Санкт-Петербургский государственный университет

ГЛАЗКОВ Михаил Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

О слабых решениях параболических уравнений с негладким дрифтом

Уровень образования:
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2019 «Математика»

Научный руководитель:
Доцент, СПбГУ, к.ф.-м.н.
Филонов Николай Дмитриевич

Рецензент:
Главный научный сотрудник,
ПОМИ РАН, д.ф-м.н.
Серёгин Григорий Александрович

Санкт-Петербург
2023 год

Содержание

1 Введение

В данной работе мы изучаем слабые решения параболического уравнения в частных производных с дрифтом, где под дрифтом подразумевается «скорость сноса» (то есть коэффициент при первых частных производных по пространственным переменным). Особенный интерес к изучению таких уравнений возникает в гидродинамике, где в качестве дрифта выступает само поле скоростей жидкости. Исторический обзор, а также всеобъемлющее изложение классических результатов, касающихся однозначной разрешимости тех или иных задач в энергетическом классе, содержится в монографии [7]. Большинство этих результатов получено в предположении о достаточной «гладкости» дрифта, например, его существенной ограниченности (в нашей работе существенно ограниченный дрифт будет называться *регулярным*). При ослаблении условия регулярности дрифта теряется информация о слабой производной по времени решения, а также теряется классическое энергетическое тождество, возникает вопрос о единственности решений из энергетического класса. Поэтому в случае сингулярного (то есть нерегулярного) дрифта Теорема единственности начинает играть ключевую роль.

Благодаря разложению Гельмгольца для любого дрифта мы можем выделить его соленоидальную и потенциальную части. Изучению свойств слабых решений для уравнений с соленоидальным дрифтом посвящены работы [1], [8], [11], [12], [13], [15] (см. также [2], [5]). В случае потенциального дрифта часто дополнительно предполагают неположительность дивергенции в обобщённом смысле, в таком случае билинейная форма, соответствующая конвективному члену, обеспечивает неотрицательную добавку к квадратичной форме оператора, результаты о слабых решениях при условии дрифта с неположительной дивергенцией можно найти в [9] (см. также [3]).

В нашей работе внимание также сконцентрировано на дрифте, обладающем неположительной дивергенцией. При этом формальной целью для нас является получение существования и единственности слабого решения, что позволяет говорить о цельной теории. Своего рода побочным (но от этого не менее интересным) результатом в нашей работе оказывается существенная ограниченность слабого решения при существенно ограниченном начальном данном. Отличие нашей работы во многом состоит в подходе к задаче: ключевым местом, на наш взгляд, является невозрастание L_1-нормы слабого решения по времени.

2 Постановка задачи и основные результаты

Пусть $n \geqslant 2$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times [0, T)$. В данной работе исследуется начально-краевая задача

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla u \cdot b = 0 \ \text{ в } \ Q_T, \\ u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где функции $u_0 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ (начальное данное), $b \colon Q_T \to \mathbb{R}^n$ (дрифт) заданы, а функция $u \colon Q_T \to \mathbb{R}$ неизвестна.

Предполагаем дополнительно

$$u_0 \in L_2(\Omega), \qquad b \in L_2(Q_T).$$

В таком случае корректно определение слабого решения (см. обозначения функциональных пространств в конце текущего раздела):

Определение 2.1. Пусть $b \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$. Будем называть функцию u *слабым решением* уравнения (2.1), если

$$u \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_2(\Omega)),$$

а также выполнено следующее интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_T} (-u\partial_t\eta + \nabla u \cdot \nabla\eta + \nabla u \cdot b\eta) \, dxdt = \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x, 0) \, dx, \tag{2.2}$$

при любом $\eta \in C_0^\infty(\Omega \times [0, T))$.

В качестве дополнения к предложенному определению приведём Лемму о расширении класса пробных функций (доказательство см. в разделе 8):

Лемма 2.1. *Предположим $b \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, u — слабое решение уравнения* (2.1), *тогда выполнено*

$$\int\limits_{Q_T} (-u\partial_t\eta + \nabla u \cdot \nabla\eta + \nabla u \cdot b\eta) \, dxdt = \int\limits_{\Omega} u_0\eta|_{t=0} \, dx, \tag{2.3}$$

при любом $\eta \in W^{1,1}_2(Q_T) \cap L_\infty(Q_T)$, $\eta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0$, $\eta|_{t=T} = 0$.

В данной работе дополнительным предположением о дрифте будет являться неположительность дивергенции

$$\operatorname{div} b \leqslant 0 \text{ в } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{2.4}$$

Это означает следующее:

$$\int\limits_{Q_T} b \cdot \nabla\eta \, dxdt \geqslant 0, \qquad \text{при } \eta \in \mathcal{D}(Q_T), \qquad \eta \geqslant 0.$$

Замечание 2.1. Пусть $b \in L_2(Q_T)$, тогда условие (2.4) равносильно

$$\operatorname{div} b(t) \leqslant 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega), \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T], \tag{2.5}$$

а также равносильно условию

$$\int\limits_{Q_T} b \cdot \nabla \eta \, dxdt \geqslant 0, \qquad \text{при } \eta \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)), \qquad \eta \geqslant 0.$$

В нескольких местах мы будем предполагать, что функция $b \in L_2(Q_T)$, удовлетворяющая свойству (2.4), обладает также следующим *аппроксимационным* свойством

$$\exists \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}: \qquad b_k \in C^\infty(\overline{Q_T}), \qquad b_k \to b \text{ в } L_2(Q_T), \qquad \operatorname{div} b_k \leqslant 0 \text{ в } Q_T. \tag{2.6}$$

В частности в случае звёздной области Ω, для любой функции класса $L_2(Q_T)$, удовлетворяющей свойству (2.4), выполняется и свойство (2.6) (см. Лемму 8.1 в разделе 8).

Введём операторы взятия положительной и отрицательной части:

$$v_+ := \max\{v, 0\}, \qquad v_- := -\min\{v, 0\}.$$

Теперь мы готовы сформулировать основные результаты работы.

Ключевым, на наш взгляд, является следующий факт:

Теорема 2.1 (Невозрастание L_1-нормы слабого решения по времени)**.** *Пусть $b \in L_2(Q_T)$ удовлетворяет свойству* (2.4), *$u_0 \in L_2(\Omega)$, u — слабое решение уравнения* (2.1), *тогда $u \in C([0,T];L_1(\Omega))$ и функции*

$$t \mapsto \|u(t)\|_{L_1(\Omega)}, \qquad t \mapsto \|u_+(t)\|_{L_1(\Omega)}, \qquad t \mapsto \|u_-(t)\|_{L_1(\Omega)}$$

являются невозрастающими на отрезке $[0,T]$.

Доказательство содержится в разделе 5.

Из Теоремы 2.1 несложно вывести следующие два результата (см. раздел 6):

Теорема 2.2 (Единственность)**.** *Пусть $b \in L_2(Q_T)$ удовлетворяет свойству* (2.4), *$u_0 \in L_2(\Omega)$, тогда существует не более одного слабого решения уравнения* (2.1).

Теорема 2.3 (Принцип максимума)**.** *Пусть $b \in L_2(Q_T)$ удовлетворяет свойству* (2.4), *$u_0 \in L_\infty(\Omega)$, u — слабое решение уравнения* (2.1). *Тогда $u \in C([0,T];L_1(\Omega))$ и для любого $t \in [0,T]$ $u(t) \in L_\infty(\Omega)$, а также*

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u(t) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_\Omega u_0, \qquad \operatorname*{ess\,inf}_\Omega u_0 \leqslant \operatorname*{ess\,inf}_\Omega u(t),$$

в частности, $u \in L_\infty(Q_T)$ и выполнена оценка

$$\|u\|_{L_\infty(Q_T)} \leqslant \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Мы считаем единственность и принцип максимума ожидаемыми явлениями, к которым можно подойти и с другой стороны (в частности, см. «метод дуальности» в [15] и эллиптический аналог в [5]).

