

Отзыв научного руководителя на выпускную квалификационную работу Игоря Владимировича Туркина “Неравенства для класса A_1 весов Макенхаупта”.

Работа посвящена изучению оценок интегральных функционалов на классе Макенхаупта A_1 на отрезке $I \subset \mathbb{R}$. Решается задача поиска оптимальной оценки среднего значения функции $f \circ w$ по отрезку I , где f — некоторая фиксированная функция, задающая интегральный функционал, а вес w имеет A_1 -характеристику не больше δ . Ответ на этот вопрос дается с помощью метода функции Беллмана, который в последнее время набирает популярность и широко используется для решения большого класса задач гармонического анализа и теории вероятностей. В работах В. И. Васюнина, А. Л. Вольберга и Л. Славина данный метод был применен к оценке специальных интегральных функционалов на пространстве ВМО, с помощью него получены точные константы в классических неравенствах для этого пространства. Позже в серии работ В. И. Васюнина, П. Б. Затицкого, П. Иванисвили, Н. Н. Осипова и Д. М. Столярова (в разных комбинациях) была разработана теория, позволяющая находить функцию Беллмана для оценки интегрального функционала на ВМО для достаточно общей функции f . В недавнем препринте получено обобщение этого результата на некоторые другие классы функций, включающие пространство ВМО, классы Макенхаупта A_p , $1 < p \leq \infty$, а также классы обратного неравенства Гельдера. Однако, случай класса A_1 , изучаемый в дипломной работе, не покрывается построенной общей теорией. Исследование функций Беллмана для класса A_1 начато в дипломной работе А. Горшановой 2018 года.

Работа, сделанная дипломантом, является развитием теории функций Беллмана для интегральных функционалов на классе A_1 . Метод решения заключается в сведении исходной экстремальной задачей на классе A_1 к поиску функции, определенной на специальной двумерной области. Эта функция удовлетворяет так называемому “основному неравенству”, определенным граничным данным, и является минимальной среди таковых. Собственно, эта функция и называется функцией Беллмана. В упомянутых выше случаях ВМО и A_p , $1 < p \leq \infty$, основное неравенство было неравенством вогнутости (или выпуклости), и функция Беллмана являлась минимальной локально вогнутой. В случае класса A_1 основное неравенство имеет другой вид — вогнутость по одной переменной и монотонность по другой.

Оказывается, что структура изучаемой функции Беллмана в существенном зависит от знака второй производной функции f . Случаи выпуклости или вогнутости функции f , а также случай одной точки смены знака второй производной с плюса на минус разобраны в работе А. Горшановой 2018 года. В настоящей работе эти случаи также разобраны со всеми подробностями (пункты 8-10), и, кроме того, устранены имеющиеся в работе А. Горшановой недочеты. В пункте 11 разобран случай одной смены знака второй производной функции f с минуса на плюс, а в пунктах 12-13 разобраны случаи двух точек смен знака второй производной функции f . В каждом из этих случаев строится так называемый кандидат на роль функции Беллмана, удовлетворяющий основному неравенству и граничным данным, и затем предьявляются

подпирающие примеры, доказывающие совпадение построенного кандидата с искомой функцией Беллмана.

В пункте 14 работы приводится описание функции Беллмана для случая, когда функция f имеет конечное количество точек смен знака второй производной, а параметр δ достаточно мал. В этом случае структура функции Беллмана может быть описана путем комбинации изученных в предыдущих пунктах конструкций. Автор ограничивается кратким описанием результата и приводит набросок доказательства, не оставляющий сомнений в истинности этого результата. По-видимому, подробное доказательство заняло бы объем, сильно превышающий подразумеваемый размер дипломной работы студента бакалавриата (аналогичная работа для ВМО занимает порядка 70 страниц).

Считаю, что проделанная дипломантом работа является важной частью построения теории функции Беллмана для оценки интегральных функционалов на классе A_1 . В работе получены новые результаты, которые можно будет опубликовать после некоторого улучшения их оформления. Хочу отметить высокий уровень самостоятельности дипломанта — мое участие в его работе было минимальным. Наличие некоторых несложно устранимых неточностей и опечаток, на мой взгляд, не умаляет содержания работы. Я рекомендую поставить оценку “отлично”.

Доктор физико-математических наук,
профессор Санкт-Петербургского государственного Университета

Белов Ю.С.