

Санкт-Петербургский государственный университет

ТУРКИН Игорь Владимирович
Выпускная квалификационная работа
Неравенства для класса A_1 весов
Макенхаупта

Образовательная программа бакалавриат “Математика”
Направление и код: 01.03.01 “Математика” Шифр ОП: СВ.5000.2019

Научный руководитель:

Белов Юрий Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор,
Факультет математики и компьютерных наук

Рецензент:

Осипов Николай Николаевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1	О причинах возникновения задачи.	3
2	Постановка задачи	4
3	Результаты, полученные предшественниками.	5
4	Описание полученных результатов	5
5	Кандидат на роль функции Беллмана.	6
6	Подпирающие примеры и их построение.	12
7	Экстремали функции Беллмана.	19
8	Случай выпуклой функции.	24
9	Случай вогнутой функции.	24
10	Случай “+−”.	25
11	Случай “−+”.	27
12	Случай “− + −”.	28
13	Случай “+ − +”.	32
14	Случай конечного количества точек перегиба.	36

1 О причинах возникновения задачи.

Рассмотрим следующую задачу: дана функция f и константа c . Требуется найти x_1, \dots, x_n с весами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ такими, что $\sum \alpha_i x_i = cn$, а $\sum \alpha_i f(x_i)$ была при этом минимальной. Такая задача достаточно хорошо изучена: по неравенству Йенсена и идеям Штурма если функция выпукла, то x_i надо брать равными, если есть какая-то подпирающая снизу прямая, которая касается графика f слева и справа от c , то веса надо выбирать среди этих двух точек. Если функция вогнута, то надо брать точки как можно более отдалённые.

Но эта задача может быть сильно осложнена, если в случае, когда функция не выпукла, дополнительно ввести условия на x_i , которые запрещали бы брать слишком малые или слишком удалённые друг от друга x_i , а количество переменных стремится к бесконечности.

Задачи об оценках интегральных функционалов общего вида $w \mapsto \int f(w)$ на пространстве функций ограниченной средней осцилляции ВМО хорошо изучены, точные оценки получены с помощью метода функции Беллмана, см. [4], [3] и ссылки в них.

В работе [1] метод функции Беллмана был впервые применен для получения оценок степенных средних на классах Макенхаупта. Задача оценки интегрального функционала общего вида на классах Макенхаупта A_p , $p > 1$, была решена в недавней работе [5].

В данной работе изучаются экстремальные интегральные задачи общего вида на классе Макенхаупта A_1 . Частичное продвижение в этом направлении было проделано в работе [2].

2 Постановка задачи

Введём некоторые обозначения.

$\langle w \rangle_I$ – среднее значение функции w на интервале I .

$A_1^\delta(I)$ – класс интегрируемых на интервале I функций w таких, что $\text{ess inf } w > 0$ и

$$\sup_{J \subset I} \left\{ \frac{\langle w \rangle_J}{\text{ess inf}_J w(t)} \right\} \leq \delta.$$

Класс Макенхаупта A_1 – объединение $A_1^\delta(I)$ по всем $\delta \geq 1$.

Далее все встречающиеся w мы будем называть весами и говорить, что они берутся из класса $A_1^\delta(I)$.

Определение 1 (Тип веса). Будем говорить, что вес w имеет **тип** (x_1, x_2) , если $\langle w \rangle = x_1$, $\text{ess inf } w = x_2$.

Рассмотрим произвольную функцию $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Далее будем считать, что она имеет вторую производную и у неё конечное число точек перегиба.

Задача заключается в поиске функции Беллмана:

$$\mathbb{B}_\delta(f; x_1, x_2) = \sup_{w \in A_1^\delta(I)} \{ \langle f \circ w \rangle_I \mid \langle w \rangle_I = x_1, \text{ess inf}_I w = x_2 \}.$$

Замечание 1. Из определения класса Макенхаупта следует, что функция определена в области $\Omega_\delta := \{x = (x_1, x_2) : x_2 \leq x_1 \leq \delta x_2\}$. Далее при фиксированных f и δ мы будем записывать $\mathbb{B}_\delta(f; x_1, x_2)$ как $\mathbb{B}(x)$.

Замечание 2. Ответ не зависит от интервала, поэтому далее будем считать $I = [0, 1]$, если не указано обратное.

Замечание 3. Пусть функции f и g совпадают на $[c, +\infty)$. Тогда $\mathbb{B}_f = \mathbb{B}_g$ при $x_2 \geq c$.

3 Результаты, полученные предшественниками.

В работе [2] задача была решена для случаев выпуклой функции, вогнутой функции и функции, у которой в одной точке меняется знак второй производной функции f с “+” на “-”.

В этой же задаче было дано нестрогое обоснование тому, что область определения разбивается на горизонтальные и вертикальные экстремали – прямые, на которых ответ линеен, и сформулировано основное неравенство.

4 Описание полученных результатов

В этой работе построена функция Беллмана для случаев знаков второй производной “-+”, “+ - +” и “- + -” (теоремы 4, 5, 6, 7, 8), а также решена в случае конечного числа точек перегиба при δ достаточно близких к единице (теорема 9).

5 Кандидат на роль функции Беллмана.

Текущая задача имеет тип “оценка + пример”. В этом разделе мы опишем метод доказательства оценки.

Определение 2 (Основное неравенство).

Пусть $B: \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим все такие тройки $x^+, x^- \in \Omega_\delta$ и $\alpha \in [0, 1]$, что

$$\begin{aligned} \max\{x_1^+, x_1^-\} &\leq \delta \min\{x_2^+, x_2^-\}, \\ x^0 &:= (x_1^+ \cdot \alpha + x_1^- \cdot (1 - \alpha), \min\{x_2^+, x_2^-\}) \in \Omega_\delta. \end{aligned}$$

Будем говорить, что B удовлетворяет основному неравенству, если для любой такой тройки выполнено:

$$B(x^0) \geq B(x^+) \cdot \alpha + B(x^-) \cdot (1 - \alpha).$$

Определение 3 (Достоинство). Будем говорить, что функция $B(x)$ **достойна**, если во всём Ω_δ выполнены два условия:

- 1) Нестрогая вогнутость по x_1 , что равносильно нестрогому убыванию B_{x_1} по x_1 ,
- 2) Нестрогое убывание B по x_2 .

Лемма 1. Пусть $B \in C^1(\Omega_\delta)$. Тогда B достойна $\iff B$ удовлетворяет основному неравенству.

Доказательство. “ \Rightarrow ”. Не умаляя общности считаем, что $x_2^- \leq x_2^+$, тогда:

$$B(x^0) \geq B(x_1^+, x_2^-) \cdot \alpha + B(x_1^-, x_2^-) \cdot (1 - \alpha) \geq B(x^+) \cdot \alpha + B(x^-) \cdot (1 - \alpha).$$

Первое неравенство верно по вогнутости по x_1 , а второе – по убыванию по x_2 .

“ \Leftarrow ”. Заметим, что при $x_2^- = x_2^+$ основное неравенство является условием вогнутости по x_1 , а при $x_1^- = x_1^+$ основное неравенство равносильно нестрогому убыванию по x_2 . \square

Определение 4 (Кандидат на роль функции Беллмана).

Кандидатом на роль функции Беллмана называется непрерывная по обоим аргументам функция $B : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая основному неравенству и тождеству $B(x_1, x_1) = f(x_1)$.

Лемма 2. Пусть $g(t) = f(t) + at + b$ для некоторых a и b . Тогда для любого веса w выполнено соотношение $\langle g \circ w \rangle = \langle f \circ w \rangle + a \langle w \rangle + b$.

Лемма 3 (Беллмановская индукция).

Пусть B – кандидат на функцию Беллмана. Тогда $\mathbb{B}(x) \leq B(x) \forall x \in \Omega_\delta$.

Сначала сформулируем и докажем вспомогательные леммы.

Лемма 4 (О разбиении).

Для любого веса $w \in A_1^\varepsilon$ и любого $\delta: 2\varepsilon > \delta > \varepsilon$ существует разбиение интервала I на два интервала I^\pm длин α^\pm (I^+ – левый из них), такие, что если $x^\pm := (\langle w \rangle_{I^\pm}, \text{ess inf}_{t \in I^\pm} w(t))$, а $x^0 := (\langle w \rangle_I, \text{ess inf}_{t \in I} w(t))$, то $\delta x_2^0 \geq x_1^\pm$, при этом $\alpha^\pm \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$, то есть параметры α^\pm могут быть выбраны равномерно отделёнными от нуля.

Доказательство. Возьмём $\alpha^\pm = \frac{1}{2}$. Так как $\alpha^+ x_1^+ + \alpha^- x_1^- = x_1^0$, не умаляя общности $x_1^+ \leq x_1^0 \leq x_1^-$. Если $x_1^- \leq \delta x_2^0$, то $\alpha^\pm = \frac{1}{2}$ подходит. Иначе будем уменьшать α^+ . Рассмотрим две функции $\kappa(t)$ и $\lambda(t)$ – значения x_1^\pm при $\alpha^+ = t$. $\kappa(t) = \langle w \rangle_{I^+}$ – непрерывная функция на $(0, 1)$.

Тогда $\lambda(t)$ тоже является непрерывной. $\lambda(1/2) > \delta x_2^0$.

Также $\lambda(1 - \varepsilon/\delta) \leq \frac{\int_I w(t) dt}{\varepsilon/\delta} = \frac{\langle w \rangle_I}{\varepsilon/\delta} = \frac{x_1^0}{\varepsilon/\delta} \leq \delta x_2^0$.

Тогда по лемме о промежуточном значении при некотором α^+ из $[1 - \varepsilon/\delta, 1/2]$ имеет место равенство $x_1^- = \delta x_2^0$, тогда $x_1^+ < \delta x_2^0$. \square

Замечание 4. Легко видеть, что при $\delta \geq 2\varepsilon$ разбиение на две равные части удовлетворяет условию $\delta x_1^0 \geq x_1^\pm$.

Лемма 5. Пусть $0 < \tau < 1$ и вес $w \in A_1^\delta$. Тогда $w^\tau \in A_1^{\delta^\tau}$.

Доказательство.

Проверим по определению класса $A_1^{\delta^\tau}$. Докажем, что для любого подотрезка J выполнено $\langle w^\tau \rangle_J \leq \delta^\tau \operatorname{ess\,inf}_J w^\tau$. Действительно, по неравенству Гёльдера $\langle w^\tau \rangle_J \leq (\langle w \rangle_J)^\tau \leq (\delta \operatorname{ess\,inf}_J w)^\tau = \delta^\tau \operatorname{ess\,inf}_J w^\tau$. \square

Доказательство беллмановской индукции.

