Санкт-Петербургский государственный университет

ОСИПОВ Денис Вадимович

Выпускная квалификационная работа

Геометрическое описание множеств мономов, допускающих поверхность с особенностью данного порядка

Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2019

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Иванов Сергей Владимирович

Рецензент:
Ассистент-профессор,
Гуангдонг Технион — Израильский
Технологический Институт
PhD
Калинин Никита Сергеевич

Санкт-Петербург
2023 год

Содержание

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Пусть $\mathcal{A} \subset \{x^i y^j z^k \mid (i,j,k) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}\}$ — некоторое конечное множество мономов. Мы рассматриваем всевозможные многочлены с вещественными коэффициентами $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}$, состоящие только из мономов $\mathcal{A}$:

$$P(x,y,z) = \sum_{x^i y^j z^k \in \mathcal{A}} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Любой такой многочлен задает поверхность C уравнением $P(x,y,z) = 0$.

Мы исследуем вопрос о том, какие множества $\mathcal{A}$ *допускают* поверхность с особой точкой заданного порядка. Дадим строгое определение.

Определение 1. Мы называем $\mathcal{A}$ *множеством, допускающим особенность порядка* m, если существует нетривиальный набор коэффициентов α_{ijk}, такой что поверхность C, заданная уравнением $P(x,y,z) = 0$, имеет в некоторой точке особенность порядка m.

1.2 Формулировка в терминах однородной линейной системы

Путем параллельного переноса можно добиться перемещения особой точки в $(1,1,1)$. Мы будем по умолчанию считать, что особенность находится в $(1,1,1)$. Данная точка обладает удобным свойством, см. лемму 1.

В общем случае для построения поверхности с особенностью порядка m нужно решить систему линейных уравнений

$$D^\beta P(1,1,1) = 0, \quad 0 \leq |\beta| \leq m. \tag{1}$$

Здесь $\beta \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ — 3-индекс, а D^β — оператор дифференцирования β_1 раз по первой переменной, β_2 раз по второй переменной, и β_3 раз по третьей переменной. Порядок индекса, равный $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, обозначается через $|\beta|$.

Предложение 1. *В системе (1) $\hat{C}^m_4 = C^3_{m+3}$ уравнений, где через $\hat{C}^k_n = C^{n-1}_{k+n-1}$ обозначается количество сочетаний с повторениями из n по k.*

Доказательство. Ясно, что количество уравнений равно количеству 3-индексов порядка не выше m, то есть количеству решений неравенства

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq m$$

в неотрицательных целых числах. Любое такое решение этого неравенства взаимно однозначно соответствует неотрицательному целому решению уравнения

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + t = m$$

относительно $\beta_1, \beta_2, \beta_3, t$. В свою очередь такое уравнение имеет $\hat{C}^m_4$ решений по стандартному комбинаторному аргументу с шарами и перегородками. □

Пример 1. *Для $m = 2$ система состоит из $C_5^3 = 10$ уравнений:*

$$\sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} \alpha_{ijk} = 0, \quad \sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} i\alpha_{ijk} = 0, \quad \sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} j\alpha_{ijk} = 0, \quad \sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} k\alpha_{ijk} = 0,$$
$$\sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} i(i-1)\alpha_{ijk} = 0, \quad \sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} ij\alpha_{ijk} = 0, \quad \sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} ik\alpha_{ijk} = 0,$$
$$\sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} j(j-1)\alpha_{ijk} = 0, \quad \sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} jk\alpha_{ijk} = 0, \quad \sum_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}} k(k-1)\alpha_{ijk} = 0.$$

Преобразованиями Гаусса можно упростить систему (1), оставив в уравнениях только «главные» члены. Будем так же писать $\sum\limits_{\mathcal{A}}$ вместо $\sum\limits_{x^iy^jz^k\in\mathcal{A}}$ для краткости. Получим систему

$$\sum_{\mathcal{A}} \alpha_{ijk} i^a j^b k^c = 0, \quad 0 \le a+b+c \le m. \tag{2}$$

Матрица этой линейной системы на $|\mathcal{A}|$ переменных α_{ijk} имеет ширину $|\mathcal{A}|$ и высоту C_{m+3}^3. Имеет место тривиальное достаточное условие:

Предложение 2. *Если $|\mathcal{A}| > C_{m+3}^3$, то $\mathcal{A}$ допускающее множество.*

Доказательство. Если $|\mathcal{A}| > C_{m+3}^3$, то в однородной линейной системе (2) на переменные α_{ijk} больше переменных, чем уравнений. Поэтому у нее существует нетривиальное решение, и тем самым, можно задать поверхность. $\square$

Важно отметить, что нетривиальное решение у системы (2) гарантирует, что такая поверхность существует, но в ее уравнении могут быть задействованы не все мономы из $\mathcal{A}$. Действительно, если некоторый компонент α_{ijk} решения оказался нулевым, то соответствующий моном $x^iy^jz^k$ можно легко исключить из $\mathcal{A}$. Мы будем рассматривать только те допускающие множества $\mathcal{A}$, при которых коэффициенты α_{ijk} **все** ненулевые (то есть, для построения поверхности с особенностью используются все мономы в $\mathcal{A}$).

