Отзыв на выпускную квалификационную работу
"О слабых решениях параболических уравнений
с негладким дрифтом"
студента 4 курса бакалавриата 01.03.01 Математика
Михаила Сергеевича Глазкова

Изучение свойств слабых решений параболических уравнений с негладким дрифтом (скоростью сноса, т.е. коэффициентом при первых производных решений по пространственным переменным), помимо самостоятельного интереса, является важным с точки зрения возможного последующего применения развитой теории к задачам математической гидродинамики. По видимому, по этой причине во многих работах, посвященных данной тематике, часто предполагается, что дрифт является соленоидальным (что физически соответствует условию несжимаемости). При этом многие авторы (среди которых можно отметить таких известных математиков, как Q.S. Zhang, Г.А. Серегин, L. Silvestre, V. Sverak, A. Zlatos, А.И. Назаров, Н.Н. Уральцева, V. Vicol, D. Albritton и многих других), занимавшиеся изучением эллиптических и параболических уравнений с соленоидальным дрифтом, отмечали, что условие соленоидальности позволяет определенным образом ослабить требования на минимальную гладкость дрифта, при которой слабые решения соответствующих уравнений обладают теми или иными "хорошими" свойствами (такими, как локальная ограниченность и непрерывность по Гельдеру решений, строгий принцип максимума и др.).

Однако ряд задач, возникающих в математической гидродинамике (среди которых можно отметить проблему гладкости осесимметричных решений уравнений Навье–Стокса) естественным образом приводят к необходимости изучения скалярных параболических уравнений с несоленоидальным дрифтом, дивергенция которого имеет определенный знак. Отметим, что если для гладкого дрифта знак его дивергенции несущественен для свойств соответствующего эллиптического оператора (благодаря принципу максимума), в случае негладкого дрифта ситуация обратная. Причина заключается в том, что если в одном случае конвективный член обеспечивает положительную "добавку" к квадратичной форме оператора (тем самым как бы "сдвигая" его "от спектра"), то в другом случае оказывается, что в классе слабых решений нарушается теорема единственности и соответствующий эллиптический оператор обладает нетривиальным корневым подпространством.

Общая теория разрешимости начально-краевых задач для параболических уравнений с регулярными коэффициентами была развита в середине XX века, см. обзор результатов в монографии О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова и Н.Н. Уральцевой. Изучение проблем единственности слабых решений при минимальных условиях на гладкость дрифта восходит к работам В.В. Жикова (эллиптический случай) и Q.S. Zhang (параболический случай), которые в 2004 году установили однозначную разрешимость краевых и начально-краевых задач (с условием Дирихле на границе) для соленоидального дрифта из простраства L_2. Отметим, что принадлежность дрифта пространству L_2 является минимальным требованием, при котором корректно определение слабого решения из энергетического класса W^1_2. Естественно предположить, что в случае несоленоидального дрифта с дивергенцией "хорошего" знака (т.е. в "неспектральном" случае) соответствующая теория должна быть аналогична случаю соленоидального дрифта. Однако, насколько мне известно, до сих пор соответствующее исследование проделано не было. Разработка данной теории и была предложена М. Глазкову в качестве дипломной работы.

Отметим, что центральное место в соответствующей теории занимает теорема единственности в классе слабых решений. При наличии теоремы единственности, существование решений доказывается методом регуляризации на основе априорных оценок гладких решений. Однако доказательство единственности при минимальных условиях на гладкость дрифта, на мой взгляд, является далеко не тривиальной задачей (теоремы единственности в различных классах слабых решений для тех или иных уравнений, как правило, именные — в качестве примера приведем теорию DiPerna–Lions для слабых решений уравнения переноса, теорему Кружкова для слабых решений скалярных законов сохранения, теорему Crandall–Evans–Lions для вязкостных решений уравнений Гамильтона–Якоби и многие другие результаты). В частности, в работе Н.Д. Филонова и Т.Н. Шилкина, посвященной эллиптическим уравнениям с соленоидальным дрифтом (развитием которой в определенном смысле является работа М. Глазкова), доказательству единственности отведен отдельный параграф.

Михаил Глазков блестяще справился с поставленной ему задачей. Особенно хочу подчеркнуть, что доказательство единственности слабых решений, найденное М. Глазковым, является оригинальным и принципиально отличается от подхода, основанного на двойственности и применявшегося в предшествовавших работах [Q. S. Zhang] и [Н.Д. Филонов, Т.Н. Шилкин]. Доказанные им оценки убывания L_1–нормы решений внешне, скорее, напоминают оценки С.Н. Кружкова для слабых решений законов сохранения (хотя технически они получаются совершенно иначе). К минимальным (совершенно несущественным) недостаткам диплома я бы мог отнести недостаточно выделенную роль результатов [A. Porretta], на которые опирается доказательство М. Глазкова, а также некоторую вычурность языка (“цельная теория” итд).

Я считаю, что данная работа безусловно заслуживает оценки “отлично”, а её автор — присвоения степени бакалавра. Вопрос о возможности публикации полученных в дипломе результатов в данный момент прорабатывается.

22.05.23

кандидат ф.-м. наук, в.н.с. ПОМИ РАН
Н. Д. Филонов