.2) \sum\limits_{b=1}^{\infty} C_{3b+2d}^{b-1} (nk)^b$

Как мы дальше увидим, вычисление этих сумм делается примерно одинаково. Начнём с пункта $(S.2)$. Сразу введём обозначение $m := nk$. Тогда мы хотим вычислить следующее:
$\sum\limits_{b=1}^{\infty} C_{3b+2d}^{b-1} m^b$
В дальнейших вычислениях мы будем применять метод множителей Лагранжа. Выпишем его формулировку, применимую в нашем случае:

Теорема 2. *(Теорема Лагранжа об обращении рядов) Пусть функция $f(z)$ аналитична в нуле, $f(0) = 0$ и $f'(0) \neq 0$. Пусть также задана функция $F(z)$ Тогда в некоторой окрестности нуля обратная функция $F \circ f^{-1}(w)$ представима в виде ряда:*
$F(f^{-1})(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(F'(z)(\frac{z^n}{f^n(z)}))|_{z=0})w^n$

Хотим применить эту теорему к нашей сумме. Для этого прежде всего перепишем наше выражение в виде:
$\sum\limits_{b=1}^{\infty} C_{3b+2d}^{b-1} m^b = \sum\limits_{b=1}^{\infty} (1+m)^{3b+2d}|_{m^{b-1}} m^b = \sum\limits_{b=1}^{\infty} \frac{1}{(b-1)!} \cdot (\frac{d^{b-1}}{dm^{b-1}}(1+m)^{3b+2d})|_{m=0} m^b$
Это уже очень похоже на формулу в теореме Лагранжа об обращении рядов. А именно, давайте сначала вычислим сумму:
$\sum\limits_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b!} \cdot (\frac{d^{b-1}}{dm^{b-1}}(1+m)^{3b+2d})|_{m=0} m^b$
Давайте здесь введем два обозначения: $f_0(m) = \frac{m}{(1+m)^3}$, $F_1(m) = \frac{(1+m)^{2d+1}}{2d+1}$. Заметим, что $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) \neq 0$, то есть $f_0(m)$ подходит под условия в Теореме 2. Также, заметим, что $F_1'(m) = (1+m)^{2c}$. Подставим f_0 и F_1 в теорему 2 и получим:
$F_1(f_0^{-1}(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (\frac{d^{n-1}}{dm^{n-1}}(1+m)^{3n+2d})|_{m=0} m^n$, а это ровно то, что мы и хотим получить. То есть: $\sum\limits_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b!} \cdot (\frac{d^{b-1}}{dm^{b-1}}(1+m)^{3b+2d})|_{m=0} m^b = \frac{(1+f_0^{-1}(m))^{2d+1}}{2d+1}$
Обозначим сумму выше за $G_0(m)$, а $f_0^{-1}(m)$ за $g_0(m)$ Мы знаем, что $G_0(m) = \frac{(1+g_0(m))^{2d+1}}{2d+1}$
Затем заметим, что:
$\int(\sum\limits_{b=1}^{\infty} \frac{1}{(b-1)!} \cdot (\frac{d^{b-1}}{dm^{b-1}}(1+m)^{3b+2d})|_{m=0} m^{b-1}) dm = (\sum\limits_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b!} \cdot (\frac{d^{b-1}}{dm^{b-1}}(1+m)^{3b+2d})|_{m=0} m^b) + C = G_0(m) + C$,
то есть значение нашей суммы равно $m \cdot \frac{d}{dm}(G_0(m))) = m \cdot g_0'(m) \cdot (1+g_0(m))^{2d}$
Теперь давайте разберемся с суммой $(S.1)$. Сделаем то же самое обозначение $m = nk$ и выпишем то, что хотим вычислить:
$\sum\limits_{b=0}^{\infty} C_{3b+2d}^{b} m^b$. Сделаем замену $b' = b+1$. Получим:
$\sum\limits_{b'=1}^{\infty} C_{3b'-3+2d}^{b'-1} m^{b-1} = \sum\limits_{b'=1}^{\infty} \frac{1}{(b'-1)!} \cdot (\frac{d^{b'-1}}{dm^{b'-1}}(1+m)^{3b'+2d-3})|_{m=0} m^{b'-1}$.
Аналогично, сначала разбираемся с суммой:
$\sum\limits_{b'=1}^{\infty} \frac{1}{(b')!} \cdot (\frac{d^{b'-1}}{dm^{b'-1}}(1+m)^{3b'+2d-3})|_{m=0} m^{b'}$
Вспомним обозначение $f_0(m) = \frac{m}{1+m^3}$. Аналогично заводим функцию $F_2(m) = \frac{(1+m)^{2d-2}}{2d-2}$. Тогда подставляем их в условие теоремы Лагранжа об обращении рядов и получаем:
$F_2(f_0^{-1}(w)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (\frac{d^{n-1}}{dm^{n-1}}(1+m)^{3n+2d-3})|_{m=0} m^n$
Это ровно та сумма, что нам и нужна. То есть:
$\sum\limits_{b'=1}^{\infty} \frac{1}{(b')!} \cdot (\frac{d^{b'-1}}{dm^{b'-1}}(1+m)^{3b'+2d-3})|_{m=0} m^{b'} = \frac{(1+f_0^{-1}(m))^{2d-2}}{2d-2}$