2 Геометрическая интерпретация множества $\mathcal{A}$

2.1 Примеры геометрических критериев

Достаточные условия на допускаемость[1] $\mathcal{A}$ можно формулировать геометрически. Для этого мы интерпретируем любой моном $x^i y^j z^k \in \mathcal{A}$ как точку (i,j,k) в $\mathbb{R}^3$. Естественно, все эти точки лежат в узлах решетки $\mathbb{Z}^3_{\geq 0}$. В качестве примера приведем следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть $|\mathcal{A}| = C^3_{m+3}$, и все точки множества $\mathcal{A}$ лежат на некоторой поверхности m-го порядка — то есть, удовлетворяют уравнению $U(i,j,k) = 0$, где U многочлен порядка m. Тогда $\mathcal{A}$ допускает особенность m-того порядка.*

Доказательство. Матрица системы на допускаемость $\mathcal{A}$ (2) по условию является квадратной. Построим для нее нетривиальное решение. Для этого рассмотрим

$$U(i,j,k) = \sum_{0 \leq a+b+c \leq m} \beta_{abc} i^a j^b k^c.$$

Умножим этот многочлен на α_{ijk} и просуммируем по $\mathcal{A}$. Так как на точках $\mathcal{A}$ многочлен U равен нулю, полученная сумма будет нулевая. Имеем

$$\sum_{\mathcal{A}} \sum_{0 \leq a+b+c \leq m} \alpha_{ijk} \beta_{abc} i^a j^b k^c = 0 \iff \sum_{0 \leq a+b+c \leq m} \beta_{abc} \sum_{\mathcal{A}} \alpha_{ijk} i^a j^b k^c = 0. \tag{3}$$

Пусть $\beta_{a_0 b_0 c_0}$ — любой ненулевой коэффициент U. Найдем нетривиальное решение α^*_{ijk} подсистемы (1), содержащей все уравнения, кроме $\sum_{\mathcal{A}} \alpha_{ijk} i^{a_0} j^{b_0} k^{c_0} = 0$. Это возможно, так как в такой подсистеме уравнений меньше, чем неизвестных α_{ijk}. Подставим его в (3), получим

$$\beta_{a_0 b_0 c_0} \sum_{\mathcal{A}} \alpha^*_{ijk} i^{a_0} j^{b_0} k^{c_0} = 0 \iff \sum_{\mathcal{A}} \alpha^*_{ijk} i^{a_0} j^{b_0} k^{c_0} = 0,$$

что означает, что α^*_{ijk} является нетривиальным решением всей системы (2). $\square$

Верно и обратное.

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{A} = \hat{C^m_4}$ допускает особенность m-того порядка. Тогда все точки множества $\mathcal{A}$ лежат на некоторой поверхности $U(i,j,k) = 0$ m-того порядка.*

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ допускает особенность, то у системы уравнений (2) существует нетривиальное решение. Тогда квадратная матрица этой системы вырождена. Определим многочлен $U(i,j,k)$ как в предыдущем доказательстве. Условие того, что он равен нулю на всех точках $\mathcal{A}$ — это система линейных однородных уравнений на коэффициенты β_{abc}:

$$\forall (i,j,k) \in \mathcal{A} \;\; U(i,j,k) = 0 \iff \forall (i,j,k) \in \mathcal{A} \sum_{0 \leq a+b+c \leq m} \beta_{abc} i^a j^b k^c = 0. \tag{4}$$

[1] Слово «допускаемость» в контексте данной работы означает свойство множества быть допускающим. Автор признает, что выбор данного слова грамматически неудачен, однако за неимением благозвучного существительного, образованного от действительного причастия «допускающий», вынужден использовать слово «допускаемость» как ближайшее по смыслу.

Сравнивая эту систему с (2), убеждаемся, что матрица нашей системы (4) и матрица (2) отличаются только транспонированием. Значит, матрица системы (4) вырождена, и у нее существует нетривиальное решение, которое и даст коэффициенты β_{abc} искомого многочлена $U(i,j,k)$. $\square$

Так как наша задача — найти *минимальные* допускающие множества, то мы также можем формулировать признаки в терминах «лишней точки». Например, так: если множество $\mathcal{A}$ допускает особенность порядка m, но при этом его можно накрыть m плоскостями, пропустив одну его точку, то такое множество не является минимальным: эту лишнюю точку можно убрать из $\mathcal{A}$.

2.2 Линейные преобразования сохраняют порядок особенности

Следующая лемма показывает, что для анализа множеств $\mathcal{A}$ можно применять линейные преобразования, тем самым, упрощая задачу.

Лемма 1 ([1], Lemma 1.17)**.** *Пусть* $\Psi\colon (x,y,z) \mapsto (x^{a_{11}}y^{a_{12}}z^{a_{13}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}z^{a_{23}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}z^{a_{33}})$ *— такое преобразование, что матрица* (a_{ij}) *невырождена. Тогда порядки особенности поверхностей* $\phi = 0$ *и* $\phi \circ \Psi = 0$ *в точке* $(1,1,1)$ *совпадают.*

Доказательство. Индукция по порядку особенности m.

База ($m = 0$). Если $\phi(1,1,1) = 0$, то $\phi(\Psi(1,1,1)) = \phi(1,1,1) = 0$.