Наконец, для полноты картины приводим и Теорему существования для дрифта, удовлетворяющего условию (2.4) и (2.6) (доказательство см. в разделе 7):

Теорема 2.4 (Существование). *Пусть $b \in L_2(Q_T)$ удовлетворяет свойствам* (2.4) *и* (2.6), $u_0 \in L_2(\Omega)$, *тогда существует слабое решение уравнения* (2.1), *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C(\Omega)\|u_0\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Теоремы 2.2 и 2.4 вместе дают следующий результат:

Следствие 2.1. *Пусть $b \in L_2(Q_T)$ удовлетворяет свойствам* (2.4) *и* (2.6), $u_0 \in L_2(\Omega)$, *тогда существует и единственно слабое решение уравнения* (2.1).

Не упомянутые ранее разделы устроены следующим образом: в разделе 3 мы вводим определение усреднения по Стеклову и выводим интегральное тождество для усреднения по Стеклову решения, раздел 4 содержит информацию о слабых производных по времени решения и усреднения по Стеклову решения.

В работе используются следующие обозначения:

S_T — боковая граница цилиндра Q_T, то есть множество $\partial\Omega \times [0,T]$. $Q_{-T,T} := \Omega \times (-T,T)$.

$C_0^\infty(\Omega \times [0,T)) := \{u \in C^\infty(\Omega \times [0,T))\colon \operatorname{supp} u \subset \Omega \times [0,T)\}$, тем самым функции класса $C_0^\infty(\Omega \times [0,T))$ могут иметь ненулевые значения на множестве $\{t = 0\}$.

Для банахова пространства X определим следующие пространства (банаховы) сильноизмеримых X-значных функций на отрезке $[0,T]$:

$$L_p(0,T;X) := \left\{u\colon \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty\right\}, \qquad \text{при } p \in [1,\infty),$$
$$L_\infty(0,T;X) := \left\{u\colon \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X < \infty\right\},$$
$$C([0,T];X) := \left\{u\colon \forall t \in [0,T]\ u(t) \in X \text{ и } \|u(t) - u(t_0)\|_X \xrightarrow{t\to t_0} 0\right\},$$

с нормами

$$\|u\|_{L_p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{при } p \in [1,\infty),$$
$$\|u\|_{L_\infty(0,T;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X, \qquad \|u\|_{C([0,T];X)} := \|u\|_{L_\infty(0,T;X)}.$$

Функцию $u\colon [0,T] \to X$ (где X — банахово) будем называть слабо непрерывной, если для любого $w \in X^*$ следующая функция непрерывна

$$t \in [0,T] \to \langle u(t), w\rangle_X.$$

Множество всех слабо непрерывных функций со значением в X будем называть $C_w([0,T];X)$.

Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, причём $X \hookrightarrow Z$ и $Y \hookrightarrow Z$, тогда

$$X + Y := \{x + y\colon x \in X, y \in Y\}.$$

Пусть S — область в евклидовом пространстве (не обязательно ограниченная), тогда $W_p^l(S)$ — стандартное пространство Соболева, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(S)$ — замыкание в $W_p^l(S)$ линейного подмножества $\mathcal{D}(S)$.

$W_2^{1,0}(Q_T) := L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — связное множество, введём $W_2^{1,1}(S) := \{u \in L_2(S)\colon \partial_t u \in L_2(S),\ \nabla u \in L_2(S)\}$, для $u \in W_2^{1,1}(S)$ функция $u|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$ — след функции u на множестве Γ, где в качестве Γ может выступать любая кусочно-гладкая поверхность размерности n, вложенная в S (в том числе для $S = Q_T$ используются $\Gamma = \partial Q_T$, $\{t = const\}$, S_T).

3 Вспомогательные результаты

Для функции $u \in L_1(Q_T)$ и любого $0 < h < T$ определим *усреднение по Стеклову*:

$$u_h(x,t) := \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} u(x,s)\ ds, \qquad x \in \Omega, \qquad t \in [0, T-h].$$

Следующая Лемма об усреднениях по Стеклову широко известна (см., например, [7, Глава II, Лемма 4.7]):

Лемма 3.1. *Пусть $u \in W_2^{1,0}(Q_T) \cap L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $0 < h < T$, тогда усреднение по Стеклову $u_h \in W_2^{1,1}(Q_{T-h})$, причём*

$$\partial_t u_h(x,t) = \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h}, \qquad \partial_{x_j} u_h(x,t) = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} \partial_{x_j} u(x,s)\ ds, \tag{3.1}$$

кроме того, при $0 < h < s \leqslant T$

$$\|u_h - u\|_{W_2^{1,0}(Q_{T-s})} \to 0, \qquad \text{при } h \to 0.$$

Замечание 3.1. Из второй части формулы (3.1) следует, что в условиях Леммы 3.1 усреднение по Стеклову и производные по пространственным переменным в смысле Соболева коммутируют (в Q_{T-h}).

Легко также видеть из первой части формулы (3.1), что при $u \in W_2^{1,1}(Q_T)$ усреднение по Стеклову и производная по времени в смысле Соболева коммутируют (в Q_{T-h}).

Для усреднения по Стеклову слабого решения можно выписать своё интегральное тождество:

Лемма 3.2. *Пусть $b \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, u — слабое решение уравнения (2.1), тогда выполнено*

$$\int\limits_{Q_{T-h}} (\partial_t u_h \eta + \nabla u_h \cdot \nabla \eta + (\nabla u \cdot b)_h \eta)\ dxdt = 0, \tag{3.2}$$

при $0 < h < T$, $\eta \in W_2^{1,1}(Q_{T-h}) \cap L_\infty(Q_{T-h})$, $\eta|_{S_{T-h}} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию

$$\zeta \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L_\infty(Q_T), \qquad \zeta|_{t \geqslant T-h} = 0, \qquad \zeta|_{t=0} = 0, \qquad \zeta|_{S_{T-h}} = 0.$$

Распространим ζ нулём на отрицательные моменты времени и введём модификацию ζ

$$\zeta_{\overline{h}}(x,t) = \int\limits_{t-h}^{t} \zeta(x,s)ds, \qquad \zeta_{\overline{h}} \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L_\infty(Q_T), \qquad \zeta_{\overline{h}}|_{\partial Q_T} = 0.$$

Используем $\zeta_{\overline{h}}$ в качестве пробной функции в тождестве (2.3) (что возможно по Лемме 2.1)

$$\int\limits_{Q_T} \left(-u\partial_t\zeta_{\overline{h}} + \nabla u \cdot \nabla\zeta_{\overline{h}} + \nabla u \cdot b\zeta_{\overline{h}}\right) dxdt = 0. \tag{3.3}$$

Легко видеть выполнение следующей формулы при $v \in L_1(Q_T)$

$$\int\limits_{Q_T} v\zeta_{\overline{h}}\, dxdt = \int\limits_{Q_{T-h}} v_h\zeta\, dxdt. \tag{3.4}$$

Используя перестановочность производной и усреднения по Стеклову (см. Замечание 3.1), а также формулу (3.4), преобразуем (3.3)

$$\int\limits_{Q_{T-h}} \left(\partial_t u_h\zeta + \nabla u_h \cdot \nabla\zeta + (\nabla u \cdot b)_h\zeta\right) dxdt = 0. \tag{3.5}$$

Полученный результат близок к желаемому, остаётся ослабить условия на пробную функцию.

