Санкт-Петербургский государственный университет

Скворцов Артём Андреевич

Выпускная квалификационная работа

Различные метрики в задаче об идеалах алгебры H^\infty

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2019 «Математика»

Научный руководитель:
академик РАН,
главный научный сотрудник
ПОМИ РАН,
доктор ф.-м. наук,
профессор
Кисляков Сергей Витальевич

Рецензент:
научный сотрудник
ПОМИ РАН,
кандидат ф.-м. наук
Руцкий Дмитрий Владимирович

Санкт-Петербург
2023 год

Содержание

Введение

К знаменитой теореме о короне примыкает так называемая задача об идеалах, которая допускает множество вариантов и разветвлений. Очень полезным инструментом при работе с ней являются теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений, в частности теорема Фан Цзы–Какутани [1] и теорема Пауэрса [5], примеры приложений есть в [2, 3, 4, 6]. Эта работа посвящена нескольким новым результатам в задаче об идеалах, теоремы о неподвижной точке снова будут играть важную роль в наших построениях. Остановимся подробнее на историческом экскурсе.

Теорема Карлесона о короне утверждает, что если $f_1, \dots, f_n$ — ограниченные аналитические функции в круге $\mathbb{D}$, то для существования ограниченных в круге аналитических функций $g_1, \dots, g_n$, таких что

$$\sum_i g_i f_i \equiv 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$\sum_i |f_i(z)|^2 \geq \delta^2 > 0, z \in \mathbb{D}.$$

Ограниченные аналитические функции составляют класс Харди H_∞. Нам понадобятся и другие классы Харди, построенные не только по пространствам L_p, но и по более общим решеточным пространствам аналитических функций, граничный класс Смирнова и прочее. В терминах граничных значений классом Харди H_p (с $p \geq 1$) можно назвать множество функций из $L_p(\mathbb{T})$, чьи коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны 0, при этом им соответствуют аналитические функции в круге, куда граничные функции продолжаются с помощью интеграла Пуассона

$$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2) f(e^{it}) dt}{1 + r^2 - 2r\cos(\phi - t)}.$$

В дальнейшем мы будем не раз использовать свертку с ядром Пуассона, для чего введем обозначение $P_z = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\phi)}, z = re^{i\phi}$. Классом Смирнова называется множество аналитических функций, для которых верно представление

$$F(z) = B(z)S(z)\Phi(z)$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке, S — сингулярная внутрення функция, а Φ — внешняя фуннкция. Напомним определения функций S и Φ:

$$S(z) = e^{ic} \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{2\pi(e^{it} - z)} d\sigma(t) \right)$$

и σ — сингулярная положительная мера,

$$\Phi(z) = \exp\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{it} + z) \log |F(e^{it})| dt}{2\pi(e^{it} - z)} \right).$$

Далее, выражение $\frac{1+re^{i\phi}}{1-re^{i\phi}}$ называется ядром Шварца, и с помощью свертки его с граничными значениями вещественной части функции на окружности можно получить значение соотвествующей аналитической функции в точке $re^{i\phi}$ (если мнимая часть в нуле равна нулю). Основные результаты о классах Харди есть в [9], про них же и про класс Смирнова (называемый там классом B) можно прочитать в [10]. Теперь пусть (S, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой μ. Пространство Кётэ это квазибанахово пространство X измеримых функций на S, удовлетворяющее условию $|f| \leq |g|, g \in X => f \in X, \|f\|_X \leq C\|g\|_X$. Если иное не следует из контекста, мы будем рассматривать только пространства Кёте с $C = 1$, которые будут представлять из себя банаховы пространства (их будем называть банаховыми решетками, хотя обычно этот термин понимается более широко). При этом X' это множество функционалов из X^*, представимых в виде интеграла с измеримой функцией. Определение произведения пространств Кёте (отметим, что оно может оказаться только квазибанаховой решеткой) ясно из формулы $\|u\|_{EF} = \inf\{\|v\|_E\|w\|_F, u = vw\}$, определение степени ясно из формулы $\|f\|_{X^\alpha} = \|f^{\frac{1}{\alpha}}\|_X^\alpha$ (это, вообще говоря, тоже лишь квазинорма). Про банаховы решетки и вещи вокруг них можно прочитать в [11] и в [15], про векторные классы Харди и векторные решеточные пространства аналитических функций написано в [12] и в [6]. Здесь мы ограничимся лишь кратким изложением определений и самых базовых сведений. Прежде всего, если X — банахова решетка на окружности с мерой Лебега, то ее "аналитическая часть" X_A состоит из функций класса Смирнова, чье сужение на окружность принадлежит решетке X (говоря об аналитических функциях, мы будем отождествлять граничные значения на окружности и функцию в круге, при этом во всех рассматриваемых нами случаях верна теорема единственности; если будет важно подчеркнуть область определения, мы будем писать $X_A(\mathbb{T})$ или $X_A(\mathbb{D})$). Чтобы избежать вырождения, на X накладывают некоторые ограничения, о которых будет сказано ниже, при этом подходящие решетки мы будем звать хорошими (будет очевидно, что степень хорошей решетки тоже хорошая). Отмечу, что в хороших решетках подпространство X_A замкнуто в X по норме. Объяснения можно прочитать в [13], там же приведены некоторые из основных свойств пространства X_A. Норма функций в X_A наследуется из пространства $X(\mathbb{T})$. Далее, если V — банахово пространство, то $H_1(\mathbb{D}, V)$ состоит из аналитических в $\mathbb{D}$ V-значных функций F с $\|F\|_{H_1(\mathbb{D},V)} = \sup\limits_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \|F(re^{i\phi})\|_V d\phi$. Можно показать, что если у V есть предсопряженное U, то у F есть граничные значения на окружности в слабом снизу смысле (объяснения и ссылки есть в [6]). Точнее, эти граничные значения представляют собой V-значную, U-измеримую функцию (то есть измеримую в слабом снизу смысле). Пространство граничных значений будем обозначать через $H_1(\mathbb{T}, V)$. Определим теперь $X_A(\mathbb{D}, G^*)$ как множество G^*-значных аналитических в круге функций F, таких что $YF \in H_1(\mathbb{D}, G^*)$ для каждой скалярной функции $Y \in X'_A$. Норма в этом пространстве вводится так:

$$\|F\|_{X_A(G^*)} = \sup\{\|YF\|_{H_1(G^*)}, Y \in X'_A, \|Y\|_{X'} \leq 1\}.$$

Наряду с векторозначными функциями мы зачастую будет использовать операторнозначные аналитические функции, к которым *мы будем относиться* *как к специфическим векторозначным.* По умолчанию далее, если пишем $F \in X_A(Lin(V^*, U^*))$, то $F(z)$ — w^*-непрерывный линейный оператор (тогда он автоматически является ограниченным оператором из V^* в U^*). Отметим, что так как $(E \otimes F)^* = B(E, F^*)$ (это объясняется, к примеру, в [17], под $E \otimes F$ мы понимаем проективное тензорное произведение), то корректно рассматривать граничные значения. В частности, в некоторых теоремах нам могут понадобиться внешние функции для операторозначных функций. *Их конструкция будет той же, что и у векторозначных функций, а сами внешние функции будут скалярными.* При самом прямом их построении могут возникнуть проблемы с измеримостью, поэтому их строят с помощью специального трюка (об этом будет сказано ниже, больше подробностей можно найти в [6]). Отметим, что мы всегда будет строить внешние функции только для функций со значениями в пространствах, сопряженных к сепарабельным, поэтому никаких проблем с измеримостью при даже прямом построении у нас не будет. Скажем чуть больше о векторных классах Харди.

Следуя тексту Бухвалова [12] определим $s - L_p(\mathbb{T}, G^*)$ как пространство слабо измеримых функций на окружности. Для функции $f \in L_p(G^*)$ мы можем рассмотреть семейство функций вида $\langle x, f\rangle, \|x\|_G \leq 1$. Супремум этого семейства (не поточечный, а в решетке измеримых функций) мы обозначим через $\alpha(f)$. При этом $\|f\|_{s-L_p(G^*)} = \|\alpha(f)\|_{L_p}$. В упомянутой выше статье есть ссылки на теорему о том, что $L_p(X)^* = s - L_q(X^*)$ (при условии $1 \leq p < \infty$). Легко понять, что $H_p(G^*) \subset s - L_p(G^*)$ (более того, нормы аналитических функций в этих двух пространствах совпадают).

Часто оказывается полезно свойство выпуклости и вогнутости решеток. Банахова решетка X зовется p-выпуклой, если решетка X^p тоже банахова. Она называется q-вогнутой, если решетка X' p-выпукла, где показатели p и q сопряжены.

Около 1970г. Т. Вольф нашел новый (и, в сравнении с оригинальным доказательством Карлесона, довольно простой) подход к теореме о короне, он приведен, например, в книге [9]. Как вскоре вслед за этим выяснили (независимо) Учияма, М. Розенблюм и В.А. Толоконников (мы цитируем только работу [7] последнего из названных авторов, поскольку все три доказательства практически идентичны, а на [7] нам придется ссылаться и по другим поводам), этот подход позволяет рассматривать бесконечные последовательности "данных" f_i: если такая последовательность удовлетворяет условию (2) вместе с нормировочным условием $\sum_i |f_i(z)|^2 \leq 1$, то найдутся аналитические в круге функции g_i, удовлетворяющие условиям $\sum_i |g_i(z)|^2 \leq C(\delta)^2$ и (1).