Чтобы из неё получить ту сумму, которая нам нужна, достаточно взять производную. Поэтому: $\sum\limits_{b=0}^{\infty} C_{3b+2d}^{b} m^b = \frac{d}{dm}(\frac{(1+g_0(m))^{2d-2}}{2d-2}) = g_0'(m) \cdot (1+g_0(m))^{2d-3}$, где $g_0(m) = f^{-1}(m)$

Теперь, мы можем переписать выражение (b) (без множителя $\frac{1}{b+d+1}$) в виде:

$\sum\limits_{d=0}^{\infty} C_{2d}^{d} n^d g_0'(m)(1+g_0(m))^{2d} \cdot (\frac{1}{(g_0(m)+1)^3} - 2)$

Обозначим $i := n \cdot (1+g_0(m))^2$. Тогда все свелось к вычислению суммы: $\sum\limits_{d=0}^{\infty} C_{2d}^{d} i^d$

Мы знаем производящую функцию чисел Каталана $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n i^n = \frac{1-\sqrt{1-4i}}{2i}$

Заметим, что, если её домножить на i и продифференцировать, то получим ровно то, что нам нужно.

Поэтому $\sum\limits_{d=0}^{\infty} C_{2d}^{d} i^d = \frac{d}{di}(i \cdot \frac{1-\sqrt{1-4i}}{2i}) = \frac{d}{di}(\frac{1-\sqrt{1-4i}}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-4i}}$

Итого, мы без $\frac{1}{b+d+1}$ посчитали сумму:

$\sum\limits_{d=0}^{\infty} C_{2d}^{d} n^d g_0'(m)(1+g_0(m))^{2d} \cdot (\frac{1}{(g_0(m)+1)^3} - 2) = g_0'(m)(\frac{1}{(g_0(m)+1)^3} - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(m))^2 n}}$

Теперь, давайте вспоним про наш линейный множитель. В терминах m и n мы вычисляли следующую сумму:

$\sum\limits_{b=0}^{\infty} \sum\limits_{d=0}^{\infty} \frac{1}{b+d+1} C_{2d}^{d} (C_{3b+2d}^{b} - 2 \cdot C_{3b+2d}^{b-1}) n^d m^b$

Давайте заведём временные обозначения: $m_t = m \cdot t$, $n_t = n \cdot t$. Тогда перепишем наше выражение, подставив в него m_t и n_t:

$\sum\limits_{b=0}^{\infty} \sum\limits_{d=0}^{\infty} \frac{1}{b+d+1} C_{2d}^{d} (C_{3b+2d}^{b} - 2 \cdot C_{3b+2d}^{b-1}) n^d m^b t^{b+d} = g_0'(mt)(\frac{1}{(g_0(mt)+1)^3} - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(mt))^2 nt}}$

Заметим, что если проинтегрировать левое выражение по t от нуля до единицы, то мы получим ровно то, что нам и нужно. Отсюда следует, что:

$\sum\limits_{b=0}^{\infty} \sum\limits_{d=0}^{\infty} \frac{1}{b+d+1} C_{2d}^{d} (C_{3b+2d}^{b} - 2 \cdot C_{3b+2d}^{b-1}) n^d m^b = \int\limits_0^1 g_0'(mt)(\frac{1}{(g_0(mt)+1)^3} - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(mt))^2 nt}} dt$