Рассмотрим произвольную функцию

$$\eta \in W_2^{1,1}(Q_{T-h}) \cap L_\infty(Q_{T-h}), \qquad \eta|_{S_{T-h}} = 0,$$

вместе с последовательностью функций $\eta\xi_k$, где

$$\xi_k(t) = \begin{cases} kt & \text{при } t \in [0, \frac{1}{k}], \\ 1 & \text{при } t \in [\frac{1}{k}, T-h-\frac{1}{k}], \\ k(T-h-t) & \text{при } t \in [T-h-\frac{1}{k}, T-h], \end{cases} \qquad \frac{2}{k} \leqslant T-h.$$

Легко видеть, что $\eta\xi_k$ может быть подставлена в качестве ζ в тождество (3.5)

$$\int\limits_{Q_{T-h}} \left(\partial_t u_h\eta\xi_k + \nabla u_h \cdot \nabla\eta\xi_k + (\nabla u \cdot b)_h\eta\xi_k\right) dxdt = 0.$$

Для получения тождества (3.2) остаётся перейти к пределу при $k \to \infty$ (переход к пределу стандартный с использованием Теоремы Лебега о мажорируемой сходимости). $\square$

4 Слабая производная решения по времени

Интегральное тождество (2.3) может быть переформулировано в поточечном виде с помощью слабой производной по времени:

Лемма 4.1 (Поточечная версия интегрального тождества для решения)**.** *Пусть* $b \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, u *— слабое решение уравнения* (2.1), *тогда существует слабая производная по времени*

$$\partial_t u \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega)) + L_1(Q_T) \subset L_1\left(0,T; \left(L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^*\right),$$

удовлетворяющая при п.в. $t \in [0,T]$ *уравнению*

$$\langle \partial_t u(t), w \rangle = -(\nabla u(t), \nabla w) - \int\limits_\Omega \nabla u(t) \cdot b(t) w \; dx, \qquad \forall w \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{4.1}$$

Доказательство. Зададим два элемента $L_1\left(0,T; \left(L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^*\right)$:

- $F_u \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))$ задан при п.в. $t \in [0,T]$ соответственно формуле
$$\langle F_u(t), \eta \rangle = -(\nabla u(t), \nabla \eta), \qquad \text{при } \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$
- $f_u \in L_1(Q_T)$ задан при п.в. $t \in [0,T]$ соответственно формуле
$$f_u(t) = -\nabla u(t) \cdot b(t).$$

Докажем, что $F_u + f_u$, как элемент $L_1\left(0,T; \left(L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^*\right)$, является слабой производной u, отсюда все заявленные утверждения выполняются автоматически.

Для этого рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty((0,T))$ и проверим равенство

$$\int\limits_0^T u(t)\varphi'(t) \; dt = -\int\limits_0^T (F_u + f_u)(t)\varphi(t) \; dt, \tag{4.2}$$

где обе части рассматриваются, как элементы $\left(L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^*$.

Действия элементов $L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ на элементы $\left(L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)^*$ разделяет точки, поэтому достаточно проверить равенство (4.2) в смысле действия на пробные функции пространства $L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Пусть $w \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, тогда, ввиду (2.3),

$$\int\limits_0^T (u(t), w)_{L_2(\Omega)}\varphi'(t) \; dt = \int\limits_{Q_T} \nabla u \cdot \nabla w \varphi \; dxdt + \int\limits_{Q_T} b \cdot \nabla u w \varphi \; dxdt$$
$$= -\int\limits_0^T \langle (F_u + f_u)(t), w \rangle \varphi(t) \; dt,$$

чего и хотелось. $\square$

Следующая Лемма показывает, что слабое решение обладает непрерывностью и слабой непрерывностью по времени в L_1-норме и L_2-норме соответственно.

Лемма 4.2. *Пусть* $b \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, u *— слабое решение уравнения* (2.1), *тогда*

$$u \in C([0,T]; L_1(\Omega)) \cap C_w([0,T]; L_2(\Omega)),$$

в частности, корректно задана функция $u(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ *для любого* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Из [10, Theorem 1.1] в том числе следует, что любая функция класса $L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, имеющая слабую производную класса $L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega)) + L_1(Q_T)$, является элементом $C([0,T]; L_1(\Omega))$.

Отсюда и из Леммы 4.1 $u \in C([0,T]; L_1(\Omega))$.

Кроме того, ввиду [14, Глава III, Лемма 1.4], из

$$u \in C([0,T]; L_1(\Omega)) \cap L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$$

получаем $u \in C_w([0,T]; L_2(\Omega))$. □

Дополним поточечное уравнение для слабого решения u совпадением начального данного u_0 и функции $u|_{t=0}$ (корректно определена ввиду Леммы 4.2) в смысле п.в.:

Лемма 4.3. *Пусть* $b \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, u *— слабое решение уравнения* (2.1), *тогда* $u_0 = u|_{t=0}$ *в смысле п.в. в* Ω.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $w \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и последовательность функций $\eta_k(x,t) = w(x)\xi_k(t)$,

$$\xi_k(t) = \begin{cases} 1 - kt & \text{при } t \in [0, \frac{1}{k}], \\ 0 & \text{при } t \in [\frac{1}{k}, T], \end{cases} \qquad \frac{1}{k} \leqslant T, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Используем η_k в качестве пробной функции в уравнении (2.3) (что возможно по Лемме 2.1)

$$\int\limits_{Q_{\frac{1}{k}}} (kuw + \nabla u \cdot \nabla w \xi_k + \nabla u \cdot b w \xi_k)\, dxdt = \int\limits_\Omega u_0 w\, dx.$$

Устремляя $k \to \infty$, ввиду $u \in C([0,T]; L_1(\Omega))$ из Леммы 4.2, получаем

$$\int\limits_\Omega u|_{t=0} w\, dx = \int\limits_\Omega u_0 w\, dx,$$

значит $u_0 = u|_{t=0}$ в смысле $\big(L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\big)^*$, так как при этом оба u_0 и $u|_{t=0}$ элементы $L_1(\Omega)$, то имеем совпадение п.в. □

Переформулируем также интегральное тождество (3.2):

Лемма 4.4 (Поточечная версия интегрального уравнения для усреднения по Стеклову решения)**.** *Пусть* $b \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, u *— слабое решение уравнения* (2.1), $0 < h < T$, *тогда при п.в.* $t \in [0, T-h]$ *выполнено*

$$(\partial_t u_h(t), w) = -(\nabla u_h(t), \nabla w) - \int\limits_\Omega (\nabla u \cdot b)_h(t) w\, dx, \qquad \forall w \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega). \quad (4.3)$$

Доказательство. Зададим два элемента из $L_1\Big(0,T-h;\big(L_\infty(\Omega)\cap \mathring{W}^1_2(\Omega)\big)^*\Big)$:

- $F_{u_h}\in L_2(0,T-h;W_2^{-1}(\Omega))$ задан при п.в. $t\in[0,T-h]$ соответственно формуле

$$\langle F_{u_h}(t),\eta\rangle = -(\nabla u_h(t),\nabla\eta), \qquad \text{при } \eta\in \mathring{W}^1_2(\Omega),$$

- $f_{u_h}\in L_1(Q_{T-h})$ задан при п.в. $t\in[0,T-h]$ соответственно формуле

$$f_{u_h}(t) = -(\nabla u\cdot b)_h(t).$$

Докажем, что $F_{u_h}+f_{u_h}$, как элемент $L_1\Big(0,T-h;\big(L_\infty(\Omega)\cap \mathring{W}^1_2(\Omega)\big)^*\Big)$, является слабой производной u_h, отсюда уравнение (4.3) выполняется автоматически.

Для этого рассмотрим произвольную функцию $\varphi\in C_0^\infty((0,T-h))$ и проверим равенство

$$\int\limits_0^{T-h} u_h(t)\varphi'(t)\,dt = -\int\limits_0^{T-h}(F_{u_h}+f_{u_h})(t)\varphi(t)\,dt, \tag{4.4}$$

где обе части рассматриваются, как элементы $\big(L_\infty(\Omega)\cap \mathring{W}^1_2(\Omega)\big)^*$.

Действия элементов $L_\infty(\Omega)\cap \mathring{W}^1_2(\Omega)$ на элементы $\big(L_\infty(\Omega)\cap \mathring{W}^1_2(\Omega)\big)^*$ разделяет точки, поэтому достаточно проверить равенство (4.4) в смысле действия на пробные функции пространства $L_\infty(\Omega)\cap \mathring{W}^1_2(\Omega)$.

