

Санкт-Петербургский государственный университет

**ХАНИНА Мария Владимировна**

**Выпускная квалификационная работа**

**Асимптотика числа триангуляций проективной плоскости**

Уровень образования:

Направление 01.03.01 «Математика»

Основная образовательная программа СВ.5000.2019 «Математика»

Научный руководитель:

Профессор,

Факультет математики

и компьютерных наук СПбГУ,

Иванов Сергей Владимирович

Рецензент:

Ассистент-профессор,

Гуангдонг Технион –

Израильский Технологический Институт,

Калинин Никита Сергеевич

Санкт-Петербург

2023

# Оглавление

1	Введение . . . . .	3
2	Триангуляции с дефектами 1, 1 и 4 . . . . .	4
2.1	Поднятие триангуляции на сферу . . . . .	4
2.2	Развёртка октаэдра на плоскость . . . . .	5
2.3	Подсчёт асимптотики . . . . .	8
3	Триангуляции с дефектами 1, 1, 2, 2 . . . . .	11
<b>Литература</b>		<b>17</b>

# 1 Введение

Рассмотрим граф на проективной плоскости, рёбра которого не имеют внутренних точек пересечения, а все грани состоят из трёх рёбер. Такой граф будем называть *триангуляцией* проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ . Имея триангуляцию, можно задать метрику на  $\mathbb{R}P^2$ : внутренность каждой грани гомеоморфно отображается в правильный треугольник на плоскости со стороной 1, и метрика внутри грани индуцируется из этого отображения, а расстояние между точками из разных граней считается как инфимум длин кривых, их соединяющих, причём длина кривой считается как сумма длин её звеньев, где звено — подмножество образа кривой, полностью лежащее в какой-то из граней. С такой метрикой окрестность каждой точки, участвующей в 6 треугольниках, окажется плоской. Это наблюдение мотивирует ввести следующее определение:

**Определение.** *Дефектом вершины*, участвующей в  $k$  треугольниках, называется число  $6 - k$ .

В данной работе изучаются *выпуклые* триангуляции, то есть те, у которых дефект при каждой вершине неотрицателен. Вершины с ненулевым дефектом будем называть *дефектными*. Поднятие триангуляции на сферу индуцирует на ней метрику, и по теореме Александрова [1] эта метрика реализуется на некотором выпуклом многограннике, который окажется центрально-симметричным. Определённым образом выберем *маркировку* триангуляции: порядок на её дефектных вершинах и набор геодезических, соединяющих дефектные вершины.

**Определение.** Две маркированные триангуляции *изометричны*, если существуют биекции на множестве их вершин, рёбер и граней, сохраняющие отношения инцидентности, а также сохраняющие маркировку.

Основная задача — оценить число  $f(n)$  классов изометрий маркированных триангуляций из не более, чем  $n$  треугольников, с данным набором дефектов вершин. Поскольку эйлерова характеристика проективной плоскости  $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ , то сумма всех дефектов у любой триангуляции равна 6. Следовательно, возможные наборы дефектов для триангуляций с тремя дефектными вершинами —  $\{2, 2, 2\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$  и  $\{1, 1, 4\}$ . Случай с тремя равными дефектами был разобран в работе [2]. В этой же работе рассматриваются случаи дефектов  $\{1, 1, 4\}$  и  $\{1, 1, 2, 2\}$ . Для случая  $\{1, 1, 4\}$  мы докажем следующий результат:

**Теорема.** Количество  $f_3(n)$  классов изометрии маркированных триангуляций проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  с тремя дефектными вершинами с дефектами 1, 1, 4, состоящих из не более, чем  $n$  треугольников, удовлетворяет соотношению

$$f_3(n) = Cn^2 + O(n^{\frac{3}{2}}),$$

где

$$C = \frac{3}{40\sqrt{3}} \left( \Lambda\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \zeta^{-1}(4)\zeta(\text{Eis}, 2).$$

В формулировке теоремы используются следующие обозначения:

1. Функция Лобачевского  $\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|2 \sin x| dx$ ;

2. Решётка Эйзенштейна  $Eis = \mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}$ , где  $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;
3. Дзета-функция для решёток  $\zeta(L, s) = \sum_{\gamma \in L \setminus \{0\}} \langle \gamma, \gamma \rangle^s$ ;
4. Дзета-функция Римана  $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}$ .

Для количества триангуляций с дефектами  $\{1, 1, 2, 2\}$  получены оценки снизу и сверху, обе кубические по количеству треугольников.

## 2 Триангуляции с дефектами 1, 1 и 4

### 2.1 Поднятие триангуляции на сферу

Пусть  $T$  — триангуляция  $\mathbb{R}P^2$ , ненулевые дефекты которой —  $\{1, 1, 4\}$ . Ей соответствует триангуляция сферы  $\tilde{T}$ , образ которой при универсальном накрытии  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2 \rightarrow T$ . По теореме Александрова [1],  $\tilde{T}$  — развёртка для многогранника, а точнее найдётся и единственный с точностью до поворота и симметрии октаэдр, триангулированный равносторонними единичными треугольниками, и триангуляция на октаэдре изоморфна триангуляции на сфере. В том числе, угол при двух его вершинах  $\frac{2\pi}{3}$ , при 4 других —  $\frac{5\pi}{3}$ . Мы увидим, что этот восьмигранник центрально-симметричный. Выберем одну из 4 пар его противоположных граней, проекция их рёбер обратно на проективную плоскость — три геодезические, соединяющие каждая свою пару дефектных вершин и образующие на  $\mathbb{R}P^2$  треугольник  $\Delta$ . *Маркированной триангуляцией  $\mathbb{R}P^2$  с дефектами  $\{1, 1, 4\}$*  будем называть четвёрку  $(T, \Delta, A, B)$ , где  $A, B$  — метки двух вершин с дефектом 1. Две маркированные триангуляции  $(T_1, \Delta_1, A_1, B_1)$  и  $(T_2, \Delta_2, A_2, B_2)$  *изометричны*, если существует биекция  $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ , переводящая вершины, рёбра и грани  $T_1$  в вершины, рёбра и грани  $T_2$  соответственно, сохраняющая отношения инцидентности, образ при этой биекции треугольника  $\Delta_1$  — это  $\Delta_2$ , образ  $A_1$  —  $A_2$ . Понятно, что обладающая такими свойствами биекция переводит  $B_1$  в  $B_2$  и вершину с дефектом 4 в вершину с дефектом 4.

Возьмём произвольную маркированную триангуляцию  $(T, \Delta, A, B)$ , состоящую из не более, чем  $n$  треугольников. Поднимем её на сферу, получим центрально-симметричную триангуляцию  $\tilde{T}$  на сфере, задающую метрику на ней, и рассмотрим изометричный ей триангулированный многогранник. Покажем, что он центрально-симметричный.