Переход ($m \to m+1$).

Предположим, что утверждение доказано для особенностей порядка m.

Пусть сначала ϕ задает поверхность с особенностью порядка $m+1$. Покажем, что у $\phi\circ\Psi$ тоже особенность порядка $m+1$. Не уменьшая общности, достаточно доказать, что для любого мультииндекса β, $|\beta| = m$, выполнено

$$\frac{\partial}{\partial x} D^{\beta}(\phi \circ \Psi)\big|_{(1,1,1)} = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} D^{\beta}(\phi \circ \Psi) = D^{\beta}\left\langle \nabla\phi \circ \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right\rangle = \sum_{\gamma \le \beta} \frac{\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!}\left\langle D^{\gamma}(\nabla\phi\circ\Psi), \frac{\partial D^{\beta-\gamma}\Psi}{\partial x}\right\rangle. \tag{5}$$

Любой компонент $\nabla\phi$ задает поверхность с особенностью m-го порядка. Тогда компоненты $\nabla\phi\circ\Psi$ тоже задают поверхности с особенностью m-го порядка по предположению индукции. То есть, $D^{\gamma}(\nabla\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)} = 0$ при $|\gamma| \le m$, откуда имеем $\frac{\partial}{\partial x} D^{\beta}(\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)} = 0$.

Пусть теперь у $\phi\circ\Psi$ особенность порядка $m+1$. Покажем, что у ϕ особенность того же порядка. По предположению индукции у ϕ особенность порядка m. При подстановке $(1,1,1)$ в (5) получаем

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} D^{\beta}(\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)} = \left\langle D^{\beta}(\nabla\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)}, \frac{\partial\Psi}{\partial x}\big|_{(1,1,1)}\right\rangle,$$

так как все $D^\gamma(\nabla\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)}$ равны нулю при $\gamma<\beta$. Действительно, у ϕ особенность порядка m, у $\nabla\phi$ порядок $m-1$, и по предположению индукции порядок особенности $\nabla\phi\circ\Psi$ не меньше $m-1$. Получаем

$$0=\left\langle D^\beta(\nabla\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)},\frac{\partial\Psi}{\partial x}\big|_{(1,1,1)}\right\rangle.$$

Повторим это рассуждение для переменных y, z, и получим систему:

$$\begin{cases}0 &= \left\langle D^\beta(\nabla\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)},\frac{\partial\Psi}{\partial x}\big|_{(1,1,1)}\right\rangle\\ 0 &= \left\langle D^\beta(\nabla\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)},\frac{\partial\Psi}{\partial y}\big|_{(1,1,1)}\right\rangle\\ 0 &= \left\langle D^\beta(\nabla\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)},\frac{\partial\Psi}{\partial z}\big|_{(1,1,1)}\right\rangle\end{cases}\tag{6}$$

Нетрудно проверить, что матрица $\begin{pmatrix}\frac{\partial\Psi}{\partial x} & \frac{\partial\Psi}{\partial y} & \frac{\partial\Psi}{\partial z}\end{pmatrix}\Big|_{(1,1,1)}$ равна матрице (a_{ij}), и поэтому правые векторы в скалярных произведениях в (6) линейно независимые. Таким образом, $D^\beta(\nabla\phi\circ\Psi)\big|_{(1,1,1)}=0$. Тогда у трех поверхностей $\nabla\phi\circ\Psi$ особенность m-того порядка. По предположению индукции у поверхностей $\nabla\phi$ тоже особенность m-того порядка, а тогда у ϕ — $(m+1)$-ый порядок особенности. □

Замечание. В оригинале [1] лемма была предъявлена для случая, когда матрица a_{ij} имела единичный определитель. В этом случае обратная матрица также целочисленная. Однако если требовать просто невырожденность, как в этой лемме, то обратное отображение Ψ^{-1} может быть многозначным (и конечно, может выйти за класс многочленов).

3 Матроид недопускающих множеств

3.1 Некоторые факты из теории матроидов

Определение 2. Матроид — пара (X, I), где X — множество, называемое *носителем матроида*, а $I \subset 2^X$ — семейство множеств, называемых *независимыми*. На семейство I налагаются следующие условия:

1. $\varnothing \in I$,
2. Если $A \in I, B \subset A$, то $B \in I$,
3. Если $A, B \in I, |A| > |B|$, то существует такой $x \in A \setminus B$, что $B \cup \{x\} \in I$.

Введем несколько определений из теории матроидов.

Определение 3. *Зависимое множество* матроида — любое множество, не являющееся независимым.

База матроида — любое максимальное по включению независимое множество.

Цикл матроида — любое минимальное по включению зависимое множество.

Напомним также следующие общеизвестные теоремы теории матроидов.

Лемма 2 (О равномощности баз)**.** *Любые две базы матроида равномощны.*

3.2 Матроид недопускающих множеств

Недопускающие множества можно исследовать методами теории матроидов. Введем следующее определение.

Определение 4 (Матроид недопускающих множеств)**.** Зафиксируем порядок особенности m. Рассмотрим множество $\mathcal{M}$, состоящее из каких-то мономов от x, y, z. На этом множестве можно задать матроид, объявив независимыми все **не**допускающие множества $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

Следующее утверждение показывает корректность данного определения.