Пусть $w\in L_\infty(\Omega)\cap \mathring{W}^1_2(\Omega)$, тогда, ввиду (3.2),

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{T-h}(u_h(t),w)_{L_2(\Omega)}\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{Q_{T-h}}\nabla u_h\cdot\nabla w\varphi\,dxdt + \int\limits_{Q_{T-h}}(b\cdot\nabla u)_h w\varphi\,dxdt \\ = -\int\limits_0^{T-h}\langle (F_{u_h}+f_{u_h})(t),w\rangle\varphi(t)\,dt,\end{aligned}$$

чего и хотелось. □

5 Невозрастание $\mathbf{L_1}$-нормы слабого решения по времени

Перед доказательством Теоремы 2.1 рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

Введём оператор срезки:

$$T_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v\leqslant 0,\\ s, & 0<v<\delta,\\ \delta, & v\geqslant\delta.\end{cases}$$

Для срезки слабого решения можно заметить следующее свойство:

Лемма 5.1. *Пусть* $b \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, u *— слабое решение уравнения* (2.1), $0 < h < T$, $0 < \delta < \infty$, *тогда выполнено*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|T_\delta(u_h(t))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta\int\limits_\Omega (u_h(t)-\delta)_+ \, dx\right) = -\|\nabla T_\delta(u_h(t))\|^2_{L_2(\Omega)} \\ - \int\limits_\Omega (\nabla u\cdot b)_h(t) T_\delta(u_h(t)) \, dx, \qquad \textit{при п.в. } t \in [0, T-h]. \tag{5.1}$$

Доказательство. Подставим $\eta = T_\delta(u_h(t))$ в качестве пробной функции в тождество (4.3)

$$(\partial_t u_h(t), T_\delta(u_h(t))) = -(\nabla u_h(t), \nabla T_\delta(u_h(t))) \\ - \int\limits_\Omega (\nabla u\cdot b)_h(t) T_\delta(u_h(t)) \, dx, \qquad \text{при п.в. } t \in [0, T-h].$$

Разобьём u_h на слагаемые $(u_h-\delta)_+$, $T_\delta(u_h)$ и $\min\{u_h, 0\}$, преобразовав полученные слагаемые

$$(\partial_t T_\delta(u_h(t)), T_\delta(u_h(t))) + \delta\int\limits_\Omega \partial_t(u_h-\delta)_+ \, dx = -\|\nabla T_\delta(u_h(t))\|^2_{L_2(\Omega)} \\ - \int\limits_\Omega (\nabla u\cdot b)_h(t) T_\delta(u_h(t)) \, dx, \qquad \text{при п.в. } t \in [0, T-h]. \tag{5.2}$$

- Ввиду $T_\delta(u_h) \in W_2^{1,1}(Q_{T-h})$, функция $t \mapsto \|T_\delta(u_h(t))\|^2_{L_2(\Omega)}$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, T-h]$ и $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|T_\delta(u_h(t))\|^2_{L_2(\Omega)} = (\partial_t T_\delta(u_h(t)), T_\delta(u_h(t)))_{L_2(\Omega)}$ при п.в. $t \in [0, T-h]$. Соответственно чему преобразуем первое слагаемое (5.2).

- Ввиду $(u_h-\delta)_+ \in W_2^{1,1}(Q_{T-h})$, функция

  $$t \mapsto \int\limits_\Omega (u_h(t)-\delta)_+ \, dx$$

  абсолютно непрерывна на отрезке $[0, T-h]$ и

  $$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega (u_h(t)-\delta)_+ \, dx = \int\limits_\Omega \partial_t(u_h(t)-\delta)_+ \, dx, \qquad \text{при п.в. } t \in [0, T-h].$$

  Соответственно чему преобразуем второе слагаемое (5.2).

Применив заявленные преобразования, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|T_\delta(u_h(t))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta\int\limits_\Omega (u_h(t)-\delta)_+ \, dx\right) = -\|\nabla T_\delta(u_h(t))\|^2_{L_2(\Omega)} \\ - \int\limits_\Omega (\nabla u\cdot b)_h(t) T_\delta(u_h(t)) \, dx, \qquad \text{при п.в. } t \in [0, T-h], \tag{5.3}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Равенство (5.1) может быть использовано для получения неравенства для срезки решения:

Лемма 5.2 (Основное неравенство). *Пусть* $b \in L_2(Q_T)$ *удовлетворяет свойству* (2.4), $u_0 \in L_2(\Omega)$, u *— слабое решение уравнения* (2.1), $0 < \delta < \infty$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, *тогда* $u \in C([0,T]; L_1(\Omega))$ *и выполнено*

$$\frac{1}{2}\|T_\delta(u(t_2))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta \int\limits_\Omega (u(t_2) - \delta)_+ \, dx \leqslant \frac{1}{2}\|T_\delta(u(t_1))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta \int\limits_\Omega (u(t_1) - \delta)_+ \, dx. \quad (5.4)$$

Доказательство. $u \in C([0,T]; L_1(\Omega))$ показано в Лемме 4.2, надо показать (5.4).

Рассмотрим произвольные $0 < h < s < T$. Проинтегрируем на отрезке $[t_1, t_2] \subset [0, T - s]$ равенство (5.1)

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|T_\delta(u_h(t_2))\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|T_\delta(u_h(t_1))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta \int\limits_\Omega (u_h(t_2) - \delta)_+ \, dx \\ -\delta \int\limits_\Omega (u_h(t_1) - \delta)_+ \, dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \|\nabla T_\delta(u_h(t))\|^2_{L_2(\Omega)} \, dt - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (\nabla u \cdot b)_h T_\delta(u_h) \, dxdt.\end{gathered} \quad (5.5)$$

Легко видеть, что при $h \to 0$ имеем $u_h(t) \to u(t)$ в $L_1(\Omega)$ (ввиду $u \in C([0,T]; L_1(\Omega))$ из Леммы 4.2) при $t \in [0, T - s]$. Поэтому при $h \to 0$ выполнены также стремления:

- $T_\delta(u_h(t)) \to T_\delta(u(t))$ в $L_1(\Omega)$ (так как срезка является сжимающим нелинейным оператором),
- $T_\delta(u_h(t)) \to T_\delta(u(t))$ в $L_2(\Omega)$ (так как для равномерно ограниченных функций сходимость в L_2 и L_1 эквивалентны),
- $(u_h(t) - \delta)_+ \to (u(t) - \delta)_+$ в $L_1(\Omega)$ (так как взятие положительной части также является сжимающим нелинейным оператором).
- $$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (\nabla u \cdot b)_h T_\delta(u_h) \, dxdt \to \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \nabla u \cdot b T_\delta(u) \, dxdt,$$
  так как
  $$\begin{aligned}&\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega (\nabla u \cdot b)_h T_\delta(u_h) \, dxdt - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \nabla u \cdot b T_\delta(u) \, dxdt \\ &\quad = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \big((\nabla u \cdot b)_h - \nabla u \cdot b\big) T_\delta(u_h) \, dxdt - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \nabla u \cdot b\big(T_\delta(u_h) - T_\delta(u)\big) \, dxdt,\end{aligned}$$
  где первый интеграл стремится к 0, ввиду того, что $(\nabla u \cdot b)_h \to \nabla u \cdot b$ в $L_1(Q_{T-s})$ и $\|T_\delta(u_h)\|_{L_\infty(Q_{T-s})} \leqslant \delta$, а второй интеграл интеграл стремится к 0 по Теореме Лебега о мажорируемой сходимости (легко видеть стремление п.в. в Q_{T-s} подынтегрального выражения к 0, а в качестве суммируемой мажоранты можно взять $2\delta \nabla u \cdot b$).