Пусть  $g$  — изоморфизм триангуляций сферы и октаэдра, а  $f: S^2 \rightarrow S^2, f(x) = -x$  — центральная симметрия сферы. Понятно, что  $f|_{\tilde{T}}$  — автоморфизм  $\tilde{T}$ . Тогда  $h := gfg^{-1}$  — автоморфизм триангуляции октаэдра (и, в том числе, изометрия октаэдра на себя), причём  $f$  не имеет неподвижных точек и  $f^2 = \text{id}$ , а значит то же верно и про  $h$ . Обобщённая теорема Коши о многогранниках, сформулированная Александровым в [1], утверждает, что изометрию замкнутого выпуклого многогранника можно осуществить движением или движением и отражением пространства  $\mathbb{R}^3$ . При этом, поворот относительно прямой, пересекающей многогранник, оставляет неподвижными точки пересечения прямой и многогранника, а поворот относительно прямой, не пересекающей многогранник, не оставляет его на месте. Аналогично изометрию многогранника на себя без неподвижных точек не может реализовать зеркальная симметрия. Также очевидно не подходят перенос и композиция симметрии или поворота с переносом. Значит, единственная изометрия пространства  $\tilde{h}$ , сужением которой на многогранник может быть  $h$ , — это композиция поворота вокруг

некоторой прямой и отражения относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота. Поскольку  $h^2 = \text{id}$ , то  $\tilde{h}$  совершает поворот на угол  $\pi$ , то есть  $\tilde{h}$  — центральная симметрия. Мы доказали, что октаэдр центрально-симметричен.

Маркированной триангуляции  $(T, \Delta, A, B)$ , состоящей из не более, чем  $n$  треугольников, мы сопоставили центрально-симметричный восьмигранник, триангулированный не более чем  $2n$  треугольниками, на котором отметим две противоположные грани  $\Delta_1, \Delta_2$  — прообразы  $\Delta$  при накрытии. Две вершины с дефектом 4 промаркируем  $O$  и  $O'$ . Прообразы  $A$  при накрытии назовём  $A, A'$ , прообразы  $B$  —  $B$  и  $B'$  так, что с внешней стороны октаэдра на грани  $OAB$  вершины  $O, A, B$  упорядочены против часовой стрелки. Такой способ присвоить метки дефектным вершинам назовём *маркировкой триангуляции сферы*.

Обратно, пусть нам дана маркированная центрально-симметричная триангуляция  $S^2$  с вершинами  $O, A, B, O', A', B'$ . Накрытие сферой проективной плоскости индуцирует триангуляцию  $\mathbb{R}P^2$ , возьмём в качестве треугольника  $\Delta$  образ  $OAB$ , в качестве  $A$  и  $B$  — образы  $A$  и  $B$  при накрытии. Так мы получим маркированную триангуляцию  $\mathbb{R}P^2$ .

Итого, мы построили биекцию между маркированными триангуляциями  $\mathbb{R}P^2$  с дефектами  $(1,1,4)$ , состоящими из не более чем  $n$  треугольников, и центрально-симметричными маркированными триангуляциями восьмигранников с суммами углов при 2 вершинах по  $\frac{2\pi}{3}$  и при 4 вершинах по  $\frac{5\pi}{3}$ , состоящими из не более чем  $2n$  треугольников.

## 2.2 Развёртка октаэдра на плоскость

Пусть в триангулированном центрально-симметричном октаэдре  $OABO'A'B'$  суммы углов при двух противоположных вершинах  $O$  и  $O'$  равны по  $\frac{2\pi}{3}$ , при остальных — по  $\frac{5\pi}{3}$ , вершины  $A$  и  $A'$  противоположны. Отметим на каждой грани  $XYZ$ , где  $X, Y \in \{A, B, A', B'\}$  и  $Z, Z' \in \{O, O'\}$  по точке  $S$  таким образом, что  $\angle XSY = \frac{\pi}{3}$  и  $\angle XSZ = \angle YSZ = \frac{5\pi}{6}$ , и проведём отрезки между отмеченными точками и вершинами граней. Тогда, как было доказано в работе [2], октаэдр разобьётся на 12 параллелограммов, согнутых по диагоналям — ребрам восьмигранника. Разрежем грани, содержащие вершину  $O$ , по ребру  $OA$  и развернём на плоскости, обозначим векторы, выходящие из вершины  $O$  в отмеченные на треугольниках  $OAB, OBA', OA'B', OB'A$  точки через  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  соответственно. Получится 4 вектора, углы между соседними из которых составляют по построению по  $\frac{\pi}{6}$  и по которым однозначно восстанавливается исходный октаэдр (для этого нужно дополнить соседние пары векторов до параллелограммов, вершины параллелограммов будут вершинами октаэдра, диагонали — рёбрами, останется дополнить получившиеся четыре грани до центрально-симметричного октаэдра). Пример развёртки можно увидеть на рисунке 1.

Определим решётки  $\text{Eis} = \mathbb{Z} \oplus \omega^2 \mathbb{Z}$  и  $\widetilde{\text{Eis}} = \frac{1}{1-\omega^4} \text{Eis}$ , где  $0, 1$  и  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}}$  — вершины единичного равностороннего треугольника, то есть решётка  $\text{Eis}$  разбивает плоскость на правильные треугольники со стороной 1, а  $\widetilde{\text{Eis}}$  состоит из точек  $\text{Eis}$  и центров правильных треугольников, вершинами которых являются точки  $\text{Eis}$ . Поскольку октаэдр составлен из равносторонних треугольников со сторонами 1, параллельным переносом и поворотом выше описанной развёртки можно поместить точку  $O$  в  $0 \in \text{Eis}$  и точки  $A, B, A', B', A$  в

точки решётки  $Eis$  в направлении против часовой стрелки. Тогда:

$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} & = B \in Eis, \\ \vec{b} + \vec{c} & = A' \in Eis, \\ \vec{c} + \vec{d} & = B' \in Eis, \\ \vec{a} + \omega^4 \vec{d} & = A \in Eis, \end{cases} \implies \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \widetilde{Eis}.$$

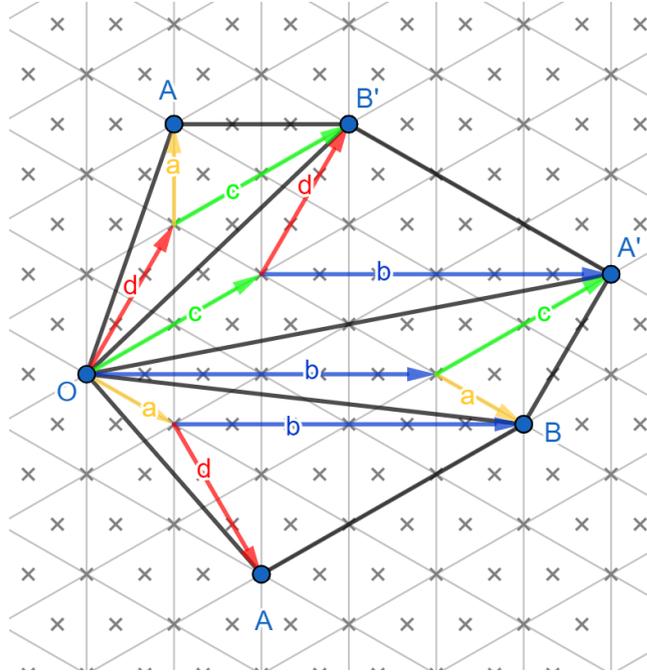


Рис. 1: Развёртка октаэдра на плоскость, размеченную решёткой  $Eis$ . Знаком  $\times$  обозначены точки решётки  $\widetilde{Eis}$

По векторам  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  восстанавливается развёртка, а по развёртке сам триангулированный октаэдр. При этом развернуть восьмигранник выше описанным образом можно 6 способами, давайте поймём, почему. Посмотрим на какой-нибудь единичный треугольник, примыкающий к точке  $O$ . После развёртки октаэдра на плоскость вершины треугольника должны попасть в  $Eis$ , вершина  $O$  должна попасть в  $0$ , и порядок на других двух вершинах этого треугольника определяется правилом, что точки  $A, B, A', B'$  на развёртке идут против часовой стрелки. Итак, образ этого треугольника — это один из шести треугольников решётки  $Eis$ , примыкающий к точке  $0$ , и его образ однозначно определяет развёртку.