Предложение 5. *Семейство недопускающих множеств действительно образует матроид.*

Доказательство. Первые два свойства выполняются тривиально. Докажем третье свойство.

Допускаемость $\mathcal{A}$ зависит от наличия нетривиальных решений системы (2), и следовательно, от ранга ее матрицы.

Любому моному $x^i y^j z^k \in \mathcal{A}$ соответствует столбец из этой матрицы. Проясним это соответствие на примере: пусть $\mathcal{A} = \{x, yz, xz^2, y^2z, x^3z\}$, и $m = 1$. Тогда система (2) записывается как

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{100} \\ \alpha_{011} \\ \alpha_{102} \\ \alpha_{021} \\ \alpha_{301} \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{100} \\ \alpha_{011} \\ \alpha_{102} \\ \alpha_{021} \\ \alpha_{301} \end{pmatrix} = 0.$$

Индексы у переменных α_{ijk} соответствуют степеням x, y, z монома: например, моному $xz^2 = x^1y^0z^2$ соответствует переменная α_{102}. А i_*, например, это степени икса у мономов из $\mathcal{A}$. Теперь совершенно ясно, что каждый моном порождает столбец в матрице системы.

Вернемся к доказательству. Отождествим множества мономов $\mathcal{A}$ с матрицами (2), которые они порождают. Если $\mathcal{A} \in I$, то $\mathcal{A}$ не допускающая, и тогда у системы (2) не должно быть нетривиальных решений. Это значит, что столбцы $\mathcal{A}$ независимы.

Обозначим за $L(\mathcal{A})$ линейную оболочку столбцов матрицы $\mathcal{A} \in I$. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in I$, тогда столбцы каждой из матриц линейно независимые. Так как $|\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$, то $\dim L(\mathcal{A}) > \dim L(\mathcal{B})$, и поэтому существует столбец v в матрице $\mathcal{B}$ такой, что $v \notin L(\mathcal{A})$. Значит, v не столбец $\mathcal{A}$. По определению линейной оболочки $\mathcal{B} \cup \{v\}$ будет независимым множеством. $\square$

Переформулируем определения теории матроидов для нашей ситуации.

Предложение 6.

1. *Независимое множество матроида — любое недопускающее множество.*
2. *Зависимое множество матроида — любое допускающее множество.*
3. *База матроида — любое максимальное недопускаюшее множество.*
4. *Цикл матроида — любое минимальное допускающее множество.*

Доказательство. По определению. $\square$

3.3 Простейшие утверждения

Отметим, что критерий базы в таком матроиде формулируется очень просто и следует из предложений 3 и 4, а также теоремы о равномощности баз.

Предложение 7 (Критерий базы)**.** *Зафиксируем порядок особенности m. $\mathcal{A}$ — база матроида недопускающих множеств, если и только если $|\mathcal{A}| = C^3_{m+3}$, и точки $\mathcal{A}$ не лежат на поверхности m-того порядка.*

С циклами несколько сложнее: сразу на них можно дать лишь оценку сверху.

Предложение 8. *Зафиксируем порядок особенности m.*
Если $\mathcal{A}$ — цикл, то $|\mathcal{A}| \leq C^3_{m+3} + 1$.

Доказательство. Из критерия базы заключаем, что любое множество мощности большей C^3_{m+3} будет зависимым. Поэтому если $|\mathcal{A}| > C^3_{m+3} + 1$, то из $\mathcal{A}$ можно выкинуть любой элемент, и $\mathcal{A}$ останется зависимым, а значит, оно не было циклом. $\square$

3.4 Примеры базы и цикла

Пример 2. *Зафиксируем порядок особенности* $m = 1$. *Рассмотрим матроид недопускающих множеств с носителем* $\{x^i y^j z^k \mid 0 \le i, j, k \le 2\}$, *состоящим из 27 мономов, в которых степени переменных не превосходят 2.*

Множество $\{xz, y, x^2y^2, x^2y^2z^2\}$ *является базой этого матроида. Действительно, матрица системы (2) на допускаемость этого множества равна*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Она невырождена, поэтому система не допускает нетривиальных решений, что доказывает независимость. Максимальность этого множества очевидна, так как добавление любого монома в него приведет к появлению пятой переменной, и тогда у системы найдется нетривиальное решение.

Пример 3. *В том же матроиде рассмотрим множество* $\{yz^2, y^2z, x^2z, xy^2\}$.

Это цикл матроида. Действительно, матрица системы (2) равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Сумма последних трех ее строк пропорциональна первой строке, поэтому нетривиальные решения есть, и множество допускающее. Перебором можно убедиться, что при удалении любого монома из множества нетривиальные решения перестают существовать.

4 Исследование матроида с помощью пакета SageMath

Специальные программные пакеты, такие как SageMath, предоставляют средства для матроидных вычислений. С помощью класса Matroid можно задать конечный матроид (в том числе множеством баз или множеством циклов), проверить его корректность, вычислить множества циклов и баз, построить стандартные матроидные конструкции (двойственный матроид, произведение матроидов, и т.д.). В рамках ВКР были построены примеры матроидов на носителях — конечных множествах мономов, а затем были классифицированы их циклы.

