

Отзыв научного руководителя
на выпускную квалификационную работу
«Геометрическое описание множеств мономов,
допускающих поверхность с особенностью данного
порядка»
студента 4 курса бакалавриата 01.03.01 Математика
Осипова Дениса Вадимовича

Работа Дениса Осипова посвящена исследованию возможных множеств мономов многочлена от трёх переменных, имеющего особенность данного порядка в точке с ненулевыми значениями переменных, в качестве которой можно взять $(1, 1, 1)$. А именно, зафиксируем конечное подмножество A точек трёхмерного пространства с целыми неотрицательными координатами. Каждой такой точке (i, j, k) можно сопоставить моном $x^i y^j z^k$. Рассматривая суммы таких мономов с ненулевыми коэффициентами, получим семейство многочленов от трёх переменных. Объекты исследования — подмножества A (называемые “допускающими”) такие, что хотя бы один из указанного выше семейства многочленов имеет особенность порядка m в точке $(1, 1, 1)$.

Если многочлен f имеет особенность порядка m в точке $(1, 1, 1)$, его коэффициенты удовлетворяют набору линейных условий: сумма коэффициентов равна нулю, первые производные f в точке $(1, 1, 1)$ равны нулю и так далее. Иногда из этих условий следует, что один из коэффициентов многочлена равен нулю — и тогда такое множество A не подходит, так как мы разрешаем только ненулевые коэффициенты.

Таким образом, вопрос о существовании особой гиперповерхности, задающейся многочленом с мономами из A , сводится к вопросам зависимостей в некотором множестве линейных уравнений. Денис находит переформулировку этих зависимостей в терминах матроидов (допускающие множества оказываются зависимыми множествами матроида), а затем с помощью пакета Sage классифицирует минимальные по включению допускающие множества (то есть циклы матроида).

Аналогичные вопросы исследовались разными авторами в случае, когда A является подмножеством целых точек плоскости, и были получены оценки снизу на площадь выпуклой оболочки A через порядок m особенности, что позволяет получать оценки на степень кривой с несколькими особенностями. Ожидалось, что похожие оценки можно получить для трёхмерного A , и изучение небольших примеров должно было быть первым шагом этого проекта. К сожалению, даже небольшие трёхмерные примеры имеют существенно большую комбинаторную сложность, чем двумерные, и невозможно упрекать Дениса в том, что не получилось доказать новых интересных оценок в этом случае.

Вместе с тем, Денисом самостоятельно проделана теоретическая работа по осмыслению вопроса в терминах матроидов и большая работа по вычислению примеров (без пакета Sage руками это сделать невозможно). Вполне возможно, что эти частные результаты пригодятся при дальнейших исследованиях задачи. Считаю, что работа достойна оценки «хорошо».

05.06.2023

Научный руководитель
д.ф.-м.н., член-корр. РАН,
профессор СПбГУ

С.В. Иванов