Уберём из (5.5) заведомо неположительное первое слагаемое правой части, перейдём к пределу при $h \to 0$, пользуясь заявленными выше сходимостями

$$\frac{1}{2}\|T_\delta(u(t_2))\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|T_\delta(u(t_1))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta\int\limits_\Omega (u(t_2)-\delta)_+\,dx - \delta\int\limits_\Omega (u(t_1)-\delta)_+\,dx \leqslant -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \nabla u\cdot bT_\delta(u)\,dxdt.$$

Заметим неположительность правой части

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega b\cdot\nabla u T_\delta(u)\,dxdt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega b\cdot\nabla T_\delta(u)T_\delta(u)\,dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega b\cdot\nabla(u-\delta)_+T_\delta(u)\,dxdt$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega b\cdot\nabla(T_\delta(u))^2\,dxdt + \delta\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega b\cdot\nabla(u-\delta)_+\,dxdt \geqslant 0,$$

где в последнем переходе пользуемся Замечанием 2.1, а также тем, что $(u(t)-\delta)_+ \geqslant 0$, $(T_\delta(u(t)))^2 \geqslant 0$, $(u(t)-\delta)_+ \in \mathring{W}^1_2(\Omega)$, $(T_\delta(u(t)))^2 \in \mathring{W}^1_2(\Omega)$ при п.в. $t \in [t_1, t_2]$.

Таким образом выполняется

$$\frac{1}{2}\|T_\delta(u(t_2))\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|T_\delta(u(t_1))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta\int\limits_\Omega (u(t_2)-\delta)_+\,dx - \delta\int\limits_\Omega (u(t_1)-\delta)_+\,dx \leqslant 0.$$

То есть

$$\frac{1}{2}\|T_\delta(u(t_2))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta\int\limits_\Omega (u(t_2)-\delta)_+\,dx \leqslant \frac{1}{2}\|T_\delta(u(t_1))\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta\int\limits_\Omega (u(t_1)-\delta)_+\,dx,$$

при $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T-s$. Устремляя s к 0, получаем выполнение (5.4) при $0 \leqslant t_1 < t_2 < T$. Для получения (5.4) при $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ остаётся перейти к пределу при $t_2 \to T$ (возможно, ввиду $(u-\delta)_+ \in C([0,T;L_1(\Omega)])$ и $T_\delta(u) \in C([0,T];L_2(\Omega))$). $\square$

Наконец, перейдём к доказательству главного результата раздела:

Доказательство Теоремы 2.1. $u \in C([0,T];L_1(\Omega))$ получено в Лемме 4.2, остаётся показать невозрастание заявленных функций.

Рассмотрим произвольные $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, $0 < \delta < \infty$, подставим в неравенство (5.4), поделив на δ

$$\frac{\|T_\delta(u(t_2))\|^2_{L_2(\Omega)}}{2\delta} + \int\limits_\Omega (u(t_2)-\delta)_+\,dx \leqslant \frac{\|T_\delta(u(t_1))\|^2_{L_2(\Omega)}}{2\delta} + \int\limits_\Omega (u(t_1)-\delta)_+\,dx. \qquad (5.6)$$

Рассмотрим первые слагаемые в обеих частях полученного неравенства

$$\frac{\|T_\delta(u(t))\|^2_{L_2(\Omega)}}{2\delta} \leqslant \frac{1}{2}\delta|\Omega| \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Поэтому при переходе к пределу при $\delta \to 0$ неравенство (5.6) переходит в неравенство

$$\|u_+(t_2)\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \|u_+(t_1)\|_{L_1(\Omega)}.$$

Имеем невозрастание $t \mapsto \|u_+(t)\|_{L_1(\Omega)}$, отсюда легко видеть также невозрастание $t \mapsto \|u_-(t)\|_{L_1(\Omega)}$ (применяем аналогичные рассуждения для $-u$, как решения начально-краевой задачи (2.1) с начальным данным $-u_0$, дрифтом b).

Так как $\|u(t)\|_{L_1(\Omega)} = \|u_+(t)\|_{L_1(\Omega)} + \|u_-(t)\|_{L_1(\Omega)}$, выполнено условие невозрастания функции $t \mapsto \|u(t)\|_{L_1(\Omega)}$. Тем самым проверено невозрастание всех заявленных функций. □

6 Теорема единственности в классе слабых решений и принцип максимума

Доказательство Теоремы 2.2. Пусть u и v — два слабых решения уравнения (2.1) ($u, v \in C([0,T]; L_1(\Omega))$ по Лемме 4.2). Докажем, что $u = v$ п.в.

Пусть $w = u - v$, тогда $w \in C([0,T]; L_1(\Omega))$ — слабое решение уравнения (2.1) с нулевым начальным данным и дрифтом $b \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющим свойству (2.4).

Тогда $t \mapsto \|w(t)\|_{L_1(\Omega)}$ — невозрастающая по времени функция (ввиду Теоремы 2.1), равная 0 в начальный момент времени (ввиду Леммы 4.3). Значит для любого $t \in [0,T]$ $\|w(t)\|_{L_1(\Omega)} = 0$. Итого $u = v$ п.в., что и хотели доказать. □

Доказательство Теоремы 2.3. $u \in C([0,T]; L_1(\Omega))$ получено в Лемме 4.2, остаётся показать неравенства для супремумов и инфимумов.

Пусть $v := u - \operatorname{ess\,sup} u_0$, тогда $v \in C(0,T; L_1(\Omega))$ — слабое решение уравнения (2.1) (с дрифтом b, удовлетворяющим свойству (2.4), и начальным данным $u_0 - \operatorname{ess\,sup} u_0$).

Значит $\|v_+(0)\|_{L_1(\Omega)} = 0$, а следовательно $\|v_+(t)\|_{L_1(\Omega)} = 0$ для всех $t \in [0,T]$ (из невозрастания $t \mapsto \|v_+(t)\|_{L_1(\Omega)}$ по Теореме 2.1), а тогда $\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u(t) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u_0$. Неравенство для инфимумов аналогично. □

7 Существование

Предъявим равномерную оценку для слабых решений с существенно ограниченным дрифтом (удовлетворяющим свойству (2.4)):

Лемма 7.1. *Пусть $b \in L_\infty(Q_T)$ удовлетворяет свойству* (2.4), $u_0 \in L_2(\Omega)$, *тогда существует и единственно слабое решение уравнения* (2.1), *удовлетворяющее равномерному по b неравенству*

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C(\Omega)\|u_0\|_{L_2(\Omega)}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Хорошо известно, что (см., например, [7, Глава III]):

- Слабое решение u в условиях Леммы существует и единственно,

- Функция u обладает слабой производной по времени $\partial_t u \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))$,

- $\partial_t u$ при п.в. $t \in [0,T]$ удовлетворяет уравнению

$$\langle \partial_t u(t), w\rangle + (\nabla u(t), \nabla w)_{L_2(\Omega)} + (b(t)\cdot\nabla u(t), w)_{L_2(\Omega)} = 0, \qquad \forall w \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad (7.2)$$

- $u \in C([0,T]; L_2(\Omega))$,
- Функция $t \mapsto \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$ является абсолютно непрерывной на $[0,T]$,
- Выполнена формула

$$\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T]. \quad (7.3)$$

В уравнение (7.2) подставим $u(t)$ в качестве w

$$\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle + \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + (b(t)\cdot\nabla u(t), u(t))_{L_2(\Omega)} = 0, \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T].$$

Преобразуем первое слагаемое по формуле (7.3)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + (b(t)\cdot\nabla u(t), u(t))_{L_2(\Omega)} = 0, \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T]. \quad (7.4)$$

Условие (2.4) равносильно поточечной по времени версии (2.5) (см. Замечание 2.1), отсюда имеем выполнение следующего неравенства

$$(b(t)\cdot\nabla u(t), u(t))_{L_2(\Omega)} \geqslant 0, \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T].$$

Применив полученное неравенство в равенстве (7.4), выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant 0, \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T]. \quad (7.5)$$

Отсюда имеем невозрастание функции $t \mapsto \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}$ при $t \in [0,T]$, соответственно и оценку

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \leqslant \|u_0\|_{L_2(\Omega)}. \quad (7.6)$$

Также из (7.5)

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T].$$

Проинтегрировав от 0 до T, выводим

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Ввиду $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ при п.в. $t \in [0,T]$, по неравенству Пуанкаре–Фридрихса (см. [6, Глава I, Неравенство (6.3)]) получаем

$$\|u(t)\|^2_{W^1_2(\Omega)} \leqslant C(\Omega)\|\nabla u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \text{при п.в. } t \in [0,T].$$

Проинтегрировав от 0 до T, выводим

$$\|u\|^2_{W^{1,0}_2(Q_T)} \leqslant C(\Omega)\|\nabla u\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant C(\Omega)\|u(0)\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (7.7)$$

Остаётся скомбинировать оценки (7.6) и (7.7). □

Используем полученную равномерную оценку для доказательства существования:

Доказательство Теоремы 2.4. Пусть $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций для b, построенная из аппроксимационного свойства (2.6), u_k — слабое решение уравнения (2.1) с дрифтом b_k (удовлетворяющим свойству (2.4)), начальным данным u_0.