Так мы перешли к рассмотрению таких четвёрок векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \widetilde{Eis}$ , что

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \angle(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\pi}{6}, \quad (2.1)$$

$$\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{d}, \vec{a} + \omega^4 \vec{d} \in Eis, \quad (2.2)$$

причём углы направленные и не более 1 вектора из этой четвёрки может быть нулевым (так как точки  $O, A, B, A', B'$  различны).

**Теорема 2.1.** Количество классов изометрии  $f_3(n)$  маркированных триангуляций  $\mathbb{R}P^2$  с тремя дефектными точками, имеющими дефекты 1, 1 и 4, состоящих из не более, чем  $n$

треугольников, выражается следующей формулой:

$$f(n) = \frac{1}{3} \left| \left\{ (z, a, b, c, d) \in \text{Prim } \widetilde{\text{Eis}} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 : z \in \text{Eis}, 3 \mid b, 3 \mid d, Q_1(a, b, c, d) \leq \frac{\sqrt{3}n}{2|z|^2}, \right. \right. \\ \left. \left. abc + acd + abd + bcd > 0. \right\} \right|$$

Здесь

$$Q_1(a, b, c, d) = \frac{1}{\sqrt{3}}(ab + bc + cd + ad + bd + 3ac),$$

$$\text{Prim } \widetilde{\text{Eis}} = \{v \in \widetilde{\text{Eis}} \mid \nexists w \in \widetilde{\text{Eis}}, \nexists n \in \mathbb{N}, n > 1 : v = nw\}.$$

*Доказательство.* Количество треугольников в триангуляции сферы не превосходит  $2n$  тогда и только тогда, когда площадь октаэдра не превосходит  $\frac{\sqrt{3} \cdot 2n}{4}$ , так как площадь единичного треугольника равна  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . С другой стороны, мы разбили октаэдр на 12 параллелограммов, и его площадь через площади параллелограммов считается как

$$Q(|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|, |\vec{d}|) = |\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}||\vec{c}| + |\vec{c}||\vec{d}| + |\vec{d}||\vec{a}| + \sqrt{3}|\vec{a}||\vec{c}| + \sqrt{3}|\vec{b}||\vec{d}|$$

Вектор  $\vec{a}$  из 2.2 единственным образом представляется в виде  $\vec{a} = a\vec{z}$ , где  $\vec{z} \in \text{Prim } \widetilde{\text{Eis}}$ , а  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Представим  $\vec{z}$  в виде  $\vec{z} = \frac{x+y\omega^2}{1-\omega^2}$ . Поскольку  $\vec{z} \in \text{Prim } \widetilde{\text{Eis}}$ , то  $\gcd(x, y) = 1$ . Заметим, что  $(\sqrt{3}\omega)\vec{z} = \frac{2x-y+(x+y)\omega^2}{1-\omega^2} \in \widetilde{\text{Eis}}$ , причём

$$\gcd(2x - y, x + y) = \gcd(3x, x + y) = \begin{cases} 3, & 3 \mid x + y, \\ 1, & 3 \nmid x + y \end{cases}$$

Введём следующее обозначение:

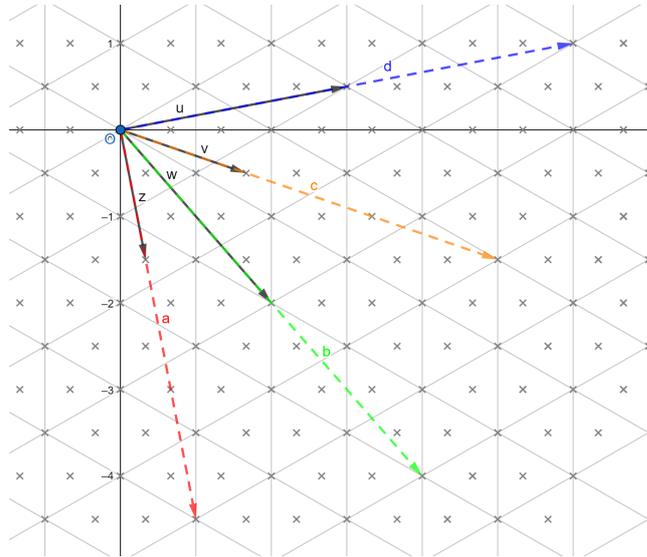


Рис. 2: Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  и пропорциональные им примитивные векторы  $\vec{z} \in \widetilde{\text{Eis}}, \vec{w} = \sqrt{3}\omega\vec{z}, \vec{v} = \omega\vec{z}, \vec{u} = \omega\sqrt{3}\omega\vec{z}$ . Здесь видно, что если  $\vec{z} \notin \text{Eis}$ , то примитивный вектор, составляющий с  $\vec{z}$  угол  $\frac{\pi}{6}$ , уже попадает в решётку  $\text{Eis}$ , и наоборот.

$$\widetilde{\text{Eis}}_k := \left\{ \frac{x + y\omega^2}{1 - \omega^2} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x + y \equiv_3 k \right\}$$

Нетрудно заметить, что  $\text{Eis} = \widetilde{\text{Eis}}_0$ , а также  $\widetilde{\text{Eis}}_k + \widetilde{\text{Eis}}_m = \widetilde{\text{Eis}}_{k+m}$ . Рассмотрим два случая:

1.  $\vec{z} \in \widetilde{\text{Eis}}_0$ . В таком случае,  $\sqrt{\frac{\omega}{3}}\vec{z} \in \text{Prim } \widetilde{\text{Eis}}$  и сонаправлен с  $\vec{b}$ , а значит  $\vec{b}$  представляется в виде  $\vec{b} = b\sqrt{\frac{\omega}{3}}\vec{z}$ , где  $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Поворот на  $\frac{\pi}{3}$  оставляет  $\text{Prim } \widetilde{\text{Eis}}$  на месте, следовательно,  $\omega\vec{z}, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\vec{z} \in \text{Prim } \widetilde{\text{Eis}}$  и векторы  $\vec{c}, \vec{d}$  представляются в виде  $\vec{c} = c\omega\vec{z}, \vec{d} = d\omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\vec{z}$  для некоторых целых неотрицательных  $c, d$ . В таком случае,

$$|\vec{a}| = a|\vec{z}|, \quad |\vec{b}| = \frac{b}{\sqrt{3}}|\vec{z}|, \quad |\vec{c}| = c|\vec{z}|, \quad |\vec{d}| = \frac{d}{\sqrt{3}}|\vec{z}|,$$

Поскольку  $\vec{z} \in \text{Eis}$ , то  $\vec{a}, \vec{c} \in \text{Eis}$  и свойство 2.2 равносильно условию  $\vec{b}, \vec{d} \in \text{Eis}$ . При этом,  $\sqrt{\frac{\omega}{3}}\vec{z} = \frac{\frac{2x-y}{3} + \frac{x+y}{3}\omega^2}{1-\omega^2}$ , а значит  $\sqrt{\frac{\omega}{3}}\vec{z} \notin \text{Eis}$ , потому что  $3 \nmid \frac{2x-y}{3} + \frac{x+y}{3} = x$ , ведь иначе  $3 \mid x, 3 \mid (x+y)$ , из чего бы следовало, что  $3 \mid x, 3 \mid y$ , а это противоречит определению  $\text{Prim } \widetilde{\text{Eis}}$ , из которого мы взяли  $\vec{z}$ . Итак, ни  $\sqrt{\frac{\omega}{3}}\vec{z}$ , ни  $\omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\vec{z}$  не принадлежат  $\text{Eis}$ , поэтому  $\vec{b}, \vec{d} \in \text{Eis}$  верно тогда и только тогда, когда  $3 \mid b, 3 \mid d$ .