Перед тем, как объявить результаты исследований, сделаем

Замечание. Согласно лемме 1, при применении линейного оператора к $\mathcal{A}$ порядок особенности не меняется. Также нетрудно понять, что если $\mathcal{A}$ лежит на некоторой поверхности, то после преобразования линейным оператором все точки $\mathcal{A}$ все еще будут лежать на некоторой поверхности того же порядка.

По этой причине классификация циклов дается с точностью до перестановки переменных, так как перестановка — частный случай линейного преобразования.

4.1 Порядок $m = 1$, носитель куб $\{1, x, y, z, xy, yz, xz, xyz\}$

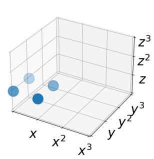
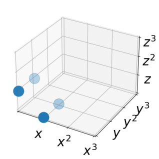
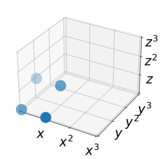
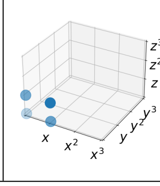
Пример 4. *Пусть порядок особенности $m = 1$. Возьмем носитель из восьми мономов $\{x^i y^j z^k \mid 0 \leq i, j, k \leq 1\}$.*

Классификацию множеств в этом матроиде дает следующая теорема.

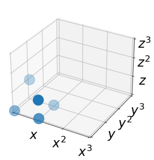
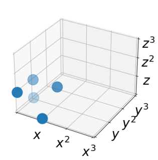
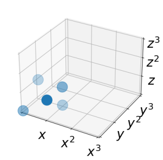
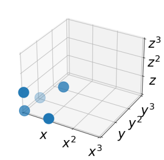
Теорема 1. *Любой цикл в матроиде из примера 4 относится к одной из следующих категорий:*

- *цикл длины 4, мономы которого образуют прямоугольник,*
- *цикл длины 5, мономы которого образуют прямоугольный треугольник и параллельный ему отрезок.*

Доказательство. Компьютерный перебор показывает, что циклов длины 4 всего четыре, и все из них представляют из себя прямоугольники.

$\{z, yz, xz, xyz\}$	$\{z, yz, x, xy\}$	$\{1, yz, x, xyz\}$	$\{1, z, x, xz\}$
			

Циклов длины 5 тоже четыре, и они образуют прямоугольный треугольник и параллельный ему отрезок.

$\{1, yz, x, xz, xy\}$	$\{z, y, yz, x, xyz\}$	$\{1, yz, xz, xy, xyz\}$	$\{1, z, y, x, xyz\}$
			

□

4.2 Порядок $m = 2$, носитель мономы третьей степени

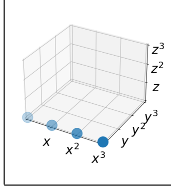
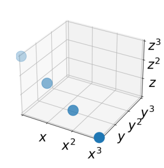
Пример 5. *Зафиксируем порядок особенности $m = 2$. Рассмотрим матроид с носителем $\{x^i y^j z^k \mid 0 \leq i + j + k \leq 3\}$, состоящим из мономов степени не выше 3.*

С помощью пакета SageMath было установлено, что этот матроид содержит циклы мощностью k, где $k \in \{4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, а также компьютерным перебором была доказана следующая

Теорема 2. *Любой цикл в матроиде из примера 5 относится к одной из следующих категорий:*

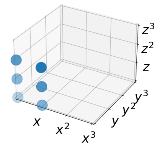
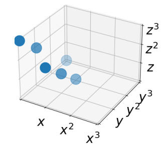
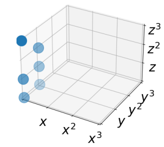
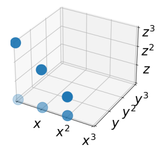
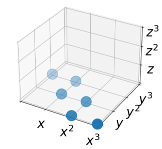
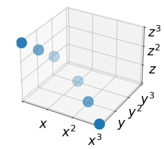
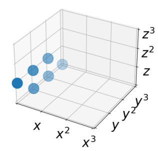
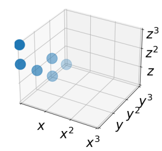
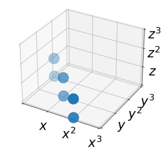
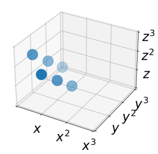
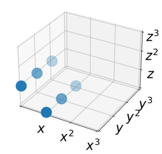
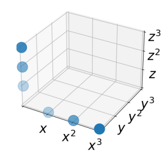
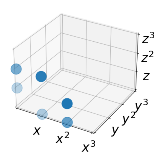
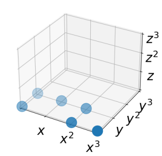
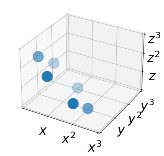
- *цикл длины 4, мономы которого расположены на одной прямой, и все не содержат хотя бы одну из переменных x, y, z;*
- *цикл длины 6, мономы которого расположены на двух прямых;*
- *цикл длины 6, мономы которого образуют два прямоугольных треугольника в одной плоскости;*
- *цикл длины 7, мономы которого расположены на трех прямых;*
- *цикл длины 8, 9, или 10, мономы которого расположены в объединении двух плоскостей;*
- *цикл длины 10, мономы которого расположены на однополостном гиперболоиде,*
- *цикл длины 11, мономы которого не укладываются на квадрику.*

Доказательство. 1. Перечислим все циклы длины 4.