Ввиду Леммы 7.1 имеем равномерную по k оценку для u_k

$$\|u_k\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|u_k\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C(\Omega)\|u_0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда существует подпоследовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (перейдём к подпоследовательности без замены индексации), сходящаяся в слабой топологии $W_2^{1,0}(Q_T)$ к некоторой функции $u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Ввиду полунепрерывности снизу $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$-нормы и $W_2^{1,0}$-нормы относительно слабой сходимости в $W_2^{1,0}(Q_T)$, для u выполнена оценка

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C(\Omega)\|u_0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Остаётся проверить, что u является слабым решением уравнения (2.1) с дрифтом b, начальным данным u_0.

Действительно, для каждого k выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_T} (-u_k\partial_t\eta + \nabla u_k\cdot\nabla\eta + b_k\cdot\nabla u_k\eta)\; dxdt = \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x,0)\; dx, \tag{7.8}$$

при любом $\eta \in C_0^\infty(\Omega\times[0,T))$.

Перейдём к пределу при $k\to\infty$ и фиксированном η. Особого внимания заслуживает третье слагаемое левой части (7.8)

$$\int\limits_{Q_T} b_k\cdot\nabla u_k\eta\; dxdt = \int\limits_{Q_T} (b_k - b)\cdot\nabla u_k\eta\; dxdt + \int\limits_{Q_T} \nabla u_k\cdot b\eta\; dxdt,$$

при $k\to\infty$ первый интеграл стремится к 0 (так как $\|b_k - b\|_{L_2(Q_T)} \to 0$, а $\|\nabla u_k\eta\|_{L_2(Q_T)}$ равномерно ограничена), для второго интеграла выполнено

$$\int\limits_{Q_T} \nabla u_k\cdot b\eta\; dxdt \to \int\limits_{Q_T} \nabla u\cdot b\eta\; dxdt,$$

по определению слабой сходимости u_k к u в $W_2^{1,0}(Q_T)$. В остальных слагаемых (7.8) переход выполняется стандартным образом, а результатом является равенство

$$\int\limits_{Q_T} (-u\partial_t\eta + \nabla u\cdot\nabla\eta + \nabla u\cdot b\eta)\; dxdt = \int\limits_{\Omega} u_0(x)\eta(x,0)\; dx,$$

выполненное при любом $\eta \in C_0^\infty(\Omega\times[0,T))$. Таким образом u является слабым решением уравнения (2.1) по определению.

□

8 Теоремы аппроксимации

Для доказательства нескольких анонсированных ранее утверждений введём вспомогательные операторы:

- Оператор растяжения L_λ с коэффициентом $\lambda > 0$, заданный на функциях $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ по формуле
$$(L_\lambda v)(x,t) = v(\lambda x, \lambda t).$$

- Оператор усреднения по пространственной переменной, заданный на пространствах $L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ и $L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ по формуле
$$v_{x\varepsilon}(x_0, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x,t)\omega_\varepsilon(x_0 - x)\ dx.$$
где $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega(\frac{1}{\varepsilon}x)$, здесь ω положительная бесконечно-гладкая отнормированная (в $L_1(\mathbb{R}^n)$) функция с носителем в единичном шаре (в $\mathbb{R}^n$) симметричная относительно начала координат.

- Оператор усреднения по времени и по пространственной переменной, заданный на пространствах $L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ и $L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ по формуле
$$v_{x\varepsilon,t\varepsilon}(x_0, t_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} v(x,t)\omega_\varepsilon(x_0 - x)\theta_\varepsilon(t_0 - t)\ dxdt,$$
где $\omega_\varepsilon(x)$ задан, как в операторе усреденения по пространственной переменной, а $\theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\theta(\frac{1}{\varepsilon}t)$, здесь θ положительная бесконечно-гладкая отнормированная (в $L_1(\mathbb{R})$) функция с носителем в единичном шаре (в $\mathbb{R}$) симметричная относительно начала координат.

Замечание 8.1. Введённые операторы усреднения и растяжения обладают следующими общеизвестными свойствами (см., например, доказательство [4, Chapter 5.3, Theorem 3]):

- При $v \in L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ и $p \in [1, \infty)$ функции $v_{x\varepsilon}$, $v_{x\varepsilon,t\varepsilon}$, $L_\lambda v$ стремятся к v в $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ при $\varepsilon \to 0$ и $\lambda \to 1$.

- При $v \in W_p^{1,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $p \in [1, \infty)$ функции $v_{x\varepsilon}$, $v_{x\varepsilon,t\varepsilon}$, $L_\lambda v$ стремятся к v в $W_p^{1,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ при $\varepsilon \to 0$ и $\lambda \to 1$.

- При $v \in L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ выполнено
$$\|v_{x\varepsilon}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})}, \qquad \|v_{x\varepsilon,t\varepsilon}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})},$$
$$\|L_\lambda v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})} = \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

- При $v \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ функция $v_{x\varepsilon,t\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Также приведём несколько более специфичных свойств (простых, но необходимых далее)

- При $v \in \mathring{W}_2^1(Q_{-T,T})$, Ω звёздной с центром звёзности в 0 и $\lambda > 1$ выполнено

$$L_\lambda v \in \mathring{W}_2^1(Q_{-T,T}).$$

- При $v \in W_2^{1,1}(\mathbb{R}^{n+1})$, $v|_{t=0} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$L_\lambda v|_{t=0} \xrightarrow{\lambda \to 1+} v|_{t=0} \text{ в } L_1(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство Леммы 2.1. В несколько шагов ослабим требуемые условия

1. Достаточно для любой функции

$$\eta \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L_\infty(Q_T), \qquad \eta|_{S_T} = 0, \qquad \eta|_{t=T} = 0$$

(далее в доказательстве обозначаем класс таких η, как $\mathcal{N}(Q_T)$) научиться строить последовательность функций $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, обладающую следующими свойствами:

(A) $\forall k \quad \eta_k \in C^\infty(\overline{Q_T})$,

(B) $\forall k \quad \eta_k|_{S_T} = 0$ и $\eta_k|_{t=T} = 0$,

(C) $\eta_k \to \eta$ в $W_2^{1,1}(Q_T)$ при $k \to \infty$,

(D) $\eta_k|_{t=0} \to \eta|_{t=0}$ в $L_1(\Omega)$ при $k \to \infty$,

(E) $\forall k \quad \|\eta_k\|_{L_\infty(Q_T)} < C(\Omega, \|\eta\|_{L_\infty(Q_T)})$.

Действительно, при обладании такой последовательностью η_k (при фиксированном η), можно «замкнуть» интегральное тождество (2.2):

- Найдём последовательность η_k, удовлетворяющую свойствам **(A – E)**.
- Ввиду свойств **(C)** и **(D)** можно выбрать подпоследовательность η_k, которая будет сходиться к η п.в. в Q_T и п.в. на нижней границе $\{t = 0\}$ (не будем делать переиндексацию, считая изначальную последовательность уже прореженной).
- Подставим η_k в интегральное тождество (2.2) (что возможно по свойствам **(A)** и **(B)**)

$$\int\limits_{Q_T} (-u\partial_t\eta_k + \nabla u \cdot \nabla\eta_k + \nabla u \cdot b\eta_k)\, dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\eta_k(x,0)\, dx,$$

и перейдём к пределу по k (стандартный предельный переход с использованием Теоремы Лебега о мажорируемой сходимости).