Рассмотрим функцию B – беллмановского кандидата в Ω_δ . Пусть $0 < \tau < 1$ и вес $w \in A_1^{\delta^\tau}$ типа x^0 . Так как $\delta^\tau < \delta$, по лемме о разбиении существует такое разбиение I на I^+ и I^- , что $x_1^\pm \leq \delta x_2^0$. Так как B – беллмановский кандидат в Ω_δ , выполнено неравенство:

$$|I|B(x^0) \geq |I^+|B(x^+) + |I^-|B(x^-).$$

Обозначим $x^J := (\langle w \rangle_J, \operatorname{ess\,inf}_J w)$. Теперь так же разобьём I^+ и I^- и повторим этот процесс n раз. Пусть D_n – множество подотрезков разбиения на n -м шаге. Получится:

$$|I|B(x^0) \geq \sum_{J \in D_n} |J|B(x^J) = \int_I B(x^n(t)) dt,$$

где $x^n(t)$ – ступенчатая функция, равная x^J на J . При $n \rightarrow +\infty$ по лемме о разбиении $|J|$ стремятся к нулю. Тогда по теореме Лебега о дифференцировании $x_1^n(t) \rightarrow w(t)$ почти всюду.

Разберём два случая на функцию f .

1) Существуют такие a, b , что $g(t) = f(t) + at + b$ – неотрицательная функция. Раз $B(x_1, x_2) \geq f(x_1)$, тогда $B(x_1, x_2) + ax_1 + b \geq g(x_1)$. Тогда воспользуемся леммой Фату для функции $g(w)$ и совершим предельный переход $n \rightarrow +\infty$, воспользовавшись тем, что $B(x_1, x_2) + ax_1 + b \geq g(x_1)$:

$$\begin{aligned} |I|(B(x^0) + ax_1^0 + b) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_I (B(x^n(t)) + ax_1^n(t) + b) dt \geq \\ &\geq \int_I g(w(t)) dt = \int_I f(w(t)) dt + |I|(ax_1^0 + b), \end{aligned}$$

из чего после сокращения a и b следует требуемое.

2) Так как по предположению задачи количество точек перегиба функции f конечно, то, что f не превосходит никакую линейную функцию на $(0, +\infty)$, влечёт соотношение $f'(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда докажем, что существует ограниченный вес u того же типа, что и w , такой, что $\langle f \circ u \rangle \geq \langle f \circ w \rangle$. Тогда так как u ограничено, можно будет найти такие a, b , что $g(u(t)) > 0$, то есть u рассматривается аналогично случаю 1.

Так как у функции f конечное количество точек перегиба, существует такое число ψ , что $f''(t) < 0$ при $t > \psi$. Тогда существует такое $s > \max(\psi, \langle w \rangle)$, что для любых $q, r : s \in (q, r)$ выполнено $f'(q) > f'(r)$. Тогда для произвольного $\lambda \in [0, 1]$ рассмотрим функцию

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} s, & w(t) > s \\ \lambda s + (1 - \lambda)w(t), & w(t) \leq s. \end{cases}$$

Докажем принадлежность этого примера классу A_1^δ . Рассмотрим произвольный J – подотрезок I . Пусть $\text{ess inf}_J w = x_2$, а $\langle w \rangle_J = x_1$. Случай $x_2 > s$ очевиден, так как тогда u_λ – постоянная функция на J . Иначе заметим, что $\text{ess inf}_J u = x_2 = \lambda(s - x_2)$, а так как для любого $t \in J$ выполнено $w(t) \geq x_2$, имеем, что $u(t) - w(t) = \lambda(s - w(t)) \leq \lambda(s - x_2)$, а тогда $\langle u \rangle_J - x_1 \leq \lambda(s - x_2)$. Из этого следует, что $\langle u \rangle_J - \text{ess inf}_J u \leq x_1 - x_2 \leq x_2(\delta - 1) \leq (\text{ess inf}_J u)(\delta - 1)$, что и означает выполнение условия принадлежности классу A_1^δ .

$\langle u_\lambda \rangle$ –непрерывная функция от λ . $\langle u_1 \rangle = s > \langle w \rangle$, $\langle u_0 \rangle \leq \langle w \rangle$. Тогда при некотором λ u_λ будет ограниченным весом того же среднего значения и с большим значением ess inf . Теперь заметим, что если A –множество таких t , что $w(t) \leq s$, а $B = I \setminus A$, то так как $u_\lambda(t) > w(t)$ при $t \in A$ и $u_\lambda(t) < w(t)$ при $t \in B$, мы можем написать следующие неравенства, пользуясь тем, что u_λ больше w там, где $f' > f'(s)$, и меньше, где $f' < f'(s)$:

$$\begin{aligned} \langle f \circ u_\lambda \rangle - \langle f \circ w \rangle &= (\langle f \circ u_\lambda \rangle_A - \langle f \circ w \rangle_A) + (\langle f \circ u_\lambda \rangle_B - \langle f \circ w \rangle_B) \geq \\ &\geq f'(s) \cdot (\langle u_\lambda \rangle_A - \langle w \rangle_A) + f'(s) \cdot (\langle u_\lambda \rangle_B - \langle w \rangle_B) = 0. \end{aligned}$$

Тогда по следствию 3 существует вес u того же типа, что и w , что $\langle f \circ u \rangle = \langle f \circ u_\lambda \rangle \geq \langle f \circ w \rangle$. Итого, случай принадлежности w классу $A_1^{\delta^\tau}$ доказан.

Теперь предположим, что $w \in A_1^\delta$ – вес типа x^0 . Для любого $\tau < 1$ было доказано неравенство:

$$|I|B(x_\tau) \geq \int_I f(w^\tau(t))dt,$$

где x_τ – тип w^τ . Устремим τ к 1. Тогда $x_\tau \rightarrow x^0$, то есть левая часть по непрерывности B стремится к $|I|B(x^0)$.

Обоснуем переход к пределу в правой части неравенства. То есть докажем, что

$$\liminf_{\tau \rightarrow 1} \int_I f(w^\tau(t))dt \geq \int_I f(w(t))dt.$$

Разберём два случая на функцию f :

1) Найдутся такие a, b , что $g(t) = f(t) + at + b$ – неотрицательная функция. Тогда по лемме Фату:

$$\begin{aligned} \liminf_{\tau \rightarrow 1} \int_I f(w^\tau(t))dt + |I|(a(x_\tau)_1 + b) &= \liminf_{\tau \rightarrow 1} \int_I g(w^\tau(t))dt \geq \\ &\geq \int_I g(w(t))dt = \int_I f(w(t))dt + |I|(ax_1^0 + b). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем, что $a(x_\tau)_1 + b \rightarrow ax_1^0 + b$, и получим требуемое после сокращения.

2) Выполнено соотношение $f'(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда существует такой ограниченный вес u того же типа, что $\langle f \circ u \rangle \geq \langle f \circ w \rangle$, и для которого утверждение сводится к первому случаю.

Итого для любого $w \in A_1^\delta$ выполнено $B(x^0) \geq \langle f \circ w \rangle$. Теперь возьмём супремум правой части по всем весам типа x^0 и получим $B(x^0) \geq \mathbb{B}(x^0)$. \square

Замечание 5. Если приведённый ответ B достоин и $B(x_1, x_1) = f(x_1)$, для доказательства совпадения кандидата B с функцией Беллмана \mathbb{B} достаточно для каждой точки x предъявить такой вес w типа x , что $\langle f \circ w \rangle = B(x)$, или последовательность весов w_n типа x такую, что $\langle f \circ w_n \rangle \rightarrow B(x)$.

6 Подпирающие примеры и их построение.

В этом разделе будут сформулированы основные способы построения примеров, а также доказано, что примеры, построенные указанными способами находятся в классе A_1^δ . Параллельно с этим будут посчитаны средние значения весов, инфимум весов, средние значения композиций весов с функцией f .

Определение 5 (Пример). Вес типа (x_1, x_2) такой, что $\langle f \circ w \rangle = B(x_1, x_2)$, или последовательность w_n такая, что $\langle f \circ w_n \rangle \rightarrow B(x_1, x_2)$ будет называться (**подпирающим**) **примером типа (x_1, x_2)** для кандидата B .

Рассмотрим два базовых веса, из которых будут строиться все остальные в этой работе.

Определение 6 (Вес – константа). Константа – вес $w : I \rightarrow \mathbb{R}_+$, $w(t) = x_2$. Обозначение: $C_{x_2}(t)$.

Лемма 6. $\text{ess inf } C_{x_2} = x_2$, $\langle C_{x_2} \rangle = x_2$, $\langle f \circ C_{x_2} \rangle = f(x_2)$.

Определение 7 (Вес – степенная функция.). Обозначим $\mu = \frac{\delta-1}{\delta}$. Степенным весом будем называть $w(t) = x_2 \cdot t^{-\mu}$. Обозначение: $D_{x_2}(t)$.

Лемма 7.

1) Степенной вес является весом типа $(\delta x_2, x_2)$.

2) $\langle f \circ w \rangle = f(x_2) + (\delta - 1)x_2 \cdot \left(f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \int_{x_2}^{\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right)$,

если $\int_{x_2}^{\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt$ сходится,

и $\langle f \circ w \rangle = +\infty$, если $\int_{x_2}^{\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt = +\infty$.

Доказательство. 2) Подставим формулу для степенного веса в выражение среднего значения композиции с f :

$$\langle f \circ w \rangle = \int_0^1 f(x_2 t^{-\mu}) dt =$$

(Сделаем замену $s = x_2 t^{-\mu}$, затем интегрируем по частям)

$$= \int_0^1 f(s) dt = [f(s)t] \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_{s=+\infty}^{x_2} t df(s) =$$

$$= f(x_2) + \int_{x_2}^{+\infty} x_2^{\frac{1}{\mu}} s^{-\frac{1}{\mu}} f'(s) ds = f(x_2) + x_2^{\frac{1}{\mu}} \int_{s=x_2}^{+\infty} f'(s) d\left(s^{\frac{\mu-1}{\mu}} \cdot \frac{\mu}{\mu-1}\right) =$$

(Интегрируем по частям снова)

$$= f(x_2) + x_2^{\frac{1}{\mu}} \frac{\mu}{\mu-1} [f'(s)s^{\frac{\mu-1}{\mu}}] \Big|_{s=x_2}^{+\infty} - x_2^{\frac{1}{\mu}} \frac{\mu}{\mu-1} \int_{s=x_2}^{+\infty} s^{\frac{\mu-1}{\mu}} df'(s) =$$

$$= f(x_2) + x_2(\delta-1)f'(x_2) - x_2^{\frac{1}{\mu}}(\delta-1) \int_{s=x_2}^{+\infty} s^{\frac{\mu-1}{\mu}} df'(s) =$$

$$= f(x_2) + x_2(\delta-1)f'(x_2) - x_2^{\frac{1}{\mu}}(\delta-1) \int_{s=x_2}^{+\infty} s^{\frac{\mu-1}{\mu}} f''(s) ds.$$

1) Подставим в полученное выражение $f = Id$. $f' = 1$, $f'' = 0$, из чего сразу следует требуемое. \square

Теперь рассмотрим высокоуровневые веса.