Таким образом, если  $\vec{z} \in \widetilde{\text{Eis}}_0$ , четвёрке  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$  однозначно сопоставляется пятёрка  $(\vec{z}, a, b, c, d)$  с выше указанными свойствами, и соответствующая триангуляция составлена из не более, чем  $n$  треугольников, тогда и только тогда, когда

$$|\vec{z}|^2 Q_1(a, b, c, d) := Q(|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|, |\vec{d}|) = \frac{1}{\sqrt{3}}|\vec{z}|^2(ab + bc + cd + ad + bd + 3ac) \leq \frac{\sqrt{3}n}{2}.$$

2.  $\vec{z} \in \widetilde{\text{Eis}}_1 \cup \widetilde{\text{Eis}}_2$ . Тогда  $(\sqrt{3\omega})\vec{z}, \omega\vec{z}, \omega(\sqrt{3\omega})\vec{z} \in \text{Prim } \widetilde{\text{Eis}}$ , сонаправлены с  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  соответственно, и

$$\vec{a} = a\vec{z}, \vec{b} = b(\sqrt{3\omega})\vec{z}, \quad \vec{c} = c\omega\vec{z}, \quad \vec{d} = d\omega(\sqrt{3\omega})\vec{z}.$$

Пример показан на рисунке 2. В этом случае,  $\vec{b}, \vec{d} \in \widetilde{\text{Eis}}_0$ , а  $\vec{z}, \omega\vec{z} \notin \text{Eis}$ , и свойства 2.2 выполняются тогда и только тогда, когда  $3 \mid a, 3 \mid c$ . Заметим, что четвёркам  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$  из этого случая биективно сопоставляются четвёрки  $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \omega^2\vec{a})$  из первого случая, поэтому и количество триангуляций, соответствующих второму случаю, совпадает с количеством триангуляций, соответствующих первому.

Так, мы разбили четвёрки векторов на пары и парам биективно сопоставили пятёрку  $(\vec{z}, a, b, c, d)$  из первого случая. Осталось вспомнить, что у каждой триангуляции 6 различных развёрток, и, соответственно, поделить количество подходящих пятёрок  $(\vec{z}, a, b, c, d)$  на 3. ■

## 2.3 Подсчёт асимптотики

Определим

$$X := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_{>0}^4 \mid Q(a, b, c, d) \leq 1\}.$$

Напомним, что форма  $Q$  определялась при доказательстве предыдущей теоремы и обозначала объём октаэдра:

$$Q(a, b, c, d) = ab + bc + cd + ad + \sqrt{3}ac + \sqrt{3}bd.$$

**Лемма 2.2.**

$$\text{Vol}(X) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \Lambda\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) \right),$$

где  $\Lambda(x) = -\int_0^x \log|2 \sin(x)| dx$  — функция Лобачевского.

*Доказательство.* Форму объёма билинейной формы  $P$  будем обозначать за  $\text{Vol}_P$ :

$$\text{Vol}_P(v_0, v_1, v_2, v_3) := \text{sign}(v_0, v_1, v_2, v_3) \cdot \sqrt{|\det P(v_i, v_j)_{i,j \in \{0,1,2,3\}}|}.$$

Билинейную симметричную форму, соответствующую  $Q$ , назовём  $\bar{Q}$ . Также определим

$$Y := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_{>0}^4 \mid Q(a, b, c, d) = 1\},$$

$$\forall v_0 \in Y \alpha_{v_0}: \bigwedge^3 T_{v_0} Y \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_{v_0} := \text{Vol}_{\bar{Q}}(v_0, \cdot, \cdot, \cdot).$$

В работе [2] утверждается, что

$$\int_Y \alpha = \Lambda\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Выразим форму  $\alpha$  через стандартную форму объёма  $\omega = \text{Vol}_{\bar{Q}}$ , где  $\bar{Q}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=0}^3 x_i y_i$ : пусть  $A$  — матрица  $(v_0, v_1, v_2, v_3)$  в стандартном базисе  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{v_0}(v_1, v_2, v_3) &= \text{sign}(v_0, v_1, v_2, v_3) \cdot \sqrt{|\det \bar{Q}(v_i, v_j)|} \\ &= \text{sign}(v_0, v_1, v_2, v_3) \cdot \det A \cdot \sqrt{|\det \bar{Q}(e_i, e_j)|}, \\ \omega(v_0, v_1, v_2, v_3) &= \text{sign}(v_0, v_1, v_2, v_3) \cdot \det A, \\ \det \bar{Q}(e_i, e_j) &= \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $Q^{-1} dQ \wedge \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega$ . Действительно, вычислим значение этой формы в точке  $v_0$  на ортогональном базисе  $(v_0, v_1, v_2, v_3)$ :

$$Q^{-1} dQ \wedge \alpha(v_0, v_1, v_2, v_3) = Q^{-1}(v_0) \cdot 2\bar{Q}(v_0, v_0) \cdot \alpha_{v_0}(v_1, v_2, v_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega(v_0, v_1, v_2, v_3).$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(X) &= \int_X \omega = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 q^{-1} dq \int_{\sqrt{q}Y} \alpha = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 q^{-1} \cdot q^2 \cdot \int_Y \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \Lambda\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) \right). \end{aligned}$$

■

Для подсчёта  $f(n)$  нам понадобится вспомогательная функция:

$$g(x) := \left| \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 : Q_1(a, b, c, d) \leq x, 3 \mid b, 3 \mid d, \right. \right. \\ \left. \left. abc + abd + acd + bcd > 0 \right\} \right|$$

**Лемма 2.3.**

$$g(x) = \frac{1}{3} \text{Vol}(X)x^2 + O(x^{\frac{3}{2}})$$

*Доказательство.* По определению,

$$g(x) = \left| \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 : Q \left( a, \frac{b}{\sqrt{3}}, c, \frac{d}{\sqrt{3}} \right) \leq x, 3 \mid b, 3 \mid d, \right. \right. \\ \left. \left. abc + abd + acd + bcd > 0 \right\} \right|.$$