Наконец, начнём обратную замену переменных и склеим все воедино: напомним, что $n = xz$, а $m = nk = 4xyz$. Тогда, изначальная сумма (S) это:

$\sum\limits_{a=0}^{\infty} \sum\limits_{0 \le b \le a} \frac{4^b(2a-2b+1)}{(a+1)(2a+1)} C_{2a-2b}^{a-b} C_{2a+b}^{b} (x^a y^b z^a) = \int\limits_0^1 g_0'(4xyzt)(\frac{1}{(g_0(4xyzt)+1)^3} - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(4xyzt))^2 xzt}} dt$

7.2 Формула для производящей функции для $F(a, b, c)$

Теперь у нас есть всё, чтобы можно было производящую функцию. Давайте вспомним, как она выглядела:

$f(x, y, z) \cdot (1 - x - y - z) = F(0, 0, 0) - \sum\limits_{a=0}^{\infty} \sum\limits_{0 \le c \le a} F(a, a, c)(x^a y^{a+1} z^c + x^a y^c z^{a+1})$

С помощью вычисленной суммы S, получаем, что:

1) $\sum\limits_{a=0}^{\infty} \sum\limits_{0 \le c \le a} F(a, a, c)(x^a y^c z^{a+1}) = z \int\limits_0^1 g_0'(4xyzt)(\frac{1}{(g_0(4xyzt)+1)^3} - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(4xyzt))^2 xzt}} dt$

2) $\sum\limits_{a=0}^{\infty} \sum\limits_{0 \le c \le a} F(a, a, c)(x^a y^{a+1} z^c) = y \int\limits_0^1 g_0'(4xyzt)(\frac{1}{(g_0(4xyzt)+1)^3} - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(4xyzt))^2 xyt}} dt$

Их сумма равна: $z \int\limits_0^1 g_0'(4xyzt)(\frac{1}{(g_0(4xyzt)+1)^3} - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(4xyzt))^2 xzt}} dt +$

$y\int\limits_0^1 g_0'(4xyzt)(\frac{1}{(g_0(4xyzt)+1)^3}-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(4xyzt))^2xyt}}dt = (\sqrt{y}+\sqrt{z})\cdot\int\limits_0^1 g_0'(4xyzt)(\frac{1}{(g_0(4xyzt)+1)^3}-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(4xyzt))^2xt}}dt$

В итоге получаем, что (формула (24))

$$f_{bound}(x,y,z) = (1-(\sqrt{y}+\sqrt{z})\cdot\int\limits_0^1 g_0'(4xyzt)(\frac{1}{(g_0(4xyzt)+1)^3}-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(4xyzt))^2xt}}dt$$

:

И саму производящую функцию $f(x,y,z)$(формула (25)):

$$f(x,y,z) = \frac{1}{1-x-y-z}(1-(\sqrt{y}+\sqrt{z})\cdot\int\limits_0^1 g_0'(4xyzt)(\frac{1}{(g_0(4xyzt)+1)^3}-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4(1+g_0(4xyzt))^2xt}}dt)$$

8 Асимптотика $F(a,b,c)$

В этом параграфе мы будем рассматривать значения $(a,b,c) = (\alpha n, \beta n, \gamma n)$, где $\alpha > max(\beta,\gamma) > 0$ и изучать поведение значения $F(a,b,c)$ при $n \to \infty$. Посмотрим на формулу (22):

$f(x,y,z)\cdot(1-x-y-z) = 1 - z\cdot\sum\limits_{a=0}^{\infty}\sum\limits_{0\le b\le a} F(a,b,a)x^a y^b z^a - y\cdot\sum\limits_{a=0}^{\infty}\sum\limits_{0\le c\le a} F(a,a,c)x^a y^a z^c$

Разделим обе части на $(1-x-y-z)$ и воспользуемся тем, что: $\frac{1}{1-x-y-z} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(1+x+y+z)^i$:

$f(x,y,z) = (1 - z\cdot\sum\limits_{a=0}^{\infty}\sum\limits_{0\le b\le a} F(a,b,a)x^a y^b z^a - y\cdot\sum\limits_{a=0}^{\infty}\sum\limits_{0\le c\le a} F(a,a,c)x^a y^a z^c)(\sum\limits_{i=0}^{\infty}(1+x+y+z)^i)$