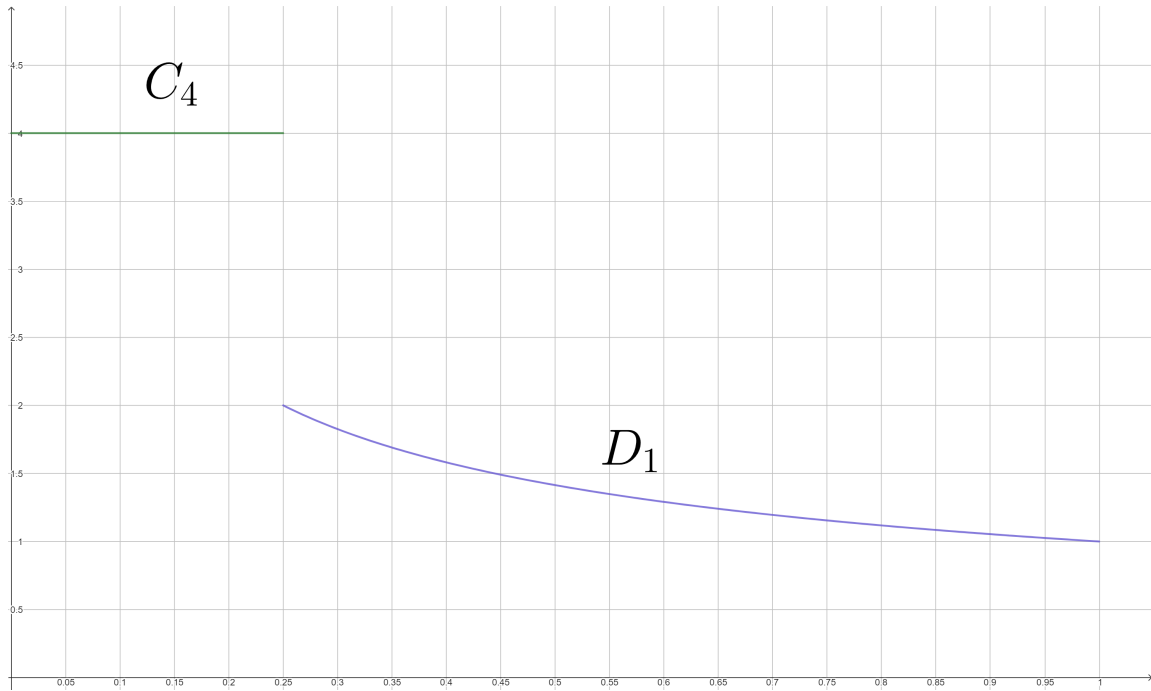


Рис. 1: Вставка C_4 в D_1 при $\delta = 2$.

Замечание 6. Далее если новый вес строится по весу, которым является последовательность весов w_n , то новый вес является последовательностью u_n , где u_n строится по w_n .

Определение 8 (Вставка).

Пусть w_1 – пример типа (a, b) , а $w_2 = D_{x_2}$, при этом $a \geq \delta x_2$. Обозначим $q = \left(\frac{\delta x_2}{a}\right)^{\frac{1}{\mu}}$.

Тогда вес $w = \begin{cases} w_1(t/q), & t \leq q \\ w_2(t), & q < t \leq 1 \end{cases}$ будем называть весом, полу-

ченным **вставкой** w_1 в w_2 .

Лемма 8. 1) Определённый выше вес имеет тип $(\delta x_2, x_2)$.

2) Среднее значение композиции считается по формуле:

$$\langle f \circ w \rangle = f(x_2) + (\delta - 1)x_2 \cdot \left(f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \int_{x_2}^{a/\delta} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right) + \left(\frac{\delta x_2}{a} \right)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \left(B(a, b) - f(a/\delta) - (\delta - 1)(a/\delta) f'(a/\delta) \right).$$

Доказательство. 1) Заметим, что $D_{x_2}(t) = D_{a/\delta}(t/q)$, $t \leq q$. Действительно: $a/\delta \cdot \left(t / \left(\frac{\delta x_2}{a} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right)^{-\mu} = x_2 t^{-\mu}$. Это значит, что w_1 заменил $D_{a/\delta}$ на $[0, q]$. Остаётся заметить, что у этих функций одинаковые средние, из чего следует, что вставка не меняет среднее значение функции. То, что инфимум веса тот же, следует из того, что $b \geq a/\delta \geq x_2$.

2) Из рассуждений очевидны следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \langle f \circ w \rangle &= \langle f \circ D_{x_2} \rangle + q \left(B(a, b) - \langle f \circ D_{a/\delta} \rangle \right) = \\ &= f(x_2) + (\delta - 1)x_2 \cdot \left(f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \int_{x_2}^{\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right) + q \cdot \\ &\left(B(a, b) - \left(f(a/\delta) + (\delta - 1)(a/\delta) \cdot \left(f'(a/\delta) + (a/\delta)^{\frac{1}{\delta-1}} \int_{a/\delta}^{\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что $\int_{a/\delta}^{\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt$ сокращается после раскрытия скобок, так как коэффициенты перед интегралами противоположны. \square

Определение 9 (Склейка). Пусть w_1 – пример типа (a, b) и $w_2 = C_{x_2}$, причём $x_2 \leq b$ и $a \leq \delta x_2$. Пусть $\alpha \in [0, 1]$. α -**склежкой** весов w_1 и C_{x_2} будем называть $w(t) = \begin{cases} w_1(t/\alpha), & t \leq \alpha \\ x_2, & \alpha < t \leq 1 \end{cases}$

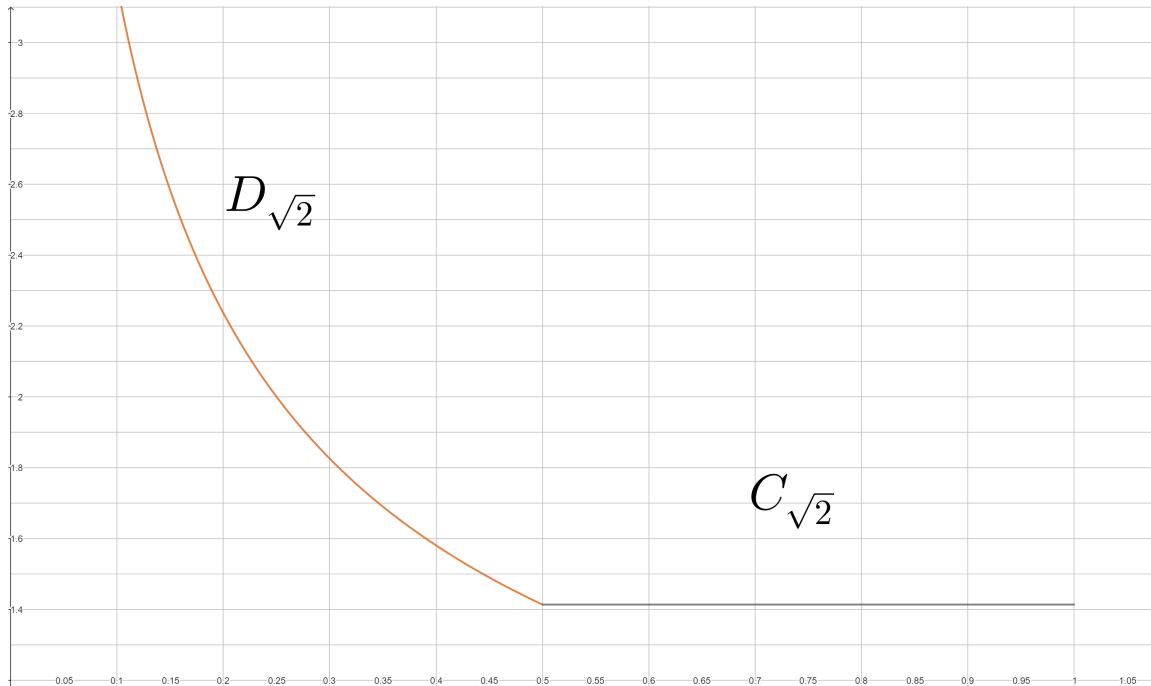


Рис. 2: 1/2-склейка $D_{\sqrt{2}}$ с $C_{\sqrt{2}}$ ($\delta = 2$).

Лемма 9.

- 1) Вес, приведённый выше, имеет тип $(a\alpha + x_2(1 - \alpha), x_2)$.
- 2) $\langle f \circ w \rangle = \alpha B(a, b) + (1 - \alpha)f(x_2)$.

Доказательство. Значение инфимума следует из того, что w_2 ниже w_1 . Средние значения очевидны из того, что для любой функции $g(t)$ и константы α средние значения $g(t)$ и $g(\alpha t)$ совпадают. \square

Теперь перейдём к доказательству того, что все веса, полученные вышеописанными способами, лежат в классе A_1^δ .

Лемма 10. Пусть w – монотонно убывающая функция. Пусть для любого $a \leq 1$ выполнено:

$$\frac{\langle w(t) \rangle_{[0, a]}}{\text{ess inf}_{t \leq a} w(t)} \leq \delta.$$

Тогда для любого $J = [b, a]$ выполнено:

$$\frac{\langle w(t) \rangle_J}{\text{ess inf}_J w(t)} \leq \delta,$$

то есть $w \in A_1^\delta$.

Доказательство. Действительно, для любых $b < a$ выполнено неравенство $\langle w(t) \rangle_{[b,a]} \leq \langle w(t) \rangle_{t \leq a}$ по причине монотонности и существенные инфимумы на $[b, a]$ и $[0, a]$ совпадают. Из этого следует требуемое. \square

Лемма 11. Пусть w – вес, полученный последовательностью склеек и вставок с соблюдением условий определений. Тогда $w \in A_1^\delta$.

Доказательство. Докажем индукцией по построению.

1) База: C_{x_2} имеет равные среднее значение и инфимум на любом подотрезке.

По предыдущей лемме утверждение для D_{x_2} достаточно проверить для подотрезков вида $[0, a]$. Сужение D_{x_2} на любой такой промежуток является степенной функцией с показателем μ , и для таких функций в лемме 8 было показано, что среднее значение в δ раз больше инфимума.

2) Переход: пусть вес w' получен α -склежкой веса типа (a, b) $w \in A_1^\delta$ и C_{x_2} . По индукционному предположению и предыдущей лемме достаточно проверить условие на подотрезках вида $J = [0, b]$, $b > a$. Мы имеем $\text{ess inf } w'_J = x_2$, $\langle w' \rangle_J \leq \langle w \rangle = a \leq \delta x_2$ по предположению из определения склейки.

Теперь пусть вес w' получен из веса $w \in A_1^\delta$ вставкой в D_{x_2} . Тогда по индукционному предположению и предыдущей лемме достаточно проверить, что для любого $b > q$ выполнено $\langle w' \rangle_J \leq \delta \text{ess inf}_J w'$, где $J = [0, b]$. Но заметим, что по построению обе части выражения равны соответственно $\langle D_{x_2} \rangle_J$ и $\delta \text{ess inf}_J D_{x_2}$, а эти выражения равны из леммы 8. \square

Замечание 7. Можно заметить, что переход не требовал условия монотонности на w .