$\{1, x, x^2, x^3\}$	$\{z^3, xz^2, x^2z, x^3\}$
	

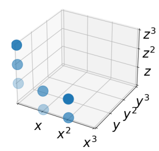
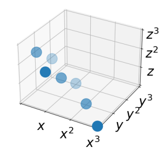
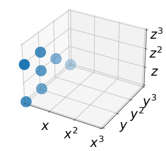
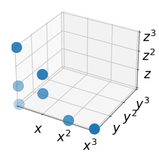
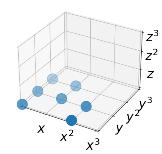
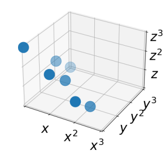
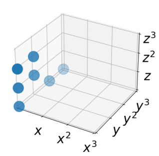
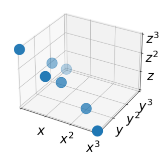
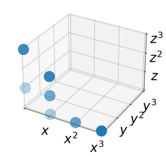
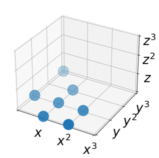
Каждый из них действительно лежит на прямой.

2. Перечислим все циклы длины 6.

$\{1, z, z^2, x, xz, xz^2\}$ 	$\{z^3, yz^2, y^3, xz^2, xyz, xy^2\}$ 	$\{1, z, z^3, y, yz, yz^2\}$ 
$\{1, z^3, x, xz^2, x^2, x^2z\}$ 	$\{y^2, xy, xy^2, x^2, x^2y, x^3\}$ 	$\{z^3, yz^2, y^2z, xy^2, x^2y, x^3\}$ 
$\{z, y, yz, y^2, y^2z, y^3\}$ 	$\{z^2, z^3, yz, y^2, y^2z, y^3\}$ 	$\{y^2, y^2z, xy, xyz, x^2, x^2z\}$ 
$\{yz^2, y^2z, y^3, xz^2, xyz, xy^2\}$ 	$\{z, yz, y^2z, x, xy, xy^2\}$ 	$\{z, z^2, z^3, x, x^2, x^3\}$ 
$(*)\{z, z^2, x, xz^2, x^2, x^2z\}$ 	$\{1, y, xy, x^2, x^2y, x^3\}$ 	$(*)\{yz^2, y^2z, xz^2, xy^2, x^2z, x^2y\}$ 

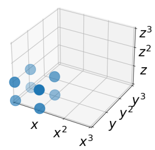
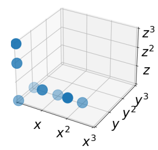
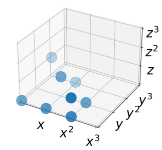
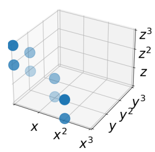
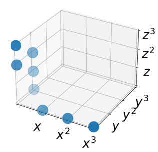
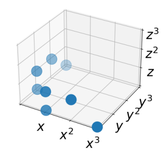
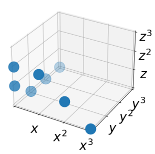
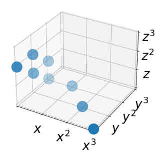
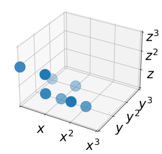
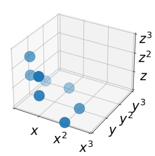
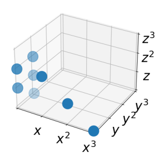
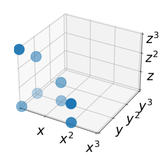
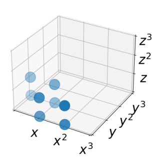
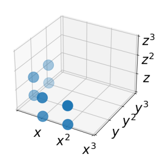
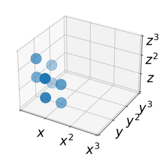
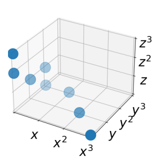
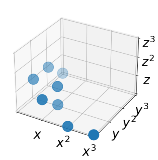
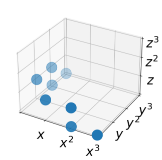
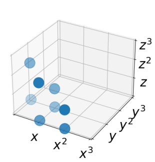
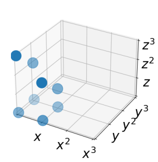
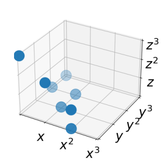
Получили, что все циклы длины 6, кроме циклов, отмеченных (*), лежат на объединении двух прямых. Упомянутые два цикла каждый образует два прямоугольных треугольника, что наглядно очевидно.