Теперь, $F(a,b,c)$ - коэффициент при $x^a y^b z^c$ у правой части, а именно: (формула (26))

$$\binom{a+b+c}{a,b,c} - \sum_{m,s=0}^{\infty} F(m,m,s)\binom{a+b+c-2m-1-s}{a-m, b-(m+1), c-s} - F(m,s,m)\binom{a+b+c-2m-1-s}{a-m, b-s, c-(m+1)}$$

Хотим найти предел этого выражения при $n \to \infty$. Разделим всё выражение на $\binom{a+b+c}{a,b,c}$ и посчитаем предел отношения $\binom{a+b+c-2m-1-s}{a-m,b-(m+1),c-s} : \binom{a+b+c}{a,b,c}$ при зафиксированных m и s:

$\binom{a+b+c-2m-1-s}{a-m,b-(m+1),c-s} : \binom{a+b+c}{a,b,c} = \frac{(a+b+c-2m-1-s)!a!b!c!}{(a+b+c)!(a-m)!(b-m-1)!(c-s)!} \sim \frac{a^m b^{m+1} c^s}{(a+b+c)^{2m+1+s}}(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma})^m(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma})^{m+1}(\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma})^s$

Аналогично предел отношения $\binom{a+b+c-2m-1-s}{a-m,b-s,c-(m+1)} : \binom{a+b+c}{a,b,c}$ при зафиксированных m и s равен $(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma})^m(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma})^s(\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma})^{m+1}$

Поэтому, если наш ряд (26), разделённый на $\binom{a+b+c}{a,b,c}$ сходится равномерно по a,b,c, то получаем, что:

$lim_{n\to\infty}F(\alpha n,\beta n,\gamma n) \sim \binom{a+b+c}{a,b,c}\cdot(1-\sum\limits_{m,s=0}^{\infty}F(m,m,s)(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma})^m(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma})^{m+1}(\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma})^s - F(m,s,m)(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma})^m(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma})^s(\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma})^{m+1})$

Заметим, что $\binom{a+b+c}{a,b,c} \sim \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^{a+b+c}}{\alpha^a\beta^b\gamma^c}$, а второй множитель это просто f_{bound} для чисел

$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$, то есть наша асимптотика равна:

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^{a+b+c}}{\alpha^a\beta^b\gamma^c}\cdot f_{bound}(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}) \qquad (27)$$

То есть осталось понять равномерную сходимость ряда (26). Сначала, выпишем следующую цепочку равенств: (формула (28))

$$\binom{a+b+c}{a,b,c} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} \sim \sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}\frac{(a+b+c)^{a+b+c}}{a^ab^bc^c} = \sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}\cdot min_{x,y,z>0}\frac{(x+y+z)^{a+b+c}}{x^ay^bz^c}$$

Эквивалентность это просто формула Стирлинга. Осталось понять последнее равенство. Будем доказывать для фиксированной суммы $x+y+z = a+b+c$ (сумму можно зафиксировать, поскольку выражение под минимумом однородно). В этом случае достаточно доказать, что:

$$x^ay^bz^c \le a^ab^bc^c \longleftrightarrow (\frac{x}{a}^a)(\frac{y}{b}^b)(\frac{z}{c}^c) \le 1$$

Понять это можно с помощью неравенства о средних. А именно:

$$(\frac{x}{a}^a)(\frac{y}{b}^b)(\frac{z}{c}^c) \le (\frac{a\cdot\frac{x}{a}+b\cdot\frac{y}{b}+c\cdot\frac{z}{c}}{a+b+c})^{a+b+c} = (\frac{x+y+z}{a+b+c})^{a+b+c} = 1$$

Пользуясь формулой (28), мы получаем, что:

$$\binom{a+b+c-2m-1-s}{a-m, b-(m+1), c-s} \sim \sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot min_{x,y,z>0}\frac{(x+y+z)^{a+b+c-2m-1-s}}{x^{a-m}y^{b-m}z^{c-s}}$$

Обозначим наше выражение, по которому ищем минимум за Θ и подставим в качестве x, y, z числа a, b, c. Тогда получим, что:

$$\sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot min(\Theta) \le \sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot\frac{(a+b+c)^{a+b+c-2m-1-s}}{a^{a-m}b^{b-m}c^{c-s}}$$