Следствие 1. Пусть w – пример типа $(\delta x_2, x_2)$, при этом беллмановский кандидат является линейной функцией на отрезке $\{(x_1, x_2) : x_2 \leq x_1 \leq \delta x_2\}$. Тогда $\frac{x_1 - x_2}{\delta x_2 - x_2}$ -склейка w и C_{x_2} является примером типа (x_1, x_2) .

Следствие 2. Пусть w – пример типа (x_1, x_2) . Тогда для любого $x'_2 \in (x_1/\delta, x_2)$ существует вес w' типа (x_1, x'_2) такой, что $\langle f \circ w \rangle = \langle f \circ w' \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим достаточно малое $t > 0$ и пример u типа $(x_1 + t, x_2)$. Рассмотрим его склейку с $C_{x'_2}$ с таким коэффициентом α , что $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{x_1 - x'_2}{t}$. Легко видеть, что такая склейка существует и получится вес класса (x_1, x'_2) . Возьмём серию весов при $t \rightarrow 0$. Тогда $\alpha \rightarrow 1$, а тогда $\langle f \circ w' \rangle \rightarrow \langle f \circ w \rangle$, что и требовалось. \square

Лемма 12. Пусть w – пример типа (x_1, x_2) . Тогда существует вес w' типа $(x_1, x_1/\delta)$ такой, что $\langle f \circ w \rangle = \langle f \circ w' \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим $w_{x'_1}$, являющуюся вставкой примера типа (x'_1, x_2) ($x'_1 > x_1$) в $D_{x_1/\delta}$ при $x'_1 \rightarrow x_1$. По определению вставки и доказанной для неё лемме каждый из примеров принадлежит классу A_1^δ . Заметим также, что длина участка, на котором расположен пример типа (x'_1, x_2) стремится к единице, так как $x'_1 \rightarrow x_1$. Поэтому значение $\langle f \circ w_{x'_1} \rangle$ стремится к $B(x_1, x_2)$, что и требовалось. \square

Следствие 3. Пусть точки (x_1, x_2) и (x_1, x'_2) таковы, что $x_1/\delta \leq x'_2 < x_2$. Тогда для любого веса w типа (x_1, x_2) найдётся вес w' типа (x_1, x'_2) такой, что $\langle f \circ w \rangle = \langle f \circ w' \rangle$.

7 Экстремали функции Беллмана.

Определение 10. Отрезок $(x, x') \subset \Omega_\delta$ называется экстремалью функции B , если на нём функция B линейна.

Все встречаемые далее экстремали будут вертикальными или горизонтальными. Будем говорить, что в области фолиация вертикальна или горизонтальна, если область разбивается на вертикальные или горизонтальные экстремали соответственно.

Вертикальная экстремаль, верхним концом которого является точка (x_1, x_2) , будет обозначаться как $V(x_1, x_2)$.

Горизонтальная экстремаль с левым концом (x_1, x_2) будет обозначаться как $H(x_1, x_2)$.

$\Omega_{a,b}^H$ – область, образованная $H(x_2, x_2)$ при $a \leq x_2 \leq b$.

$\Omega_{a,b}^V$ – область, образованная $V(x_1, x_1)$ при $a \leq x_1 \leq b$.

Лемма 13. Если f вогнута на $[a, b]$, то $B(x_1, x_2) = f(x_1)$ достойна в $\Omega_{a,b}^V$.

Доказательство. $B_{x_1 x_1}(x_1, x_2) = f''(x_1) \leq 0$.

$B_{x_2}(x_1, x_2) = 0$. □

Лемма 14. Пусть $a < b$ и константа C таковы, что для любого $x_2 \in [a, b]$ выполнено неравенство:

$$C + \int_{x_2}^b f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \geq 0. \quad (1)$$

Тогда $B(x_1, x_2) = f(x_2) + r(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$, где

$$r(x_2) = f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \left(C + \int_{x_2}^b f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right),$$

достойна в $\Omega_{a,b}^H$.

Доказательство. $B_{x_1}(x_1, x_2) = r(x_2)$, поэтому $B_{x_1, x_1} = 0$.

$$B_{x_2}(x_1, x_2) = f'(x_2) + r'(x_2) \cdot (x_1 - x_2) - r(x_2) \leq? 0.$$

По причине линейности левой части по x_1 достаточно проверить неравенство при $x_1 = x_2$ и $x_1 = \delta x_2$.

В случае $x_1 = x_2$ получается $f'(x_2) - r(x_2) \leq 0$, что верно в силу предположения леммы.

В случае $x_1 = \delta x_2$ получается $f'(x_2) + r'(x_2) \cdot (\delta - 1)x_2 - r(x_2) = 0$, так как функция $r(x_2)$ является решением этого равенства как дифференциального уравнения. \square

Замечание 8.

$$r(b) = f'(b) + b^{\frac{1}{\delta-1}}C \Rightarrow C = \frac{r(b) - f'(b)}{b^{\frac{1}{\delta-1}}}.$$

Определение 11 (Луночная функция). Пусть ψ – точка перегиба функции f . Пусть для некоторых a_0 и b_0 ($b_0 > \psi > a_0$, $\delta a_0 \geq b_0$) выполнено: $f'' > 0$ на $[a_0, \psi]$ и $f'' < 0$ на $[\psi, b_0]$.

Определим функцию $\rho_{a_0, b_0}(a) : [a_0, \psi) \rightarrow (\psi, b_0]$ следующим образом: $\rho(a) = b$, если $f'(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то есть касательная к графику f в точке $(b, f(b))$ пересекает график в точке $(a, f(a))$. ρ – обозначение для функции, которая далее будет называться **луночной**.

Определение 12 (Уравнение лунки). **Уравнением лунки** будем называть уравнение, определяющее луночную функцию:

$$\frac{f(\rho(a)) - f(a)}{\rho(a) - a} = f'(\rho(a)).$$

Лемма 15. Если $\rho(a_0) = b_0$, то функция ρ определена корректно, дифференцируема и является биекцией, то есть для любого $a \in [a_0, \psi)$ существует единственное $b \in (\psi, b_0]$, что $f'(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

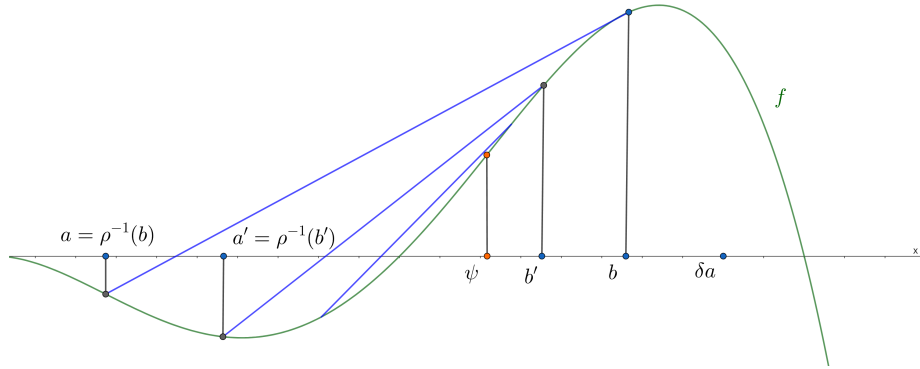


Рис. 3: Уравнение лунки.

Доказательство. Для $b \in (\psi, b_0]$ обозначим как $l_b(t)$ касательную в точке b к графику функции f . По вогнутости на $(\psi, b_0]$ выполнены два неравенства: $l_b(\psi) > f(\psi)$ и $l_b(a_0) < l_{b_0}(a_0) = f(a_0)$. Поэтому по условию выпуклости на $[a_0, \psi)$ существует единственная точка пересечения l_b и f на $[a_0, \psi)$.

То есть ρ^{-1} корректно определена. Докажем монотонное убывание ρ^{-1} . Рассмотрим $b > b'$. Тогда $l_b(b') > f(b')$. Причём $f'(b) < f'(b')$, что означает, что $l_b(t) > l_{b'}(t)$ при $t < b'$, из чего и следует, что $\rho^{-1}(b) < \rho^{-1}(b')$.

Дифференцируемость ρ^{-1} следует из того, что коэффициент наклона прямой $l(b)$ является дифференцируемым по b , так что легко убедиться в том, что производная $\rho^{-1}(b)$ выражается через $f''(b)$ и $f'(\rho(a))$.

Существование, дифференцируемость и убывание ρ следуют из теоремы об обратной функции. \square

Определение 13 (Лунка). Область $\{(x_1, x_2) : b_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq a_0\}$, покрытая экстремальями: горизонтальными вида $((a, a), (\rho(a), a))$ и вертикальными вида $((\rho(a), a), (\rho(a), \rho(a)))$ называется **лункой**. Обозначение: Ω_{a_0, b_0}^{VH} .

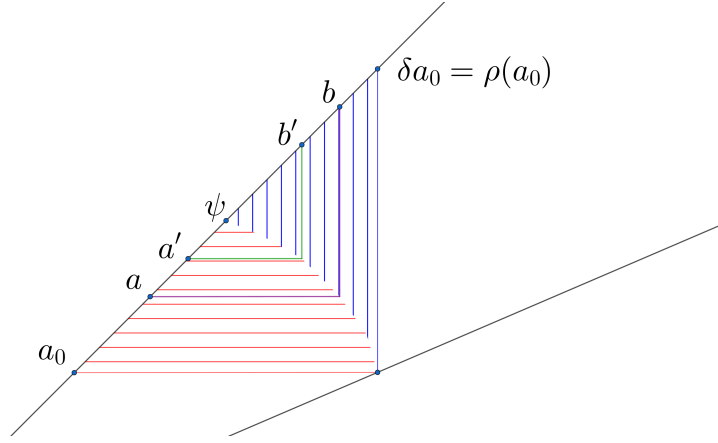


Рис. 4: Лунка.

Лемма 16. Пусть выполнены условия для отрезка $[a_0, b_0]$ из определения функции ρ . Тогда функция

$$B(x) = B^{Cup}(x) := \begin{cases} f(x_1), & x_1 > \rho(x_2), \\ f(x_2) + (x_1 - x_2) \cdot f'(\rho(x_2)), & x_1 \leq \rho(x_2), \end{cases}$$

достойна в Ω_{a_0, b_0}^{VN} .