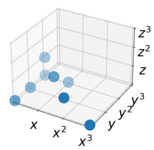
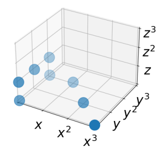
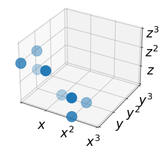
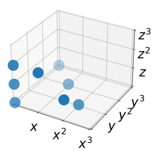
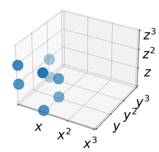
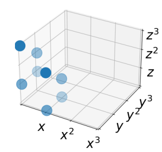
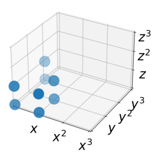
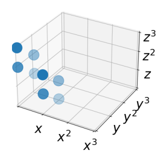
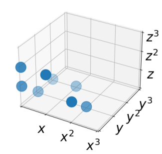
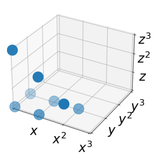
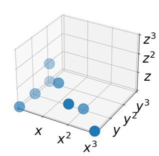
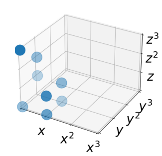
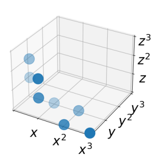
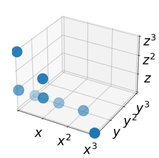
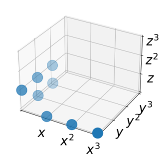
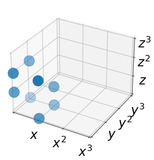
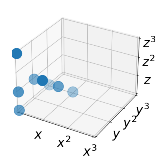
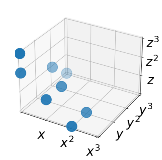
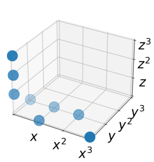
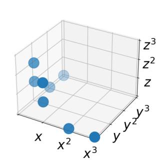
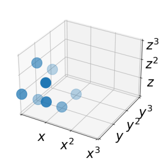
3. Перечислим все циклы длины 7.

$\{z, z^2, z^3, x, xz, x^2, x^2z\}$ 	$\{yz^2, y^2z, xz^2, xyz, xy^2, x^2y, x^3\}$ 	$\{1, z^2, y, yz, yz^2, y^2z, y^3\}$ 
$\{1, z, z^3, xz, xz^2, x^2, x^3\}$ 	$\{1, y, y^2, xy, xy^2, x^2, x^2y\}$ 	$\{z^3, y^2z, y^3, xz^2, xyz, x^2z, x^2y\}$ 
$\{1, z, z^2, yz, yz^2, y^2, y^3\}$ 	$\{z^3, y^2z, y^3, xz^2, xyz, x^2y, x^3\}$ 	$\{z, z^3, x, xz, xz^2, x^2, x^3\}$ 
$\{y, y^3, x, xy, xy^2, x^2, x^2y\}$ 		

Получили, что каждый цикл длины 7 лежит в объединении трех прямых.

4. Перечислим все циклы длины 8.

$\{1, z, y, yz, x, xz, xy, xyz\}$ 	$\{1, z^2, z^3, y, xz, xy, x^2z, x^2y\}$ 	$\{1, y^2z, x, xyz, xy^2, x^2, x^2z, x^2y\}$ 
$\{z^2, z^3, yz, yz^2, xy, xyz, x^2, x^2z\}$ 	$\{z^2, z^3, y, yz, yz^2, x, x^2, x^3\}$ 	$\{y, yz, y^2z, y^3, x, xz, x^2z, x^3\}$ 
$\{z, z^2, y, y^2, y^3, xz^2, x^2z, x^3\}$ 	$\{z^2, yz, yz^2, y^2, y^2z, xy^2, x^2y, x^3\}$ 	$\{z^2, y^2, xz, xz^2, xy, xy^2, x^2z, x^2y\}$ 
$\{yz, yz^2, y^2, xz, xz^2, xy^2, x^2, x^2y\}$ 	$\{z, z^2, y, yz, yz^2, xz^2, x^2z, x^3\}$ 	$\{1, z^3, y, yz^2, xy, xyz, x^2, x^2z\}$ 
$\{y, yz, x, xz, xy, xyz, x^2, x^2z\}$ 	$\{y, yz, y^2, y^2z, x, xz, x^2, x^2z\}$ 	$\{yz, yz^2, y^2, y^2z, xz, xz^2, xy, xyz\}$ 
$\{z^2, z^3, yz, y^2, y^2z, xy^2, x^2y, x^3\}$ 	$\{yz, y^2z, y^3, xz, xy, xyz, x^2, x^3\}$ 	$\{yz, y^2, y^2z, y^3, xz, x^2, x^2z, x^3\}$ 
$\{y, yz^2, x, xz^2, xy, xyz, x^2, x^2z\}$ 	$\{1, z^3, y, yz^2, x, xz^2, xy, xyz\}$ 	$\{z^3, y^2, y^3, xz^2, xy, xy^2, x^2, x^2z\}$ 