Далее:

$$\sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot\frac{(a+b+c)^{a+b+c-2m-1-s}}{a^{a-m}b^{b-m}c^{c-s}} = \sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot\frac{(a+b+c)^{a+b+c}}{a^ab^bc^c}(\frac{a}{a+b+c})^m(\frac{b}{a+b+c})^{m+1}(\frac{c}{a+b+c})^s$$

Наконец, опять пользуясь формулой (28), получаем, что последнее выражение пропорционально

$$\sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\binom{a+b+c}{a,b,c}\cdot(\frac{a}{a+b+c})^m(\frac{b}{a+b+c})^{m+1}(\frac{c}{a+b+c})^s$$

Аналогично можно получить, что $\binom{a+b+c-2m-1-s}{a-m,b-s,c-m-1}$ эквивалентно:

$$\sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-s)(c-m-1)}}\cdot\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\binom{a+b+c}{a,b,c}\cdot(\frac{a}{a+b+c})^m(\frac{b}{a+b+c})^s(\frac{c}{a+b+c})^{m+1}$$

Из этого делаем вывод, что доказательство равномерной сходимости нашего ряда эквивалентно доказательству тому, что сумма следующих рядов равномерно сходится:

$$\sum_{m,s=0}^{\infty}\sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\cdot(\frac{a}{a+b+c})^{m}(\frac{b}{a+b+c})^{m+1}(\frac{c}{a+b+c})^{s}F(m,m,s)$$

$$\sum_{m,s=0}^{\infty}\sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-s)(c-m-1)}}\cdot\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}\cdot(\frac{a}{a+b+c})^{m}(\frac{b}{a+b+c})^{s}(\frac{c}{a+b+c})^{m+1}F(m,s,m)$$

Доказательство равномерной сходимости этих рядов будет состоять из двух частей:
1) Оба выражения под корнем равномерно ограничены. Это мы делаем, чтобы их просто убрать и доказывать равномерную сходимость ряда без этих корней
2) Если корни заменить на константу, то сумма этих рядов действительно будет равномерно сходится.
Сначала докажем второе утверждение. Для этого достаточно заметить, что сумма этих рядов это просто $f_{bound}(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c})$, а сходимость этого ряда очевидна.
Теперь перейдём к доказательству первого утверждения. Достаточно доказать только для одного из них, для другого утверждение аналогично. То есть мы смотрим на выражение:

$$\sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

Понятно, что он равномерно ограничен в случае, когда m,s отделены от a,b,c, то есть когда $m\leq 0.99b$, $s\leq 0.99c$. Иначе, давайте вспоним определение Θ и то, чем мы её оценивали:

$$min(\Theta)=min_{x,y,z>0}\frac{(x+y+z)^{a+b+c-2m-1-s}}{x^{a-m}y^{b-m}z^{c-s}}\leq\frac{(a+b+c)^{a+b+c-2m-1-s}}{a^{a-m}b^{b-m}c^{c-s}}$$

. Заметим, что в нашем случае точка минимума Θ, а именно $(a-m,b-m-1,c-s)$ находится далеко от точки (a,b,c), то и значения функционала $\Theta(x,y,z)$ в точке (a,b,c) будет отделено от минимума. Поэтому в нашем случае верна гораздо более сильная оценка:

$$min_{x,y,z>0}\frac{(x+y+z)^{a+b+c-2m-1-s}}{x^{a-m}y^{b-m}z^{c-s}}\leq e^{-const\cdot a}\cdot\frac{(a+b+c)^{a+b+c-2m-1-s}}{a^{a-m}b^{b-m}c^{c-s}}$$

Поэтому в этом случае корень также домножается на $e^{-const\cdot a}$, то есть смотрим на равномерную ограниченность выражения:

$$e^{-const\cdot a}\cdot\sqrt{\frac{a+b+c-2m-1-s}{(a-m)(b-m-1)(c-s)}}\cdot\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

Что уже понятно, когда мы смотрим на поведение a на бесконечности. Тем самым мы завершаем доказательство формулы (27) и получаем интересующую нас асимптотику.

Список литературы

[1] J.S. Frame, G. de B. Robinson, R.M. Thrall. The hook graphs of the symmetric group Canad. J. Math., 6 (1954), pp. 316-324.

[2] Germain Kreweras.On a class of counting problems linked to the lattice of partitions of integers