Доказательство. Рассмотрим область $x_1 > \rho(x_2)$, покрытую вертикальными экстремалами: там выполнены соотношения $B_{x_1, x_1} = f''(x_1) \leq 0$, $B_{x_2} = 0$. Теперь рассмотрим множество $(x_1, x_2) : x_1 \leq \rho(x_2)$ – область горизонтальных экстремалей. На ней очевидна линейность по x_1 , поэтому остаётся проверить убывание по x_2 :

$$\begin{aligned} B_{x_2}(x_1, x_2) &= (f(x_2) + f'(\rho(x_2))(x_1 - x_2))_{x_2} = \\ &= f''(\rho(x_2))\rho'(x_2)(x_1 - x_2) - f'(\rho(x_2)) + f'(x_2). \end{aligned}$$

Теперь продифференцируем уравнение лунки:

$$f'(\rho(x_2))(\rho(x_2) - x_2) = f(\rho(x_2)) - f(x_2).$$

Получится, что

$$f''(\rho(x_2))\rho'(x_2)(\rho(x_2) - x_2) + f'(\rho(x_2))(\rho'(x_2) - 1) =$$

$$f'(\rho(x_2))\rho'(x_2) - f'(x_2).$$

Отсюда

$$f''(\rho(x_2))\rho'(x_2)(\rho(x_2) - x_2) = f'(\rho(x_2)) - f'(x_2).$$

Подставим в производную:

$$\begin{aligned} B_{x_2}(x_1, x_2) &= f''(\rho(x_2))\rho'(x_2)(x_1 - x_2) - f''(\rho(x_2))\rho'(x_2)(\rho(x_2) - x_2) = \\ &= f''(\rho(x_2))\rho(x_2)(x_1 - \rho(x_2)). \end{aligned}$$

Все три скобки отрицательны, так как $f''(\rho(x_2)) \leq 0$ – условие выполнения основного неравенства на вертикальных экстремалях, неравенство $\rho'(x_2) < 0$ было доказано в прошлой лемме, и рассматриваются только $x_2 \leq x_1 \leq \rho(x_2)$. \square

Лемма 17. $\frac{x_1 - x_2}{\rho(x_2) - x_2}$ -склейка $C_{\rho(x_2)}$ с C_{x_2} является примером типа (x_1, x_2) , где $x_1 \leq \rho(x_2)$.

Замечание 9. Леммы выше описывают построение беллмановского кандидата в лунке и доказывают существование подпирающих примеров для этого кандидата.

Определение 14 (Уголок). Пусть (a, c) и (b, c) – две точки на горизонтальной экстремали кандидата V . Тогда область образованная экстремальями вида $V(d, c)$ при $a \leq d \leq b$ будет называться **уголком**. Обозначение: $\Omega_{a,b,c}^A$.

Для некоторого $c' < c$ определим **неполный уголок**: $\Omega_{a,b,c,c'}^A = \Omega_{a,b,c}^A \cap \{(x_1, x_2) : x_2 \geq c'\}$.

Лемма 18. Функция $V(x_1, x_2) = V(x_1, c)$ достойна в уголке.

Доказательство. $V_{x_1 x_1} = 0, V_{x_2} = 0$. \square

8 Случай выпуклой функции.

Теорема 1. Пусть функция f такова, что $\int_{x_2}^{+\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \geq 0$ для любого x_2 .

Тогда область определения Ω_δ разбивается на горизонтальные экстремали (фолиация на всей области определения горизонтальна) и функция Беллмана определена как $\mathbb{B}(x_1, x_2) = f(x_2) + r(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$, где

$$r(x_2) = f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \int_{x_2}^{+\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt. \quad (2)$$

Доказательство. По лемме 14 для $a = 0, b = +\infty$ и $C = 0$ предложенная функция является кандидатом на функцию Беллмана. Пример строится так: по лемме 7 и следствию 1 $\frac{x_1-x_2}{\delta x_2-x_1}$ -склейка D_{x_2} с C_{x_2} является примером. \square

Замечание 10. Если $\int_{x_2}^{+\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt$ расходится, то тот же пример показывает, что $\mathbb{B}(x_1, x_2) = +\infty$.

Замечание 11. В частности, всё вышперечисленное верно, если $f'' > 0$ всюду.

9 Случай вогнутой функции.

Теорема 2. Пусть $f''(t) < 0 \forall t > 0$. Тогда $\mathbb{B}(x_1, x_2) = f(x_1)$. Область определения разбивается на вертикальные экстремали.

Доказательство. По лемме 13 предложенная функция является беллановским кандидатом. C_{x_1} – пример в точке (x_1, x_1) . А по следствию 3 примеры при $x_2 < x_1$ существуют. \square

10 Случай “+−”.

По замечанию 3 при достаточно больших x_2 фолиация должна быть вертикальной, так как при больших t функция $f(t)$ совпадает с вогнутой. Но при этом фолиация не может быть вертикальной всюду, поэтому происходит переход между экстремалиями.

Теорема 3.

Пусть $\psi_1 > 0$ – единственная точка перегиба функции f , при этом $f''(t) < 0$ при $t > \psi_1$. Тогда существует единственное $a_0 > 0$: $\delta a_0 = \rho(a_0)$ и функция Беллмана задаётся по формуле (см. Рис. 5)

$$\mathbb{B}(x) = \begin{cases} f(x_1), & x \in \Omega_{\delta a_0, +\infty}^V, \\ B^{Cup}(x), & x \in \Omega_{a_0, \delta a_0}^{VH}, \\ B_{0, a_0}^H, & x \in \Omega_{0, a_0}^H, \end{cases}$$

где B^{Cup} определено в лемме 16, а

$B_{0, a_0}^H(x_1, x_2) = f(x_2) + r_{a_0}(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$, где

$$r_{a_0}(x_2) = f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \left(\frac{f'(\rho(a_0)) - f'(a_0)}{a_0^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_{x_2}^{a_0} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right).$$

Доказательство. Утверждение о том, что функция достойна на каждом из трёх участков, доказано в леммах 16, 13 и 14. Для последней леммы необходимо проверить неравенство (1). Действительно, $C = f'(\delta a_0) - f'(a_0) > 0$ по геометрическим соображениям, а подынтегральное выражение всегда положительно в силу условия теоремы. Функция убывает по x_2 всюду, так как это верно в каждой из трёх подобластей и горизонтальная граница между $\Omega_{a_0, \delta a_0}^{VH}$ и Ω_{0, a_0}^H принадлежит обеим областям. Поэтому остаётся доказать, что на границе между $\Omega_{a_0, \delta a_0}^{VH}$ и $\Omega_{\delta a_0, +\infty}^V$ производная по x_1 не возрастает. Действительно, слева и справа от границы B_{x_1} стремится к $f'(\delta a_0)$.

Подпирающие примеры: по следствиям 3 и 1 и замечанию 9 достаточно привести примеры в Ω_{0, a_0}^H , причём только на правых границах

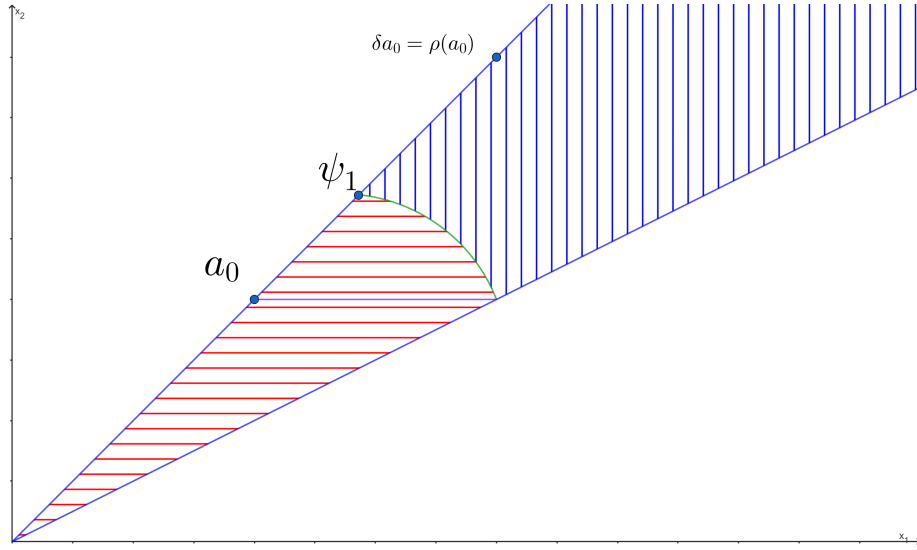


Рис. 5: Случай “+−”. Лунка.

экстремалей, то есть в точках вида $(\delta x_2, x_2)$, где $x_2 < a_0$. По лемме 8 для примера w – являющимся вставкой примера типа $(\delta a_0, \delta a_0)$, то есть $C_{\delta a_0}$, результат будет равен:

$$\begin{aligned} \langle f \circ w \rangle &= f(x_2) + (\delta - 1)x_2 \cdot \left(f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \int_{x_2}^{a_0} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right) \\ &+ \left(\frac{x_2}{a_0} \right)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \left(f(\delta a_0) - f(a_0) - (\delta - 1)a_0 f'(a_0) \right), \end{aligned}$$

где $\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{1}{\delta-1}$. Далее воспользуемся уравнением лунки для последней скобки: $f(\delta a_0) - f(a_0) - (\delta - 1)a_0 f'(a_0) = (\delta - 1)a_0 (f'(\delta a_0) - f'(a_0))$.

Теперь легко видеть, что $\frac{\langle f \circ w \rangle - f(x_2)}{(\delta - 1)x_2} = r_{a_0}(x_2)$.

□

11 Случай “−+”.

По замечанию 3 при достаточно больших x_2 фолиация должна быть горизонтальной, так как при больших t функция $f(t)$ совпадает с выпуклой. Но при этом в случае когда от слева от точки перегиба абсолютное значение f'' велико, происходит переход к вертикальным экстремалиям с возникновением уголка.

Теорема 4.

Пусть $\psi_1 > 0$ – единственная точка перегиба функции f , при этом $f''(t) > 0$ при $t > \psi_1$. Пусть существует такое $p_1 \in (0, \psi_1)$, что

$$\int_{p_1}^{+\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt = 0. \quad (3)$$

Тогда функция Беллмана задаётся по формуле: (см. Рис. 6)

$$\mathbb{B}(x) = \begin{cases} f(x_2) + r(x_2) \cdot (x_1 - x_2), & x \in \Omega_{p_1, +\infty}^H, \\ f(p_1) + r(p_1)(x_1 - p_1), & x \in \Omega_{p_1, \delta p_1, p_1}^A, \\ f(x_1), & x \in \Omega_{0, p_1}^V, \end{cases}$$

где функция r определяется по формуле 2.

Замечание 12. Случай отсутствия такого p_1 рассмотрен в теореме 1.

Доказательство. В леммах 14, 18 и 13 было доказано, что предъявленная функция достойна в каждой из подобластей. Для леммы 14 необходимо проверить неравенство (1) для $C = 0, b = +\infty, a = p_1$. Оно очевидно из определения числа p_1 . По аналогии с прошлым случаем надо убедиться в том, что на границе $x_1 = c$ между областями $\Omega_{p_1, \delta p_1, p_1}^A$ и Ω_{0, p_1}^V производная \mathbb{B}_{x_1} непрерывна. Действительно, справа она равна $f'(p_1)$, а слева стремится к этому же значению.