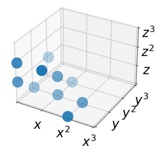
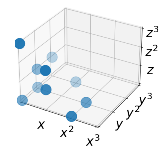
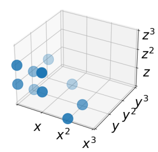
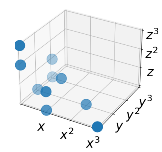
$\{1, y, y^2, y^2z, xyz, xy^2, x^2z, x^3\}$ 	$\{1, z, yz, y^2, y^2z, xy^2, x^2y, x^3\}$ 	$\{z^2, yz, yz^2, xz^2, xy, x^2, x^2z, x^2y\}$ 
$\{1, z, z^2, y^3, xz^2, xy^2, x^2z, x^2y\}$ 	$\{z, z^2, y^2, y^2z, x, xz^2, xy, xyz\}$ 	$\{z, z^3, yz, yz^2, x, xz^2, xy, xyz\}$ 
$\{1, z, y^2, y^2z, x, xz, xy, xyz\}$ 	$\{z^2, z^3, yz, yz^2, xz, xz^2, xy, xyz\}$ 	$\{z, z^2, y, y^2, xz^2, xy^2, x^2z, x^2y\}$ 
$\{1, z^3, y, x, xz^2, xy, x^2z, x^2y\}$ 	$\{1, y, y^2, y^2z, xyz, x^2z, x^2y, x^3\}$ 	$\{1, z^3, yz, yz^2, x, xz, xy, xyz\}$ 
$\{yz, yz^2, xz, xz^2, xy, x^2, x^2y, x^3\}$ 	$\{z, z^3, y, xz, xz^2, xy, x^2y, x^3\}$ 	$\{z, y, yz, y^2, y^2z, x, x^2, x^3\}$ 
$\{z, z^2, y, yz^2, x, xz^2, xy, xyz\}$ 	$\{1, z, z^3, yz, y^2, xz^2, xyz, xy^2\}$ 	$\{z^2, z^3, y^2z, y^3, xz, xyz, x^2, x^2y\}$ 
$\{z, z^2, z^3, y, x, xy, x^2y, x^3\}$ 	$\{yz, yz^2, y^2, y^3, xz, xz^2, x^2, x^3\}$ 	$\{z, y, yz^2, y^2z, xz, xz^2, xy, xy^2\}$ 

Получаем, что все циклы длины 8 действительно лежат в объединении двух плоскостей.

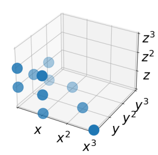
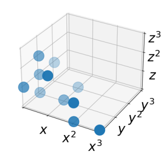
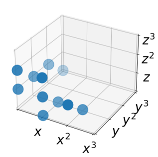
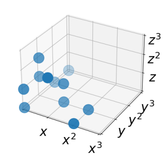
5. Циклов длины 9 в этом матроиде всего 148. Перебором установлено, что каждый из них лежит в объединении двух плоскостей.

6. Циклов длины 10 в этом матроиде всего 261. Из них 4 не лежит в объединении

двух плоскостей. В таблице предъявлены эти 4 цикла, а также поверхности в координатах (i, j, k), на которых они лежат (каждому моному $x^i y^j z^k$ соответствует точка (i, j, k), см. раздел 2.1).

$\{z, z^2, y, y^2z, xz^2, xy, xyz, xy^2, x^2, x^2y\}$  $4 - 2i - 5j - 6k + j^2 + 2k^2 + 2ij + 3jk + ik = 0$ однополостный гиперболоид	$\{1, z^3, y, yz, y^2z, xz, xz^2, xy^2, x^2, x^2y\}$  $4i + j - 3k - 2i^2 - j^2 + k^2 + 2jk = 0$ однополостный гиперболоид
$\{z, z^2, y, yz, y^2z, xz, xz^2, xy^2, x^2, x^2y\}$  $2 + i - 2j - 3k - i^2 + k^2 + ij + 2jk = 0$ однополостный гиперболоид	$\{z^2, z^3, y, y^2, y^2z, x, xz, xyz, x^2y, x^3\}$  $6 - 8i - 9j - 5k + 2i^2 + 3j^2 + k^2 + 4ij + 2jk + 4ik = 0$ однополостный гиперболоид

7. Перебором было доказано, что ни один из 188 циклов длины 11 не лежит на квадрике. Приведем несколько из этих циклов:

$\{z, z^2, yz, y^2, y^2z, x, xz, xz^2, xy^2, x^2y, x^3\}$ 	$\{z, y, yz, yz^2, y^2z, xz^2, xy, xy^2, x^2, x^2z, x^3\}$ 
$\{z, z^2, yz, y^2z, y^3, x, xz, xz^2, xy, x^2z, x^2y\}$ 	$\{1, z, yz, yz^2, y^2, y^3, xz^2, xy, xyz, x^2, x^2y\}$ 

□

Замечание. Несколько неожиданным оказался тот факт, что почти все циклы немаксимальной длины возможно поместить на одну или две плоскости, однако же из циклов максимальной длины ни один не укладывается на квадрику (тем более на две плоскости).

Замечание (Об ускорении вычислений)**.** В ходе тестирования программного кода для переборного доказательства этой теоремы было обнаружено, что подавляющее большинство циклов длины меньшей, чем 11, лежит не просто на двух плоскостях, а так, что одна из этих плоскостей параллельна или оси абсцисс, или оси ординат, или оси аппликат. Предварительная проверка, что цикл имеет именно такой вид, будучи выполняемой перед «честной» проверкой на две плоскости, значительно ускорила процесс перебора.

Список литературы

[1] *Kalinin N.* The Newton polygon of a planar singular curve and its subdivision // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2016. №137. p.226-256.

[2] Matroid Theory // SageMath 9.8 Reference Manual [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://doc.sagemath.org/html/en/reference/matroids/index.html (дата обращения: 27.05.2023).