Результат перехода к пределу — интегральное тождество (2.3) при выбранном η, что и хотели получить.

2. Достаточно рассматривать звёздные области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Действительно, предположим, что научились строить последовательности, удовлетворяющие свойствам **(A – E)** при условии звёздности области и кусочно-гладкости границы.

- Покроем Ω областями Ω^j ($j = 1, \ldots, N$) с кусочно-гладкими границами, так чтобы $\Omega^j \cap \Omega$ была звёздной областью для всех j.
- Рассмотрим соответствующее разбиение единицы $\zeta^j(x)$:

$$\zeta^j \in \mathcal{D}(\Omega^j), \qquad \sum_{j=1}^{N} \zeta^i \equiv 1 \text{ в окрестности } \Omega.$$

- Для функции $\eta \in \mathcal{N}(Q_T)$ введём функции $\eta^j(x,t) = \zeta^j(x)\eta(x,t)$. Тогда $\eta^j(x,t) \in \mathcal{N}(Q_T^j)$, где $Q_T^j = (\Omega^j \cap \Omega) \times [0,T)$.
- Для каждой функции η^j построим последовательность η_k^j, удовлетворяющие свойствам $(\mathbf{A}-\mathbf{E})$ в цилиндре Q_T^j.
- Легко видеть, что последовательность $\sum\limits_j \eta_k^j$ будет удовлетворять свойствам $(\mathbf{A}-\mathbf{E})$ уже в самом Q_T для функции η.

Далее считаем изначальную область Ω звёздной (с кусочно-гладкой границей).

3. Достаточно строить последовательность, удовлетворяющую свойствам $(\mathbf{A}-\mathbf{E})$, для функций $\eta \in \mathcal{N}(Q_T)$ равных 0 в окрестности $S_T \cup (\Omega \times \{T\})$ (назовём класс таких функций $\tilde{\mathcal{N}}(Q_T)$).

   Действительно, пусть SYM_T — оператор «симметрии», заданный на функциях $Q_T \to \mathbb{R}$ и $Q_T \to \mathbb{R}^n$ по формуле

$$\mathrm{SYM}_T(v)(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & \text{при } (x,t) \in Q_T, \\ v(x,-t) & \text{при } (x,-t) \in Q_T, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Пусть $\tilde{\eta} = \mathrm{SYM}_T(\eta)$, ввиду звёздности Ω и Замечания 8.1, при $\lambda > 1$ выполнено

   - $L_\lambda \tilde{\eta} \in \mathring{W}_2^1(Q_{-T,T}) \cap L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})$,
   - $L_\lambda \tilde{\eta} \xrightarrow{\lambda \to 1+} \tilde{\eta}$ в $W_2^{1,1}(\mathbb{R}^{n+1})$,
   - $L_\lambda \tilde{\eta}|_{t=0} \xrightarrow{\lambda \to 1+} \tilde{\eta}|_{t=0}$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$,
   - $\|L_\lambda \tilde{\eta}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})} = \|\tilde{\eta}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$.

   Сузившись на Q_T, получаем

   - $L_\lambda \tilde{\eta}|_{Q_T} \in \mathcal{N}(Q_T)$,
   - $L_\lambda \tilde{\eta}|_{Q_T} \xrightarrow{\lambda \to 1+} \eta$ в $W_2^{1,1}(Q_T)$,
   - $(L_\lambda \tilde{\eta}|_{Q_T})|_{t=0} \xrightarrow{\lambda \to 1+} \eta|_{t=0}$ в $L_1(\Omega)$,
   - $\|L_\lambda \tilde{\eta}|_{Q_T}\|_{L_\infty(Q_T)} = \|\eta\|_{L_\infty(Q_T)}$.

   Отсюда легко видеть, что достаточно строить заявленные последовательности (то есть удовлетворяющие свойствам $(\mathbf{A}-\mathbf{E})$) для $(L_\lambda \tilde{\eta})|_{Q_T}$. В частности, достаточно строить заявленные последовательности для функций класса $\tilde{\mathcal{N}}(Q_T)$.

4. Пусть d' — метрика максимума расстояния по времени и пространственным переменным в $\mathbb{R}^{n+1}$, то есть

$$d'((x_1,t_1),(x_2,t_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |t_1-t_2|\}.$$

Для фиксированной функции $\eta \in \tilde{\mathcal{N}}(Q_T)$ выберем ε так, что η обнуляется в ε-окрестности верхней и боковой границы в метрике d'. Пусть стандартно $\tilde{\eta} = \mathrm{SYM}_T(\eta)$.

Заявленные приближения будем искать в виде сужений усреднений $\tilde{\eta}_{x\delta,t\delta}(x_0,t_0)$ на Q_T. Зададим последовательность $\eta_k = \tilde{\eta}_{x\delta_k,t\delta_k}|_{Q_T}$ при $\delta_k < \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta_k \to 0$.

Ввиду Замечания 8.1, построенные η_k удовлетворяют условиям **(A)**, **(C)**, **(E)**. Условие **(B)**: $\tilde{\eta}_{x\delta_k,t\delta_k}$ обнуляется вне δ_k-окрестности по метрике d' носителя η, но тогда η_k обнуляется в $\frac{\varepsilon}{2}$ окрестности по метрике d' боковой и верхней границы (а значит условие **(B)** выполнено).

5. Условие **(D)**:

$$\int\limits_{\Omega} |\eta_k(x_0,0)-\eta(x_0,0)|\,dx_0 = \int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{-\delta_k}^{\delta_k}\big(\tilde{\eta}_{x\delta_k}(x_0,t)-\eta(x_0,0)\big)\theta_{\delta_k}(-t)dt\right|dx_0, \tag{8.1}$$

Оценим интеграл в правой части равенства (8.1)

$$\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{-\delta_k}^{\delta_k}\big(\tilde{\eta}_{x\delta_k}(x_0,t)-\eta(x_0,0)\big)\theta_{\delta_k}(-t)dt\right|dx_0 \leqslant \frac{\|\theta\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\delta_k}\int\limits_{-\delta_k}^{\delta_k}\|\tilde{\eta}_{x\delta_k}(t)-\eta(0)\|_{L_1(\Omega)}\,dt$$
$$\leqslant \frac{\|\theta\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\delta_k}\int\limits_{-\delta_k}^{\delta_k}\|\tilde{\eta}_{x\delta_k}(t)-\tilde{\eta}(t)\|_{L_1(\Omega)}\,dt + \frac{\|\theta\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\delta_k}\int\limits_{-\delta_k}^{\delta_k}\|\tilde{\eta}(t)-\tilde{\eta}(0)\|_{L_1(\Omega)}\,dt.$$

Первое слагаемое результата назовём I_1, второе I_2. Докажем, что I_1 и I_2 стремятся к 0 при δ_k стремящемся к 0.

$I_2 \to 0$ при $\delta_k \to 0$, ввиду $\tilde{\eta} \in C([-T,T]; L_1(\Omega))$.

Оценим $\|\tilde{\eta}_{x\delta_k}(t)-\tilde{\eta}(t)\|_{L_1(\Omega)}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{\Omega}(\tilde{\eta}(x_0-x,t)-\tilde{\eta}(x_0,t))\omega_{\delta_k}(x)\,dx\right|dx_0&\\ \leqslant \int\limits_{B_{\delta_k}}\|\tilde{\eta}(\cdot-x,t)-\tilde{\eta}(\cdot,t)\|_{L_1(\Omega)}\omega_{\delta_k}(x)\,dx.&\end{aligned} \tag{8.2}$$

Ввиду $\tilde{\eta} \in C([-T,T]; L_1(\Omega))$, имеем компактность множества $\{\tilde{\eta}(t)\}_{t\in[-T,T]}$ в пространстве $L_1(\Omega)$ (непрерывный образ компакта). Значит находимся в условиях Теоремы Арцела–Асколи, которая даёт равностепенную непрерывность семейства функций $\{\tilde{\eta}(t)\}_{t\in[-T,T]}$.