Подпирающие примеры: по следствиям 3 и 1 достаточно предъявить пример в точках вида $(\delta x_2, x_2)$, где $x_2 \geq p_1$. По лемме 7 подходит D_{x_2} . \square

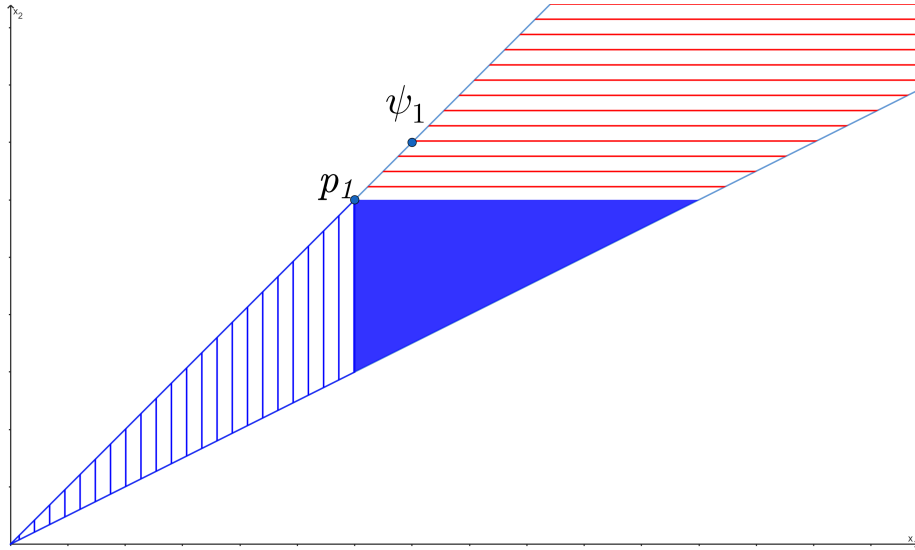


Рис. 6: Случай “-+”. Уголок.

12 Случай “- + -”.

Рассмотрим случай, когда имеются две точки перегиба – точки $\psi_1 > \psi_2$. Определим ρ определяется по аналогии с леммой 15 вокруг ψ_1 с дополнительным условием $f'(\rho(a)) > f'(a)$. То есть теперь помимо равенства $\rho(a_0) = \delta a_0$ условием для окончания лунки может служить равенство $f'(\rho(a)) = f'(a)$, что не может случиться при $a \in (\psi_2, \psi_1)$ (см. Рис. 7). В зависимости от этого могут получиться два разных результата.

Теорема 5. Пусть $\psi_1 > \psi_2$ – единственные точки перегиба функции f . При этом $f''(t) < 0$ при $t > \psi_1$. Пусть существует такое $p_2 < \psi_2$, что $f'(\rho(p_2)) = f'(p_2)$. Тогда фолляция устроена как на рисунке 8 и

$$\mathbb{B}(x) = \begin{cases} f(x_1), & x \in \Omega_{\rho(p_2), +\infty}^V \cup \Omega_{0, p_2}^V, \\ B^{Cup}(x), & x \in \Omega_{p_2, \rho(p_2)}^{VH}, \\ f(p_2) + f'(p_2) \cdot (x_1 - p_2), & x \in \Omega_{p_2, \rho(p_2), p_2}^A, \end{cases}$$

где B^{Cup} определено в лемме 16.

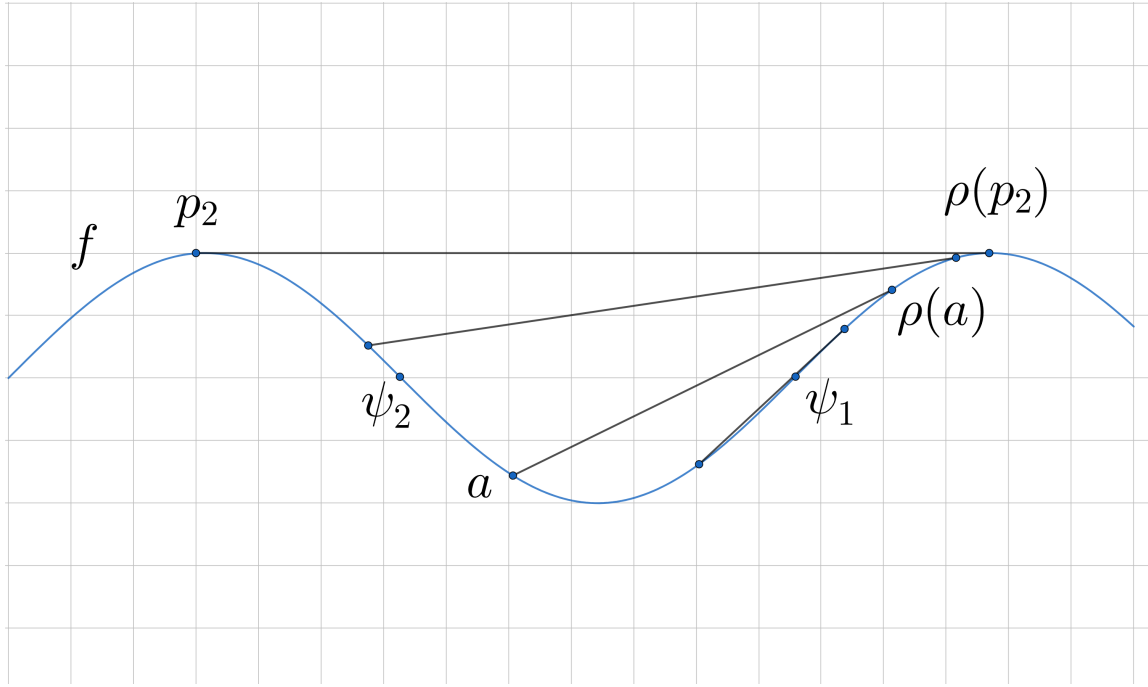


Рис. 7: Ограничение лунки в случае “− + −”.

Доказательство. По аналогии с предыдущими случаями для доказательства того, что предъявленная функция достойна, достаточно проверить, что \mathbb{B}_{x_1} непрерывна на вертикальных границах областей. При $x_1 = p_2$ справа $\mathbb{B}_{x_1} = f'(p_2)$, а слева стремится к этому значению. При $x_1 = \rho(p_2)$ слева и справа \mathbb{B}_{x_1} стремится к $f'(\rho(p_2)) = f'(p_2)$. С учётом следствия 3 и замечания 9 дополнительное построение примеров не требуется. \square

Теорема 6. Пусть $\psi_1 > \psi_2$ – единственные точки перегиба функции f . При этом $f''(t) < 0$ при $t > \psi_1$. Пусть не существует такого $t < \psi_2$, что $f'(\rho(t)) = f'(t)$. Тогда найдётся такое $a_0 < \psi_1$, что $\delta a_0 = \rho(a_0)$. Пусть существует такое $p_2 < \psi_2$, что

$$\frac{f'(\rho(a_0)) - f'(a_0)}{a_0^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_{p_2}^{a_0} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt = 0.$$

Тогда функция Беллмана определена следующим образом (см. Рис.

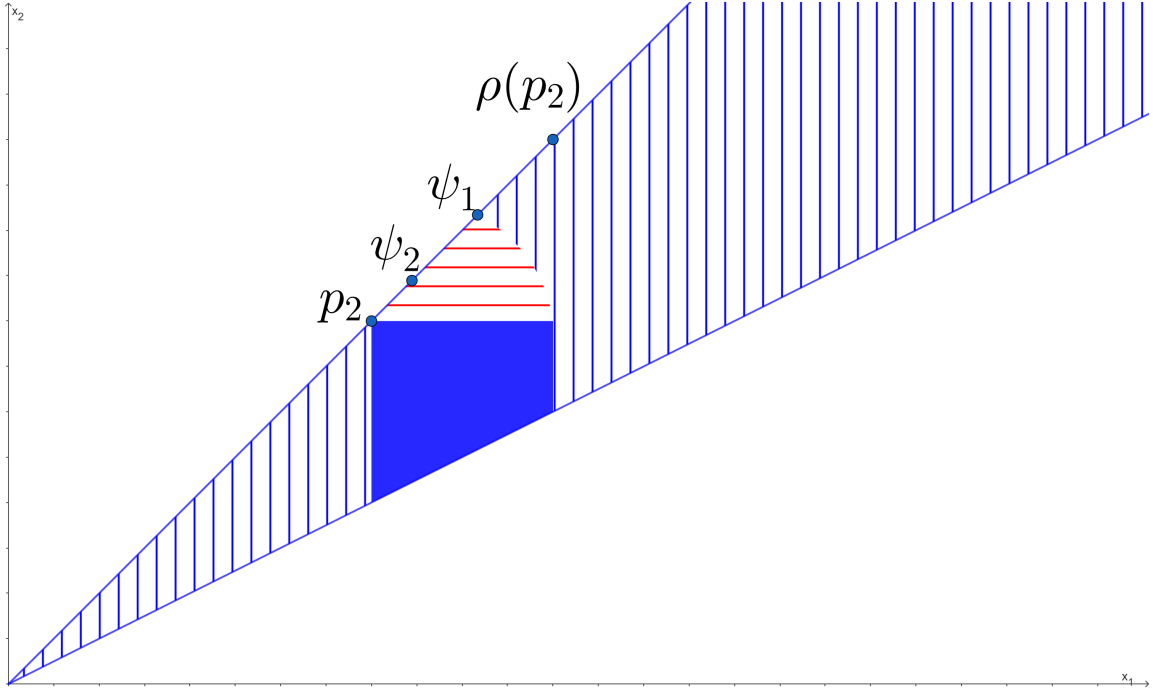


Рис. 8: Случай неполных лунки и уголка.

9):

$$\mathbb{B}(x) = \begin{cases} f(x_1), & x \in \Omega_{\delta a_0, +\infty}^V \cup \Omega_{0, p_2}^V, \\ B^{Cup}(x), & x \in \Omega_{a_0, \delta a_0}^{VH}, \\ B_{p_2, a_0}^H, & x \in \Omega_{p_2, a_0}^H, \\ B(x_1, p_2), & x \in \Omega_{p_2, \delta p_2, p_2}^A, \end{cases}$$

где B^{Cup} определено в лемме 16, а

$B_{0, a_0}^H(x_1, x_2) = f(x_2) + r_{a_0}(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$, где

$$r_{a_0}(x_2) = f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \left(\frac{f'(\rho(a_0)) - f'(a_0)}{a_0^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_{x_2}^{a_0} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right).$$

Замечание 13. В частности, лунка будет полной, если $\psi_1 > \delta\psi_2$.