то есть  $g(x)$  — количество точек решётки со сторонами  $1, \sqrt{3}, 1, \sqrt{3}$ , лежащих в  $\sqrt{x}X$ . Среди этих точек у  $O(x^{\frac{3}{2}})$  одна из координат нулевая, так как каждая из оставшихся 3 координат не может превосходить  $O(x^{\frac{1}{2}})$ . Поэтому, с точностью до  $O(x^{\frac{3}{2}})$  можем считать количество точек решётки, лежащих в  $\sqrt{x}X$  и имеющих только положительные координаты. Так как объём единичного параллелограмма из этой решётки равен 3,

$$g(x) \approx \frac{1}{3} \text{Vol}(X)x^2.$$

Оставшийся подсчёт погрешности полностью повторяет доказательство теоремы 3.1 в работе [3]. ■

Обозначим  $\text{Eis}_0 := \{x + y\omega^2 : x, y \in \mathbb{Z}, 3 \mid (x + y)\}$ , а также  $E_0 := \text{Prim Eis} \cap \text{Eis}_0$ . В работе [3] было получено, что

$$\sum_{z \in E_0} |z|^{-4} = \frac{1}{10} \zeta^{-1}(4) \zeta(\text{Eis}, 2).$$

где

$$\zeta(L, s) = \sum_{\gamma \in L \setminus 0} \langle \gamma, \gamma \rangle^{-s}$$

— дзета-функция Эпштейна. Определим

$$\widetilde{E}_0 := \text{Prim } \widetilde{\text{Eis}} \cap \widetilde{\text{Eis}}_0.$$

Понятно, что  $z \in \tilde{E}_0$  тогда и только тогда, когда  $z(1 - \omega^2) \in E_0$ . Поэтому,

$$\sum_{z \in \tilde{E}_0} |z|^{-4} = |1 - \omega^2|^4 \sum_{z \in E_0} |z|^{-4} = \frac{9}{10} \zeta^{-1}(4) \zeta(\text{Eis}, 2). \quad (2.3)$$

**Теорема 2.4.**

$$f(n) = \frac{3}{40\sqrt{3}} \left( \Lambda\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \zeta^{-1}(4) \zeta(\text{Eis}, 2) n^2 + O(n^{\frac{3}{2}}).$$

*Доказательство.* По теореме 2.1, используя лемму 2.2 и 2.3,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{3} \sum_{z \in \tilde{E}_0} g\left(\frac{\sqrt{3}n}{2|z|^2}\right) \\ &= \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \text{Vol}(X) \cdot \frac{3}{4} \sum_{z \in \tilde{E}_0} |z|^{-4} \right) n^2 + \sum_{z \in \tilde{\text{Eis}}} O(n^{\frac{3}{2}} |z|^{-3}) \\ &= \frac{3}{40\sqrt{3}} \left( \Lambda\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \zeta^{-1}(4) \zeta(\text{Eis}, 2) n^2 + O(n^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

■

### 3 Триангуляции с дефектами 1, 1, 2, 2

Рассмотрим какую-нибудь триангуляцию  $\mathbb{R}P^2$  с четырьмя дефектными вершинами. Её поднятие на сферу индуцирует метрику, плоскую везде, кроме 8 точек, и эта метрика реализуется на некотором центрально-симметричном триангулированном многограннике с 8 вершинами. Основная идея оценки числа триангуляций таких многогранников состоит в том, чтобы разрезать ребро, соединяющее некоторые две противоположные вершины, изогнуть образовавшиеся геодезические, соединяющие эти две вершины, в дуги окружности, тогда окрестность этой окружности образует часть конуса. Продолжим её до конуса, сделаем то же самое с парой вершин, противоположным взятой паре, и получим таким образом октаэдр, которому соответствует триангуляция проективной плоскости с 3 особенными точками, дефект одной из которых — сумма дефектов двух выбранных точек исходной триангуляции. Поскольку ранее мы разобрали случай дефектов  $\{1, 1, 4\}$ , в этой части работы изучаются триангуляции  $\mathbb{R}P^2$  с дефектами  $\{1, 1, 2, 2\}$ .

Пусть  $T$  — такая триангуляция, а  $\tilde{T}$  — поднятие  $T$  на  $S^2$ . Прообразами при накрытии двух вершин  $T$  с дефектом 1 будут 4 вершины  $\tilde{T}$ , лежащие на одной окружности (так как среди этих 4 вершин две пары противоположных). Промаркируем их  $A, B, A', B'$  так, что  $A, A'$  противоположны. Образы  $A$  и  $B$ , а также дуги  $AB$  при накрытии — это соответственно вершины  $A, B$  триангуляции  $T$  с дефектом 1 и геодезическая  $\gamma$ , соединяющая их. Четвёрку  $(T, \gamma, A, B)$  будем называть *маркированной триангуляцией  $\mathbb{R}P^2$  с дефектами  $\{1, 1, 2, 2\}$* .

Разрежем сферу по окружности, на которой лежат  $A, B, A', B'$ , и возьмём одну из образовавшихся компонент связности. Вершины с дефектом 2 на ней обозначим  $C$  и  $D$  в любом порядке. Разрежем по каким-нибудь кратчайшим геодезическим, соединяющим  $C$  и  $D$ ,  $C$  и  $A$ , и положим получившуюся развёртку на плоскость так, чтобы вершины  $\tilde{T}$  попадали в  $\text{Eis}$ :

