

Отзыв научного руководителя
на выпускную квалификационную работу
«Асимптотика числа триангуляций проективной
плоскости»
студентки 4 курса бакалавриата 01.03.01 Математика
Ханиной Марии Владимировны

В работе изучаются выпуклые триангуляции вещественной проективной плоскости. В первой части рассмотрены триангуляции, где почти все вершины имеют степень 6, кроме двух вершин степени 5 и одной вершины степени 2. Целью этого исследования было получение асимптотической оценки на число таких триангуляций с не более чем n треугольниками, эта задача полностью решена.

Триангуляция проективной плоскости поднимается до центрально-симметричной триангуляции сферы, и, если каждую грань триангуляции интерпретировать как правильный треугольник со стороной 1, задаёт на сфере плоскую метрику с коническими особенностями. Эта метрика, по теореме Александрова, может быть реализована как внутренняя метрика поверхности центрально симметричного октаэдра.

Пространство центрально-симметричных октаэдров четырёхмерно и имеет удобную параметризацию, поэтому вопрос о количестве триангуляций сводится к подсчёту точек некоторой решётки в подмножестве пространства параметров октаэдров. Такое число точек решётки примерно равно гиперболическому объёму другого подмножества, и этот последний объём можно явно подсчитать через функцию Лобачевского и дзета-функцию решётки. В процессе выполнения вышеописанного плана возникают разнообразные технические трудности, которые Мария блестяще преодолевает.

Вторая часть работы посвящена триангуляциям вещественной проективной плоскости с четырьмя дефектными вершинами (все вершины триангуляций имеют степень 6, кроме четырёх вершин, имеющих степень 5,5,4,4 соответственно). Такие триангуляции описываются уже центрально-симметричными восьмивершинниками в трёхмерном евклидовом пространстве. Пространство таких восьмивершинников уже не имеет такой хорошей параметризации, как пространство симметричных октаэдров, но имеется некоторая процедура “отрезания вершины”, которая из одного центрально симметричного октаэдра позволяет построить однопараметрическое семейство таких восьмивершинников. Это позволяет описать триангуляции с не более чем n треугольниками как точки решётки внутри некоторого подмножества параметров, но явное описание этого подмножества уже не даёт возможности точно посчитать его объём. Мария, однако, нашла верхнюю и нижнюю оценки на число та-

ких триангуляций, асимптотически одного порядка, хотя и с разными константами.

Уровень работы весьма высок для студента бакалавриата. Результат даже первой части заслуживает публикации, а работа в целом, особенно если довести вторую часть до точных оценок, может стать и основой диссертации.

Работа выполнена Марией Ханиной самостоятельно. Считаю, что она безусловно заслуживает оценки «отлично».

05.06.2023

Научный руководитель
д.ф.-м.н., член-корр. РАН,
профессор СПбГУ

С.В. Иванов