Доказательство. То, что для области горизонтальных касательных выполнено неравенство (1), следует из определения p_2 . По аналогии с

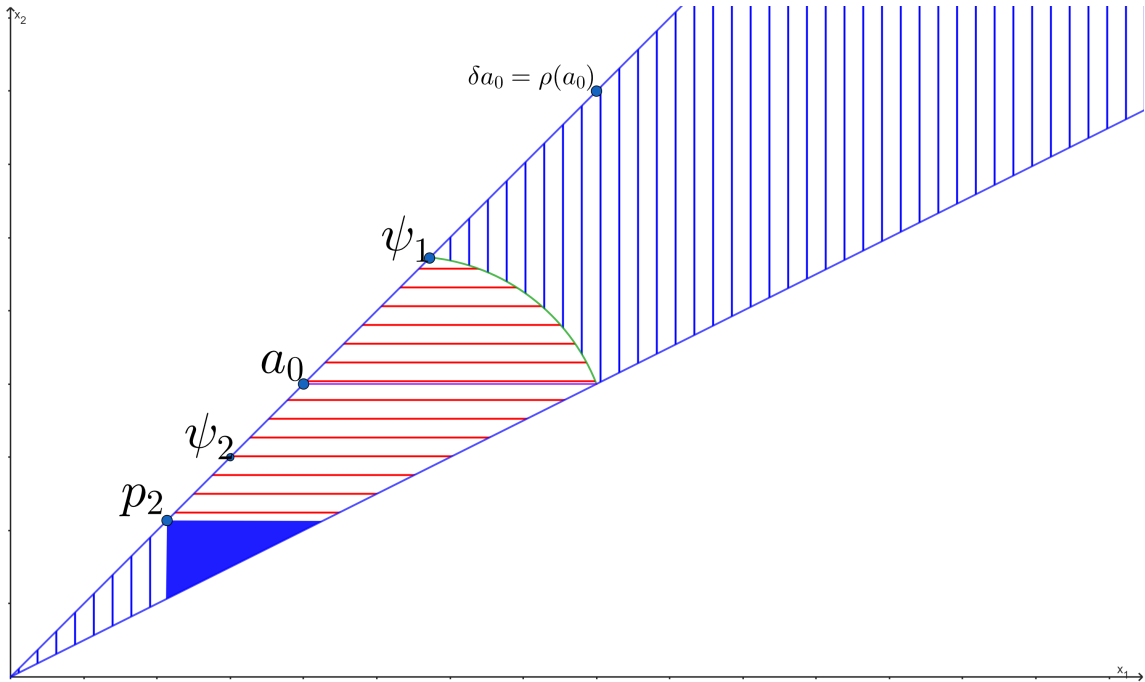


Рис. 9: Случай полной лунки.

предыдущими случаями, так как предъявленная функция достойна в каждой из подобластей, достаточно заметить, что \mathbb{W}_{x_1} непрерывна на границах $x_1 = p_2$ и $x_1 = \delta a_0$. Горизонтальные границы как и в прошлых случаях принадлежат обоим граничащим подобластям, поэтому убывание \mathbb{W} по x_2 выполняется не только внутри подобластей, но и на всей Ω_δ .

Построение подпирющих примеров: с учётом следствия 3 и замечания 9 достаточно предъявить пример в Ω_{p_2, a_0}^H в точках вида $(\delta x_2, x_2)$. По лемме 8 подойдёт вставка $C_{\delta a_0}$ в D_{x_2} . \square

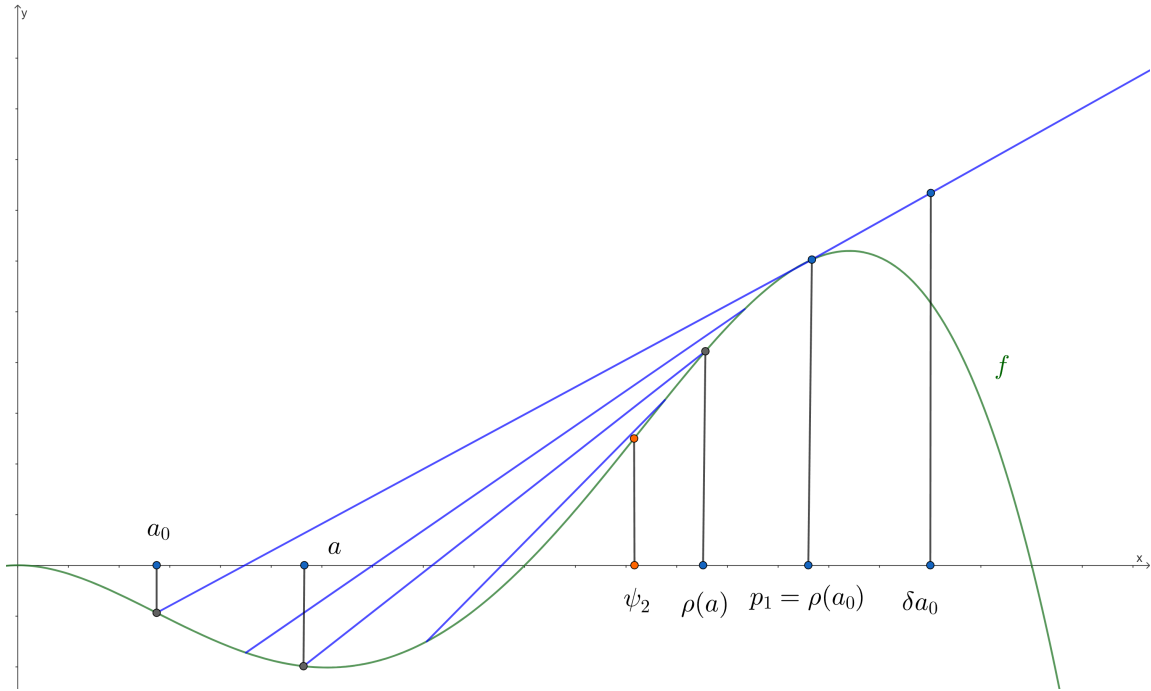


Рис. 10: Ограничение лунки.

13 Случай “+ − +”.

Пусть $\psi_1 > \psi_2$ – единственные точки перегиба функции f . Тогда при $x_2 \geq \psi_2$ функция Беллмана определена аналогично случаю “−+”. Тогда если не выполнено условие теоремы 1 и существует p_1 , определённое в теореме 4, то определяется луночная функция ρ вокруг точки ψ_2 с дополнительным условием $\rho(a) \leq p_1$ (см. Рис. 10).

Первая теорема описывает тот случай, когда ψ_2 находится близко к p_1 и лунка заканчивается на границе с уголком. Вторая, соответственно, описывает случай, когда лунка и уголок не пересекаются.

Теорема 7. Пусть $\psi_1 > \psi_2$ – единственные точки перегиба функции f . При этом $f''(t) > 0$ при $t > \psi_1$. Пусть существует такое $p_1 \in (\psi_2, \psi_1)$, что выполнено уравнение (3).

Пусть $a_0 = \rho^{-1}(p_1) > p_1/\delta$. Тогда функция Беллмана задаётся по

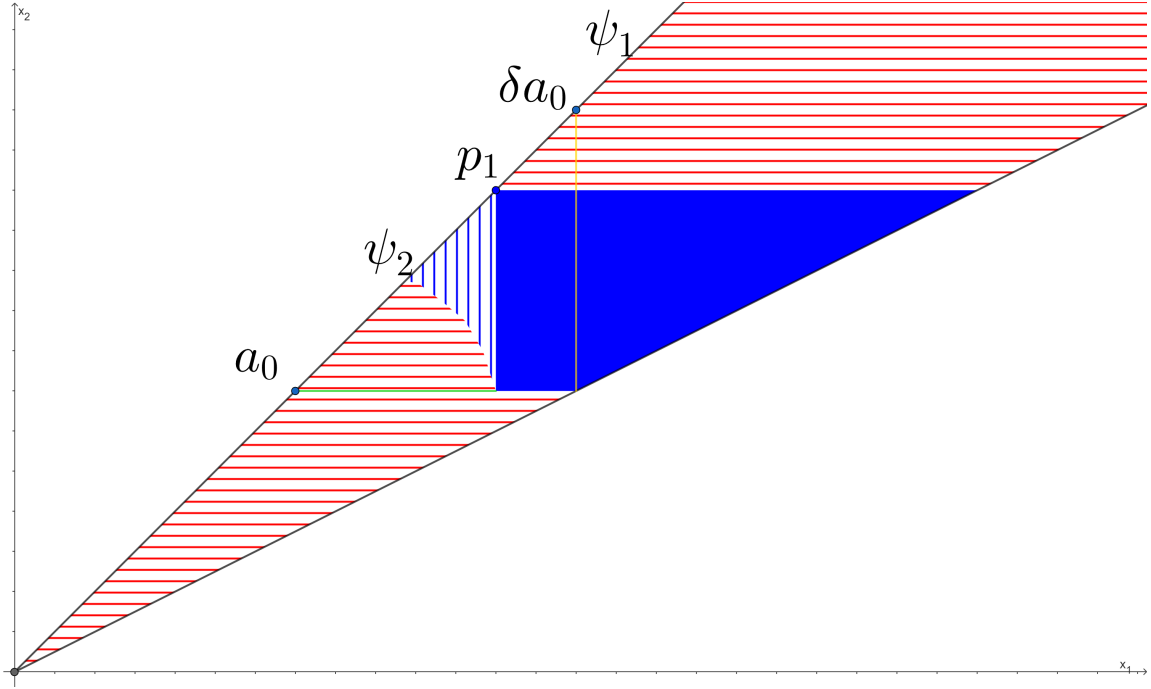


Рис. 11: Случай неполного уголка.

формуле (см. Рис. 11):

$$\mathbb{B}(x) = \begin{cases} f(x_2) + r(x_2) \cdot (x_1 - x_2), & x \in \Omega_{p_1, +\infty}^H, \\ f(p_1) + r(p_1)(x_1 - p_1), & x \in \Omega_{p_1, \delta p_1, p_1, a_0}^A, \\ f(x_2) + r_{a_0}(x_2) \cdot (x_1 - x_2), & x \in \Omega_{0, a_0}^H, \\ B^{Cup}(x), & x \in \Omega_{a_0, p_1}^{VH}, \end{cases}$$

где B^{Cup} определено в лемме 16, функция r определяется по формуле 2, а

$$r_{a_0}(x_2) = f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \left(\frac{f'(\rho(a_0)) - f'(a_0)}{a_0^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_{x_2}^{a_0} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right).$$

Доказательство. Покажем, что функция корректно определена на нижней границе уголка: так как $r_{a_0}(a_0) = f'(p_1)$, мы имеем, что ли-

нейный коэффициент функции Беллмана при $x_2 = p_1$ и $x_2 = a_0$ совпадают. Выполнение неравенства (1) для нижней области горизонтальных экстремалей следует из положительности $f''(t)$ при $t < a_0$ и того, что $r(a) = f'(p_1) = f'(a_0)$ по замечанию 8. Так как предьявленная функция достойна во всех подобластях по леммам 14, 18, 16, достаточно показать, что на вертикальной границе между уголком и лункой \mathbb{B}_{x_1} непрерывна. Действительно, пределы слева и справа равны $f'(p_1)$. Построение подпирающих примеров: с учётом следствия 3 и замечания 9 достаточно предьявить пример в $\Omega_{p_1, +\infty}^H$ и Ω_{0, a_0}^H в точках вида $(\delta x_2, x_2)$. В первой подобласти подходит D_{x_2} по лемме 7, а во второй – вставка примера типа $(\delta a_0, p_1)$ в D_{x_2} по лемме 8 (проверка совпадения результатов повторяет аналогичные рассуждения в теореме 3). \square