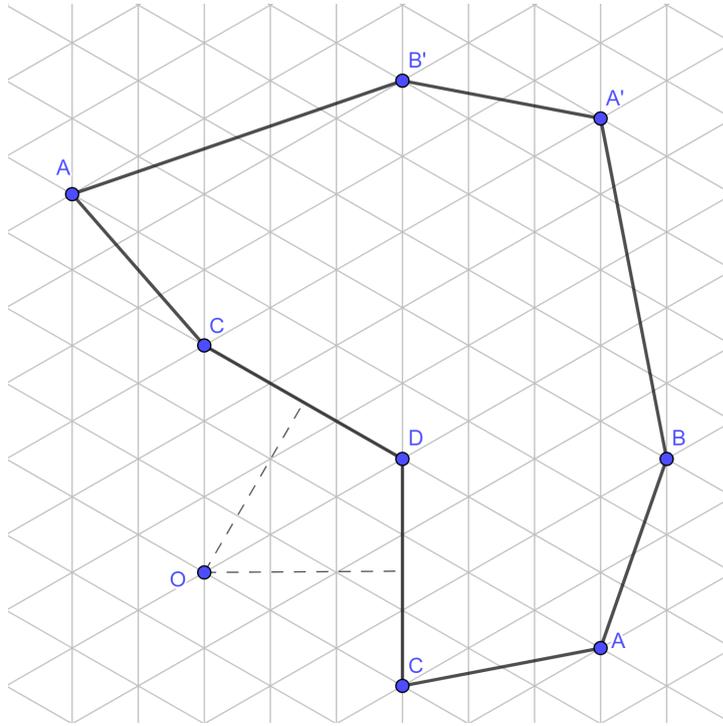


Рис. 3: Развёртка триангуляции с 4 дефектными вершинами

Дефект вершины  $D$  равен 2, значит, угол при  $D$  равен  $\frac{4\pi}{3}$ . Для удобства пронумеруем точки  $C$  как  $C_1$  и  $C_2$  так, что при повороте относительно  $D$  на угол  $\frac{4\pi}{3}$  точка  $C_1$  переходит в  $C_2$ . Срединные перпендикуляры к отрезкам  $C_1D$  и  $C_2D$  пересекутся в точке  $O$ , как на рисунке выше. Тогда  $OD = OC_1 = OC_2$ , треугольники  $OC_1D$  и  $OC_2D$  равны, и, поскольку внешний угол при вершине  $D$  равен  $\frac{2\pi}{3}$  и делится пополам отрезком  $OD$ , треугольники  $OC_1D$  и  $OC_2D$  окажутся правильными, и точка  $O$  получается из  $C_2$  поворотом вокруг  $D$  на  $\frac{\pi}{3}$ . Мы положили развёртку так, что  $D \in \text{Eis}$ , а поворот вокруг точки из решётки  $\text{Eis}$  на угол  $\frac{\pi}{3}$  оставляет решётку на месте. Следовательно,  $O \in \text{Eis}$ . Проведём из  $O$  отрезки к точкам  $C_1, C_2$ , получим развёртку, в которой суммарные углы при  $A, B, A', B'$  равны по  $\frac{5\pi}{3}$ , при  $O$  —  $\frac{2\pi}{3}$ , а при  $C$  и  $D$  — по  $2\pi$ . Так мы получили развёртку, соответствующую триангуляции  $T'$  проективной плоскости с дефектами 1, 1, 4 и отмеченным треугольником  $OAB$  (можно склеить ломаную  $OCA$ , а также отождествить  $AB$  с  $A'B'$  и  $BA'$  с  $B'A$  и получить триангулированную проективную плоскость). Более того, поскольку у развёртки  $T'$  при вершине  $C$  суммарный угол  $2\pi$ , то либо при  $C_1$  и  $C_2$  он равен  $\pi$ , из чего следует, что  $C$  лежит на отрезке  $OA$ , и точки  $O, A, B, A', B', A$  на плоскости после параллельного переноса на вектор  $OA$  образуют стандартную развёртку половины октаэдра, которую мы строили ранее, либо, не умаляя общности,  $\angle OC_1A < \pi$ ,  $\angle OC_2A > \pi$ , тогда переклеим треугольник  $OC_1A$  к ломаной  $OC_2A$ , перенесём всю конструкцию так, что точка  $O$  попадёт в  $0$  и, не меняя саму триангуляцию, получим её стандартную развёртку.

Заметим, что при данном построении точка  $D$  оказывается внутри (возможно, на границе) стандартной развёртки половины октаэдра. Действительно, пронумеруем точки  $A$  как  $A_1, A_2$  таким образом, что при повороте относительно точки  $O$  на угол  $\frac{2\pi}{3}$  точка  $A_1$  переходит в  $A_2$ , и пусть, не умаляя общности, точки  $D$  и  $C_1$  оказались вне стандартной развёртки. Посмотрим на треугольники  $OC_1A_1$  и  $OC_2A_1$ . Стороны  $OC_1$  и  $OC_2$  равны,  $OA_1$  — общая сторона треугольников, но  $\angle C_1OA_1 > \angle C_1OD = \frac{\pi}{3}$ , а  $\angle C_2OA_1 < \angle C_2OD = \frac{\pi}{3}$ , следовательно,

$C_2A_1 < C_1A_1$ , а мы выбирали  $C_1A_1$  кратчайшей геодезической, противоречие. Итак, точка  $D$ , а также  $C_1$  или  $C_2$  окажутся внутри стандартной развёртки половины октаэдра.

Мы увидели, что из развёртки триангуляции  $(T, \gamma, A, B)$  с дефектами  $\{1, 1, 2, 2\}$  можно получить триангуляцию  $(T', \Delta, A, B)$  с дефектами 1, 1, 4. Давайте убедимся, что  $(T', \Delta, A, B)$  не зависит от развёртки  $T$ , для этого повторим шаги построения этой развёртки. Если вершины с дефектом 2 обозначить  $C$  и  $D$  по-другому, то развёртка будет отличаться от изначальной переклеиванием треугольника  $C_1A_1D$  к ребру  $A_2C_2$  или переклеиванием треугольника  $C_2A_2D$  к ребру  $A_1C_1$  в зависимости от того, какой из отрезков  $A_1D$  и  $A_2D$  короче, в любом из этих случаев ломаная  $C_1DC_2$  повернётся относительно  $O$  на  $\pm\frac{2\pi}{3}$ , и, поскольку  $O$  строится как центр окружности, на которой лежат  $C_1, D, C_2$ , и эта окружность останется на месте, то и вершина  $O$  окажется там же, и триангуляция  $(T', OAB)$  будет такой же. Также, если оказалось, что  $C_1A_1 = C_2A_1$ , и при построении развёртки для  $\tilde{T}$  разрезать не по  $C_1A_1$ , а по  $C_2A_1$ , то новая развёртка будет получаться из исходной переклеиванием четырёхугольника  $C_2AC_1D$  к ребру  $A_2C_2$ , и это тоже не меняет  $(T', OAB)$ . Итак, каждой триангуляции  $(T, \gamma, A, B)$  соответствует единственная триангуляция  $(T', \Delta, A, B)$ .

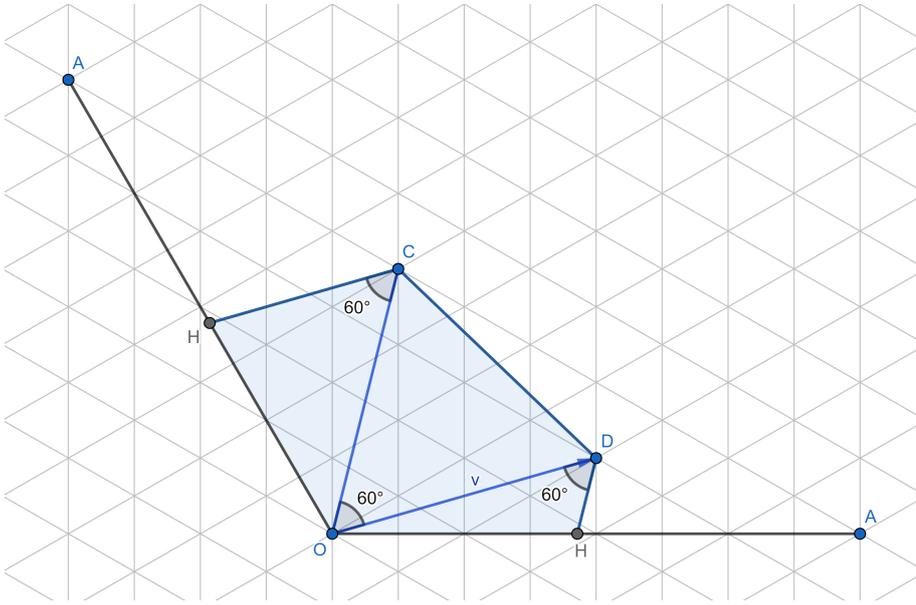


Рис. 4: Построение триангуляции с 4 дефектными вершинами. Синим закрашены два отрезаемых равносторонних треугольника с вершинами  $C, D, O$ .