Отсюда можно продолжить оценку (8.2)

$$\int\limits_{B_{\delta_k}} \|\tilde{\eta}(\cdot - x, t) - \tilde{\eta}(\cdot, t)\|_{L_1(\Omega)} \omega_{\delta_k}(x)\ dx = \int\limits_{B_{\delta_k}} o_{\delta_k \to 0}(1) \omega_{\delta_k}(x)\ dx = o_{\delta_k \to 0}(1).$$

Отсюда имеем $I_1 \to 0$ при $\delta_k \to 0$:

$$I_1 = \frac{\|\theta\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\delta_k} \int\limits_{-\delta_k}^{\delta_k} \|(\tilde{\eta}_{x\delta_k}(t) - \tilde{\eta}(t)\|_{L_1(\Omega)}\ dt = \frac{\|\theta\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\delta_k} \int\limits_{-\delta_k}^{\delta_k} o_{\delta_k \to 0}(1)\ dt$$
$$= \|\theta\|_{L_\infty(\mathbb{R})} o_{\delta_k \to 0}(1).$$

Таким образом $\eta_k(x_0, 0) \to \eta(x_0, 0)$ в $L_1(\Omega)$, тем самым условие **(D)** проверено.

□

Лемма 8.1. *Пусть $b \in L_2(Q_T)$ удовлетворяет свойству* (2.4), Ω *— звёздная ограниченная область с кусочно-гладкой границей, тогда b удовлетворяет свойству* (2.6).

Доказательство. Будем считать, что центр звёздности Ω находится в 0. Вместо Q_T (из определения аппроксимационного свойства (2.6)) будем рассматривать $Q_{-T,T}$ (легко видеть, что это не меняет сути доказываемого утверждения):

Пусть $b \in L_2(Q_{-T,T}, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div} b \leqslant 0$ в $\mathcal{D}'(Q_{-T,T})$, продлим b нулём вне $Q_{-T,T}$ и построим последовательность $b_k \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$, такую что:

$$b_k \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \qquad \|b_k - b\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1})} \leqslant \frac{1}{k}, \qquad \operatorname{div} b_k \leqslant 0 \text{ в } Q_{-T,T}.$$

Ввиду Замечания 8.1, выполнено

$$L_\lambda b \xrightarrow{\lambda \to 1-} b \text{ в } L_2(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Будем считать λ_k столь близким к 1, что $\|L_{\lambda_k} b - b\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1})} < \frac{1}{2k}$.

Пусть $Q^{\lambda_k}_{-T,T}$ — образ $Q_{-T,T}$ под действием гомотетии с коэффициентом λ_k и центром в $(0,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Ввиду Замечания 8.1, выполнено

$$(L_{\lambda_k} b)_{x\varepsilon, t\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} L_{\lambda_k} b \text{ в } L_2(\mathbb{R}^{n+1}); \qquad (L_{\lambda_k} b)_{x\varepsilon, t\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Как и ранее, пусть d' — метрика максимума расстояния по времени и пространственным переменным в $\mathbb{R}^{n+1}$, то есть

$$d'((x_1, t_1), (x_2, t_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |t_1 - t_2|\}.$$

Будем считать ε_k столь малым, что

$$\|(L_{\lambda_k} b)_{x\varepsilon_k, t\varepsilon_k} - L_{\lambda_k} b\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1})} < \frac{1}{2k},$$

а также ε_k-окрестность в метрике d' цилиндра $Q_{-T,T}$ содержится внутри $Q^{\lambda_k}_{-T,T}$ (ε_k существует, ввиду звёздности области Ω с центром в 0).

Итого получили функцию $(L_{\lambda_k}b)_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k}$, такую что

$$\|(L_{\lambda_k}b)_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k} - b\|_{L_2(\mathbb{R}^{n+1})} < \frac{1}{k}; \qquad (L_{\lambda_k}b)_{x\varepsilon,t\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Остаётся проверить условие неположительности дивергенции построенных функций в $Q_{-T,T}$. Для это подействуем функцией $\operatorname{div}(L_{\lambda_k}b)_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k}$ на пробную функцию $\eta \in \mathcal{D}(Q_{-T,T})$, $\eta \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_{-T,T}} \operatorname{div}(L_{\lambda_k}b)_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k}\eta\, dx_0dt_0 = -\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (L_{\lambda_k}b)_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k} \cdot \nabla\eta\, dx_0dt_0 \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (L_{\lambda_k}b)(x,t)\omega_\varepsilon(x_0-x)\theta_\varepsilon(t_0-t)\, dxdt \cdot \nabla\eta(x_0,t_0)\, dx_0dt_0 \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (L_{\lambda_k}b)(x,t)\omega_\varepsilon(x-x_0)\theta_\varepsilon(t-t_0) \cdot \nabla\eta(x_0,t_0)\, dx_0dt_0\, dxdt \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (L_{\lambda_k}b) \cdot (\nabla\eta)_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k}\, dxdt = -\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (L_{\lambda_k}b) \cdot \nabla\eta_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k}\, dxdt \leqslant 0,
\end{aligned}$$

верность последнего неравенства обусловлена тем, что:

- $\eta_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k}$ является неотрицательной гладкой функцией с компактным носителем в ε_k-окрестности по метрике d' множества $Q_{-T,T}$, а значит (ввиду выбора ε_k) $\eta_{x\varepsilon_k,t\varepsilon_k} \in \mathcal{D}(Q^{\lambda_k}_{-T,T})$.
- $\operatorname{div} L_{\lambda_k}b \leqslant 0$ в $\mathcal{D}'(Q^{\lambda_k}_{-T,T})$, что легко видеть ввиду определения оператора L_λ.

□

Список литературы

[1] D. Albritton, H. Dong, *Regularity properties of passive scalars with rough divergence-free drifts*, https://arxiv.org/abs/2107.12511, 2021.

[2] M. Chernobai, T. Shilkin, *Scalar elliptic equations with a singular drift*, https://arxiv.org/abs/1911.00401v2, 2022.

[3] M. Chernobai, T. Shilkin, *Elliptic equations with a singular drift from a weak Morrey space*, https://arxiv.org/abs/2208.10909v3, 2022.

[4] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[5] N. Filonov, T. Shilkin, *On some properties of weak solutions to elliptic equations with divergence-free drifts*, Mathematical analysis in fluid mechanics-selected recent results, pp. 105-120, Contemp. Math., 710, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[6] О.А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, 1973.

[7] О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, 1967.

[8] V. Liskevich, Q. S. Zhang, *Extra regularity for parabolic equations with drift terms*, Manuscripta Math. 113, no. 2, pp. 191-209, 2004.

[9] А. И. Назаров, Н. Н. Уральцева, *Неравенство Гарнака и связанные с ним свойства решений эллиптических и параболических уравнений с бездивергентными младшими коэффициентами*, Алгебра и анализ 23, no 1, 2011

[10] A. Porretta, *Existence results for nonlinear parabolic equations via strong convergence of truncations*, Ann. Mat. Pura Appl. 177, no. 1, pp. 143–172, 1999.

[11] Y. A. Semenov, *Regularity theorems for parabolic equations*, J. Funct. Anal. 231, no. 2, pp 375-417, 2006.

[12] G. Seregin, L. Silvestre, V. Sverak, A. Zlatos, *On divergence-free drifts*, J. Differential Equations 252, no. 1, pp. 505-540, 2012.

[13] L. Silvestre, V. Vicol, *Hölder continuity for a drift-diffusion equation with pressure*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 29, no. 4, pp. 637-652, 2012.

[14] Р. Темам, *Уравнение Навье-Стокса*, Мир, 1981.

[15] Q.S. Zhang, *A strong regularity result for parabolic equations*, Commun. Math. Phys. 244, no. 2, pp. 245—260, 2004.