Теорема 8. Пусть $\psi_1 > \psi_2$ – точки перегиба функции f . При этом $f''(t) > 0$ при $t > \psi_1$. Пусть существует такое $p_1 \in (\psi_2, \psi_1)$, что выполнено (3). Пусть $\rho^{-1}(p_1) \leq p_1/\delta$. Тогда существует такое $a_0 < \psi_2$, что $\delta a_0 = \rho(a_0) < p_1$. Тогда функция Беллмана задаётся по формуле (см. Рис. 12):

$$\mathbb{B}(x) = \begin{cases} f(x_2) + r(x_2) \cdot (x_1 - x_2), & x \in \Omega_{p_1, +\infty}^H, \\ f(p_1) + r(p_1)(x_1 - p_1), & x \in \Omega_{p_1, \delta p_1, p_1}^A, \\ f(x_2) + r_{a_0}(x_2) \cdot (x_1 - x_2), & x \in \Omega_{0, a_0}^H, \\ B^{Cup}(x), & x \in \Omega_{a_0, \delta a_0}^{VH}, \end{cases}$$

где B^{Cup} определено в лемме 16, функция r определяется по формуле 2, а

$$r_{a_0}(x_2) = f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \left(\frac{f'(\rho(a_0)) - f'(a_0)}{a_0^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_{x_2}^{a_0} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right).$$

Доказательство. Выполнение неравенства (1) для нижней области горизонтальных экстремалей следует из положительности $f''(t)$ при $t < a_0$ и того, что $r(a) = f'(\delta a_0) > f'(a_0)$ по замечанию 8. Так как

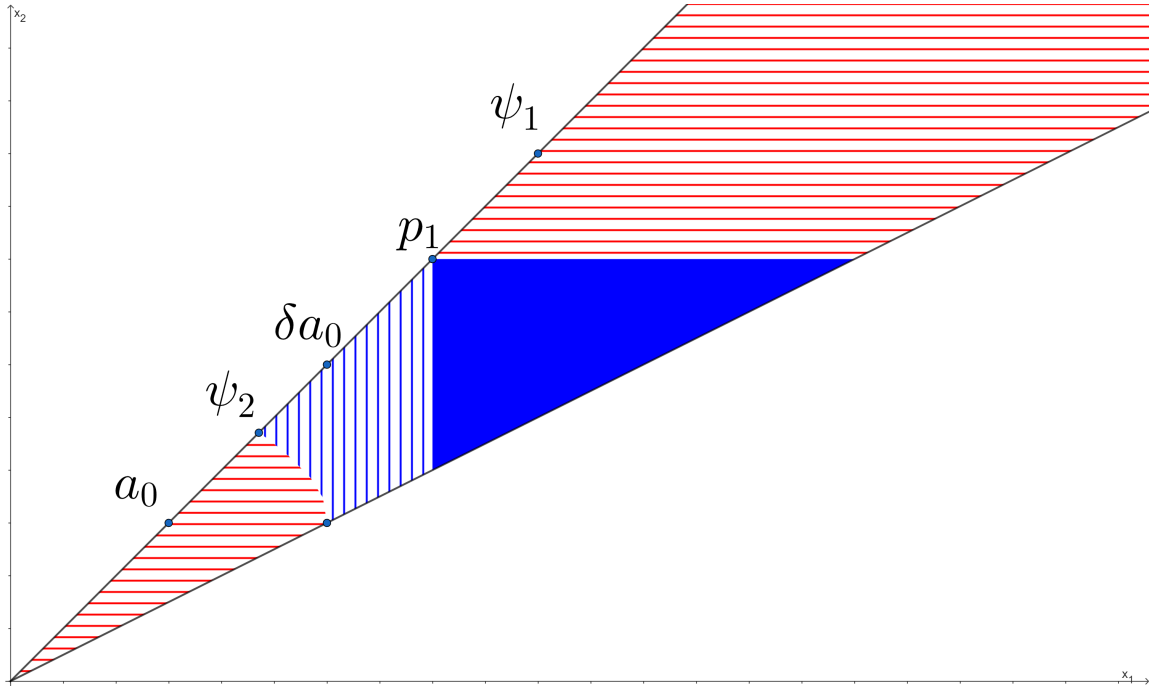


Рис. 12: Случай полного уголка.

предъявленная функция достойна во всех подобластях по леммам 13, 14, 18, 16, достаточно показать, что на вертикальных границах $x_2 = \delta a_0$ и $x_1 = p_1$ выражение B_{x_1} непрерывно по x_1 , что уже проделывалось.

Построение подпирающих примеров: с учётом следствия 3 и замечания 9 достаточно предъявить пример в $\Omega_{p_1, +\infty}^H$ и Ω_{0, a_0}^H в точках вида $(\delta x_2, x_2)$. В первой подобласти подходит D_{x_2} по лемме 7, а во второй – вставка примера типа $C_{\delta a_0}$ в D_{x_2} по лемме 8. \square

Замечание 14. Случай, когда такого p_1 не существует, рассмотрен в теореме 1.

Замечание 15. На рисунке 12 можно заметить, что при разрезании по одной из вертикальных экстремалей получаются две подобласти, функция на которых описывается по теоремам 3 и 4. Можно заметить, что для подобласти $x_2 \leq p_1$ ответ совпадает

$$с\ ответом\ для\ функции\ f_{sh}(t) = \begin{cases} f(t), & t < p_1, \\ f(p_1) + (t - p_1) \cdot f'(p_1), & t \geq p_1, \end{cases}$$

14 Случай конечного количества точек перегиба.

При большом количестве точек пересечения, достаточно близких друг к другу, возможны ситуации, когда пересекаются области, в которых должны быть лунки. Поэтому далее будем рассматривать только тот случай, когда любые две точки перегиба отличаются хотя бы в δ раз.

Сначала сформулируем вспомогательную лемму:

Лемма 19. Пусть $b > 0$. ψ – такая точка перегиба второй производной f , что $\psi < b$ и $f'' > 0$ на $(\psi, b]$. Пусть $a < \psi$ – такое число, что на $[a, \psi)$ выполнено $f'' < 0$. Тогда при δ достаточно близких к единице:

$$\frac{f'(\delta b) - f'(b)}{b^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_a^b f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \leq 0.$$

Доказательство. Возьмём произвольное $d \in (a, \psi)$ и заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{f'(\delta b) - f'(b)}{b^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_a^b f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt = \\ &= \frac{f'(\delta b) - f'(b)}{b^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_{\psi}^b f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt + \int_a^{\psi} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \leq \\ &\leq (f'(\delta b) - f'(b))b^{-\frac{1}{\delta-1}} + \psi^{-\frac{1}{\delta-1}} \int_{\psi}^b f''(t) dt + d^{-\frac{1}{\delta-1}} \int_a^d f''(t) dt \leq \\ &\leq \left(f'(\delta b) - f'(b) + \int_{\psi}^b f''(t) dt \right) \psi^{-\frac{1}{\delta-1}} + d^{-\frac{1}{\delta-1}} \int_a^d f''(t) dt = \end{aligned}$$

$$A\psi^{-\frac{1}{\delta-1}} - Bd^{-\frac{1}{\delta-1}}.$$

Тогда достаточно взять

$$\frac{1}{\delta-1} \geq \log_{\frac{\psi}{\delta}} \frac{A}{B}.$$

□

Замечание 16. Можно заметить, что условие леммы выполняется и для $b = +\infty$ при условии того, что $\int_a^{+\infty} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt$ сходится при каком-то δ .

Утверждается, что при малых δ области вертикальных и горизонтальных фолиаций будут переходить друг в друга, образуя попеременно полные лунки и уголки, которые не будут пересекаться.

Теорема 9. Пусть $\psi_1 > \psi_2 > \dots > \psi_n$ – все точки перегиба функции f и $f''(t) < 0$ при $t > \psi_1$. Тогда существует такое δ_0 , что для любого $\delta \in (1, \delta_0)$ функция Беллмана определяется следующим образом:

1) ρ_1 – луночная функция вокруг ψ_1 . Существует такое a_1 , что $\rho(a_1) = \delta a_1$. Тогда $\mathbb{B}(x_1, x_2) = f(x_1)$ в $\Omega_{\delta a_1, +\infty}^V$.

2) $\mathbb{B} = B^{sup}$ в $\Omega_{a_1, \delta a_1}^{VH}$.

3) В области Ω_{p_1, a_1}^H функция Беллмана равна $B_{p_1, a_1}^H(x_1, x_2) = f(x_2) + r_{a_0}(x_1) \cdot (x_1 - x_2)$, где

$$r_{a_1}(x_2) = f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \left(\frac{f'(\rho(a_1)) - f'(a_1)}{a_1^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int_{x_2}^{a_1} f''(t) \cdot t^{-\frac{1}{\delta-1}} dt \right),$$

а p_1 – наибольшее число, что $r_{a_1}(p_1) = f'(p_1)$. При этом $\delta\psi_3 < p_1 < \psi_2$.

4) В области $\Omega_{p_1, \delta p_1, p_1}^A$ функция Беллмана равна $\mathbb{B}(x_1, x_2) = f(p_1) + f'(p_1) \cdot (x_1 - p_1)$.

Слева от $x_1 = p_1$ начинаются вертикальные экстремали и чередование фолиаций продолжается по циклу.

Доказательство. Построение примеров и обоснование достойности предъявленной функции можно найти в теоремах 6 и 8. Добавим к этому только то, что предыдущая лемма говорит о том, что при достаточно малых δ область горизонтальных экстремалей будет заканчиваться близко к точке перегиба с соблюдением условия $\delta\psi_3 < p_1 < \psi_2$. Это даёт, что лунки и уголки не будут пересекаться. \square

Замечание 17. *Если в условии предыдущей теоремы $f''(t) > 0$ при $t > \psi_1$, то фолляции начинаются с горизонтальных, но чередование фолляций остаётся с аналогичными условиями.*

Замечание 18. *Если ослабить условие на δ , сказав, что мы гарантируем только то, что любые две точки перегиба отличаются хотя бы в δ раз, тогда всё ещё не возникает ситуаций неполной лунки как на рисунке 8, но возникают неполные лунки как на рисунке 11. В этом случае имеющихся в работе результатов достаточно для формулировки аналогичной теоремы, но формулировка ответа является проблематичной из-за того, что каждый переход от уголка к лунке может происходить одним из двух способов: прямо как на рисунке 11 или через вертикальные экстремали как на рисунке 12.*

Список литературы

- [1] В. И. Васюнин. Взаимные оценки L^p -норм и функция Беллмана. Записки научных семинаров ПОМИ, том 355, страницы 81–138, 2008.
- [2] А. Горшанова. Экстремальные задачи для весов Макенхаупта (дипломная работа 2018 года).
- [3] P. Ivanisvili, N. Osipov, D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy. Bellman function for extremal problems in BMO. Transactions of the AMS, 368 (5), 3415–3468, 2016.
- [4] P. Ivanisvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy. Bellman function for extremal problems in BMO II: evolution. Memoirs of the AMS, Volume: 255; 136 pp, 2018.
- [5] P. Ivanisvili, D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskii. Bellman functions on simple non-convex domains in the plane. Preprint: arxiv.org/abs/2305.03523.