В обратную сторону, пусть  $(T, \Delta, A, B)$  — маркированная триангуляция  $\mathbb{R}P^2$  с дефектами  $(1, 1, 4)$ . Триангуляция с 4 дефектными вершинами получается отрезанием от точки  $O$  двух равносторонних треугольников, склеенных по сторонам, примыкающим к  $O$ . Значит, на стандартной развёртке  $T$  вершины  $A, B, A', B'$  не лежат в этих треугольниках. Этому же условия будет достаточно: пусть  $v$  — вектор внутри развёртки, его конец —  $D$ , повернём точку  $D$  относительно  $O$  на  $\frac{\pi}{3}$  или на  $-\frac{\pi}{3}$  так, чтобы образ, точка  $C$ , оказалась внутри развёртки, соединим  $C$  и  $D$  двумя отрезками как на рисунке 4 (внутренность одного из отрезков будет содержаться строго внутри развёртки, а второй отрезок будет пересекать ребро  $OA$ ), и пусть в образовавшихся двух треугольниках с вершинами  $O, C, D$  (один из этих треугольников разрезан отрезком  $OA$ ) нет точек  $A, B, A', B'$ . Тогда ототрежем их, склеим два отрезка  $CD$ , склеим отрезки  $HA$  ( $H$  — точка пересечения одного из отрезков  $CD$  и  $OA$ ), а также отождествим  $AB'$  с  $A'B$  и  $AB$  с  $A'B'$  — получим триангуляцию с дефектами 1, 1, 2, 2.

Поскольку в триангуляциях с 4 дефектными вершинами мы не различаем вершины с дефектом 2, то если при построении выше взять вместо  $v$  вектор  $\omega^2 v$  (или  $\omega^4 v$ , в зависимости от того, какой из этих векторов попадёт в развёртку), триангуляция с 4 дефектными вершинами получится такой же.

Если точка  $D$  лежит внутри развёртки маркированной триангуляции, и длина отрезка  $OD$  будет меньше, чем  $|OA|, |OB|, |OA'|, |OB'|$ , то, конечно, в треугольники с вершинами  $O, C, D$  не попадут  $A, B, A', B'$ . С другой стороны, расстояние от точки  $O$  до  $CD$  должно быть меньше, чем расстояние от  $O$  до одной из точек  $A, B, A', B'$ , иначе одна из них попадёт в один из треугольников.

**Теорема 3.1.** Обозначим  $f_4(n)$  количество различных попарно неизометричных маркированных триангуляций  $\mathbb{R}P^2$  с набором ненулевых дефектов  $\{1, 1, 2, 2\}$ , состоящих из не более, чем  $n$  треугольников. Тогда

$$\begin{aligned}
f_4(n) &\geq \frac{1}{18} \left| \left\{ (z, v, a, b, c, d) \in \widetilde{E}_0 \times \text{Eis} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 : 3 \mid b, 3 \mid d, \right. \right. \\
&\quad abc + acd + bcd + abd > 0, \\
&\quad |v|^2 < |z|^2 \left( \min(a, c)^2 + \frac{1}{3} \min(b, d)^2 + \min(a, c) \min(b, d) \right), \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{3}} (ab + bc + cd + ad + bd + 3ac) \leq \frac{\sqrt{3}(n + 2|v|^2)}{2|z|^2} \right\} \Big|, \\
f_4(n) &\leq \frac{1}{18} \left| \left\{ (z, v, a, b, c, d) \in \widetilde{E}_0 \times \text{Eis} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 : 3 \mid b, 3 \mid d, \right. \right. \\
&\quad abc + acd + bcd + abd > 0, \\
&\quad |v|^2 < \frac{\sqrt{3}}{2} |z|^2 \left( \min(a, c)^2 + \frac{1}{3} \min(b, d)^2 + \min(a, c) \min(b, d) \right), \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{3}} (ab + bc + cd + ad + bd + 3ac) \leq \frac{\sqrt{3}(n + 2|v|^2)}{2|z|^2} \right\} \Big|
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Триангуляция с четырьмя особенными точками получается отрезанием от триангуляции с тремя особенными точками двух треугольников  $OCD$ . Их суммарная площадь в  $2|CD|^2$  раз больше, чем площадь единичного треугольника. Следовательно,  $f_4(n)$  — это количество пар из маркированной триангуляции  $(T, \Delta, A, B)$  с дефектами  $\{1, 1, 4\}$  и вектора  $v \in \text{Eis}$  внутри  $T$ , удовлетворяющего условиям, описанным ранее, причём  $T$  состоит из не более, чем  $n + 2|v|^2$  треугольников. Мы оценим  $f_4(n)$  снизу множеством всех таких пар  $((T, \Delta, A, B), v)$ , что длина  $v$  меньше  $|OA|, |OB|, |OA'|, |OB'|$ . Мы также оценим  $f_4(n)$  сверху множеством всех пар  $((T, \Delta, A, B), v)$  таких, что высота в равностороннем треугольнике со стороной  $|v|$ , то есть  $\frac{2}{\sqrt{3}}|v|$  меньше расстояния от точки  $O$  до вершин  $A, B, A', B'$ .

В теореме 2.1, триангуляции  $(T, \Delta, A, B)$  отождествлялись с определёнными пятёрками  $(z, a, b, c, d)$ , причём  $z$  мы рассматривали с точностью до поворота на один из 6 углов, кратных  $\frac{\pi}{3}$ . Далее, среди всех векторов  $v \in \text{Eis}$  подходящей длины ровно  $\frac{1}{3}$  лежит внутри развёртки  $(T, \Delta)$ , так как угол при вершине  $O$  составляет  $\frac{1}{3}$  от  $2\pi$ , и все векторы  $v$ , удовлетворяющие одному из двух условий на длину и лежащие внутри угла при вершине  $O$ , будут внутри развёртки. Ещё нужно учесть, что векторы, отличающиеся поворотом на  $\frac{\pi}{3}$ , задают одну и ту же триангуляцию с 4 дефектными вершинами. Таким образом, количество всех векторов из  $\text{Eis}$  подходящей длины нужно поделить на 6. Осталось понять,

векторы  $v$  какой длины нам подходят. По пятёрке  $(z, a, b, c, d)$  строилась четвёрка векторов  $\vec{a} = az, \vec{b} = b\sqrt{\frac{\omega}{3}}z, \vec{c} = a\omega z, \vec{d} = d\omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}z$ , и вершины развёртки получались как суммы  $\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{d}, \vec{d} + \omega^2\vec{a}$ . Углы между парами векторов  $(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{b}, \vec{c}), (\vec{c}, \vec{d}), (\vec{d}, \omega^2\vec{a})$  равны по  $\frac{5\pi}{6}$ , поэтому по теореме косинусов квадрат наименьшего расстояния от вершины с дефектом 4 до вершины с дефектом 1 равен  $\min(|\vec{a}|, |c|)^2 + \min(|\vec{b}|, |\vec{d}|)^2 + \sqrt{3} \min(|\vec{a}|, |\vec{c}|) \min(|\vec{b}|, |\vec{d}|)$ . Подставим  $|\vec{a}| = a|z|, |\vec{b}| = \frac{b}{\sqrt{3}}|z|, |\vec{c}| = |z|, |\vec{d}| = \frac{d}{\sqrt{3}}|z|$ , а также условие на пятёрки  $(z, a, b, c, d)$  из 2.1, и получим требуемые неравенства на  $f_4(n)$ . ■

Обозначим

$$S_n := \left\{ (z, a, b, c, d) \in \widetilde{E}_0 \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 : 3 \mid b, 3 \mid d, Q_1(a, b, c, d) \leq \frac{\sqrt{3}n}{2|z|^2}, \right. \\ \left. abc + acd + abd + bcd > 0. \right\}$$

**Теорема 3.2.** Существует константа  $C > 0$  такая, что для почти всех  $n \in \mathbb{N}$  справедливо

$$f_4(n) \leq Cn^3.$$

*Доказательство.* Понятно, что для любой четвёрки целых неотрицательных чисел  $a, b, c, d$   $\min(a, c)^2 \leq ac, \min(b, d)^2 \leq bd, \min(a, c) \min(b, d) \leq \frac{1}{3}(ab + bc + cd + ad)$ . Следовательно,

$$\min(a, c)^2 + \frac{1}{3} \min(b, d)^2 + \min(a, c) \min(b, d) \leq \frac{1}{3}(ab + bc + cd + ad + bd + 3ac).$$

Если подставить это неравенство в верхнюю оценку  $f_4(n)$  из теоремы 3.1, получим

$$f_4(n) \leq \frac{1}{18} \left| \left\{ (z, v, a, b, c, d) \in \widetilde{E}_0 \times \text{Eis} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^4 : 3 \mid b, 3 \mid d, \right. \right. \\ \left. \left. abc + acd + bcd + abd > 0, \right. \right. \\ \left. |v|^2 < \frac{\sqrt{3}(n + 2|v|^2)}{4}, \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{3}}(ab + bc + cd + ad + bd + 3ac) \leq \frac{\sqrt{3}(n + 2|v|^2)}{2|z|^2} \right\} \left| \right.$$

Неравенство  $|v|^2 < \frac{\sqrt{3}(n + 2|v|^2)}{4}$  выполняется тогда и только тогда, когда  $|v|^2 < \frac{\sqrt{3}n}{2 - 2\sqrt{3}}$ . Перепишем последнее неравенство:

$$f_4(n) \leq \frac{1}{18} \sum_{v \in \text{Eis}, |v|^2 < \frac{\sqrt{3}n}{2 - 2\sqrt{3}}} |S_{n+2|v|^2}|.$$

По теореме 2.1  $\frac{1}{6}|S_{n+2|v|^2}| = f_3(n + 2|v|^2)$ , а из теоремы 2.4 следует, что для некоторой константы  $C_0$  и для всех достаточно больших  $n \in \mathbb{N}$   $f_3(n) \leq C_0n^2$ . Вектор  $v \in \text{Eis}$  однозначно представляется в виде  $v = x + u\omega$ , где  $x, u \in \mathbb{Z}$ , и  $|v|^2 = x^2 + y^2 + xy$ . Легко видеть, что если  $|v|^2 < a \cdot n$ , где  $a = \frac{\sqrt{3}}{2 - 2\sqrt{3}}$ , то  $|x| < 2\sqrt{an}$  и  $|y| < 2\sqrt{an}$ . То есть, векторов  $v \in \text{Eis}$ , по которым идёт суммирование в последнем неравенстве, не больше, чем  $4an$ , и для каждого такого  $v$

$$|S_{n+2|v|^2}| \leq |S_{n+2an}| \leq C_0(1 + 2a)^2n^2,$$

если  $n$  достаточно большое. Таким образом,

$$f_4(n) \leq \frac{1}{18} \cdot 4an \cdot C_0(1+2a)^2 n^2 = Cn^3.$$

■

**Теорема 3.3.** Найдётся константа  $C' > 0$  такая, что для всех достаточно больших  $n \in \mathbb{N}$  верно

$$f_4(n) \geq C'n^3.$$

*Доказательство.* Всякий вектор из решётки Эйзенштейна  $v \in \text{Eis}$  представляется в виде  $v = x + u\omega$  и квадрат его длины выражается как  $|v|^2 = x^2 + y^2 + xy$ . Для фиксированной пятёрки  $(z, a, b, c, d) \in S_n$  рассмотрим множество  $T$  таких  $x + u\omega \in \text{Eis}$ , что  $|x| < |z| \min(a, c)$  и  $|y| < \frac{1}{\sqrt{3}}|z| \min(b, d)$ . Все элементы  $v$  множества  $T$  удовлетворяют неравенству

$$|v|^2 < |z|^2 \left( \min(a, c)^2 + \frac{1}{3} \min(b, d)^2 + \min(a, c) \min(b, d) \right).$$

Мощность множества  $T$  — это количество пар  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  таких, что  $|x| < |z| \min(a, c)$  и  $|y| < \frac{1}{\sqrt{3}}|z| \min(b, d)$ , её можно оценить снизу как  $\frac{4}{\sqrt{3}}(|z| \min(a, c) - 1)(|z| \min(b, d) - 1)$ . Для данной пятёрки  $(z, a, b, c, d) \in S_n$  множество  $T$  будем обозначать как  $T(z, a, b, c, d)$ . Наконец, воспользовавшись нижней оценкой  $f_4(n)$  из теоремы 3.1 и очевидным наблюдением, что  $S_n \subseteq S_{n+2|v|^2}$ , имеем

$$\begin{aligned} f_4(n) &\geq \sum_{(z,a,b,c,d) \in S_n} |T(z, a, b, c, d)| \\ &\geq \frac{4}{\sqrt{3}} \sum_{(z,a,b,c,d) \in S_n} (|z| \min(a, c) - 1)(|z| \min(b, d) - 2) \\ &\geq \frac{4}{\sqrt{3}} \sum_{(z,a,b,c,d) \in S_n} I \left( |z| \min(a, c) \geq \frac{\sqrt{n}}{8} + 1, |z| \min(b, d) \geq \frac{\sqrt{n}}{8} + 2 \right) \cdot \frac{n}{64}. \end{aligned}$$

В последнем выражении  $I(P)$  обозначает индикатор предиката  $P$ :  $I(P) = 1$ , если  $P$  верно, и  $I(P) = 0$ , иначе.

Прямой проверкой можно убедиться, что множество  $S_n$  содержит все пятёрки  $(z, a, b, c, d)$ , в которых  $a|z|, b|z|, c|z|, d|z|$  не превосходят  $\frac{\sqrt{3n}}{4}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} f_4(n) &\geq \frac{n}{16\sqrt{3}} \sum_{z \in E_0} |\{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}_{>0}^4 : 3 \mid b, 3 \mid d, \\ &\quad a, b, c, d \in \left[ \frac{\sqrt{n} + 8}{8|z|}, \frac{\sqrt{3n}}{4|z|} \right]\}|. \end{aligned}$$

Понятно, что правая часть неравенства не меньше  $C'n^2$  для какой-то константы  $C'$ . ■

# Литература

- [1] A.D. Alexandrov. Existence of a convex polyhedron and of a convex surface with a given metric. *Mat. sbornik*, 11(1-2): 15–65
- [2] Z. Wang. Shapes of centrally symmetric octahedra with prescribed cone-deficits. *Advances in Geometry*, 21(2): 179–185, 2021
- [3] Mikhail Chernavskikh, Altan Erdnigor, Nikita Kalinin, Alexandr Zakharov. Equilateral convex triangulations of  $\mathbb{R}P^2$  with three conical points of equal defect. *In the Tradition of Thurston II*, 315-329