Это утверждение естественно приводит к вопросу об "оценках в разных метриках". Чтобы объяснить, что имеется в виду, рассмотрим следующую более общую постановку задачи о короне. Пусть G_1 и G_2 — банаховы пространства. Данными общей задачи о короне будем считать фиксированную функцию $F \in H_\infty(Lin_w(G_1^*, G_2^*))$, т.е. ограниченную в круге $\mathbb{D}$ аналитическую функцию со значениями в пространстве w^*-непрерывных линейных операторов из

G_1^* в G_2^* (сопряженные пространства здесь удобнее брать по техническим причинам). Пусть еще X — банахово идеальное пространство (синоним банахова пространства Кёте) измеримых функций на окружности (подчиненное некоторым необременительным условиям, см условие 2 после теоремы 1), X_A — его подпространство типа Харди, т.е. пересечение пространства X с граничным классом В.И. Смирнова.

Задача о короне с данными F состоит в том, чтобы выяснить, выполняется ли равенство

$$X_A(G_2^*) = F \cdot X_A(G_1^*);$$

по возможности следует оценить сверху константу, с которой разрешими все уравнения, спрятанные в этой формуле. Отметим, что если такое равенство выполняется, то такая константа существует по теореме об открытом отображении.

Постановка, с которой мы начали, соответствует случаю, когда $X = L_\infty, G_1 = l_2, G_2 = \mathbb{C}$. Подобные постановки будем называть "скалярным случаем" (поскольку пространство $H_\infty(\mathbb{C})$ состоит из скалярных функций).

Теперь сформулируем известные результаты об оценках в разных метриках.

a) От X вообще ничего не зависит в самой общей постановке, в том числе и упомянутая константа в оценках; разумеется, данные F во всех задачах с разными X одни и те же (Кисляков – Руцкий, смотри [6]).

b) Про зависимость от G_1 и G_2 довольно многое известно в скалярном случае $G_2 = \mathbb{C}$, когда G_1 — идеальное пространство последовательностей. Необходимо еще наложить условие, чтобы пространство G_1^* совпало с порядковым сопряженным G_1'. Это приводит к такой постановке (в силу п. a, считаем без потери общности, что $X = L_\infty$).

Пусть V — банахово идеальное пространство последовательностей (то есть банахова решетка на $\mathbb{N}$), $f \in H_\infty(V)$, причем $\|f(z)\|_V \geq \delta > 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Доказать, что существует функция $g \in H_\infty(V')$, такая что $\langle f(z), g(z)\rangle \equiv 1$ и $\|g\|_{V'} \leq C(\delta)$.

Опять, известно (Учияма, Руцкий; смотри [14]), что эта задача разрешима при (практически) любом V, а не только $V = l_2$.

У задачи о короне есть обобщение — так называемая "задача об идеалах". В самой общей постановке она примерно такова: описать образ $F(z)X_A(G_1^*)$ (вместо того, чтобы обеспечивать равенство (3)). В принципе, еще можно мерить "качество" данных F не в L_∞, а в какой-нибудь другой решетке Y (образ при этом, разумеется, не обязан более содержаться в $X_A(G_2^*)$) и т.п.

Даже в классическом "скалярном" случае картина здесь не столь ясная, как в задаче о короне. Известно, например, что условие $|h(z)| \leq \|f(z)\|_{l_2}^{2+\varepsilon}$ ($f \in H_\infty(l_2)$ — фиксированная функция) при $\varepsilon > 0$ достаточно для существования представления $h(z) = \langle f(z), g(z)\rangle$ с $g \in H_2(l^2)$, но оно уже недостаточно при $\varepsilon = 0$. И.К. Злотников показал (смотри [2]), что подобная "скалярная" задача разрешима и в случае, когда l_2 заменяется на общее идеальное пространство последовательностей V с нетривиальной вогнутостью. Тогда решение g ищется в $H_\infty(V')$, а достаточное условие разрешимости снова имеет вид $|h(z)| \leq \|f(z)\|_V^\beta \leq 1$ (β зависит от V).

В этих задачах неожиданно полезными оказываются теоремы о неподвижных точках многозначных отображений. Зачастую хватает известной теоремы Фан Цзы–Какутани о существовании неподвижной точки при условии отображения выпуклого компакта в ЛВП в множество его подмножеств, при этом образы точек непусты, выпуклы, а график замкнут. Но нередко требуется найти неподвижную точку композиции таких отображений (действующих между разными пространствами), и до недавнего времени это был довольно трудный результат.

Скажем чуть больше о результате Злотникова. Им было доказано, что если X — q-вогнутая банахова решетка с $1 < q < \infty$, то задача об идеалах разрешима с показателем $\max\{2, q\} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Доказательство было основано на известном случае $X = l_2$ и теореме 1 ниже (доказанной с помощью леммы о непрерывном выборе). Вообще говоря, этот результат неулучшаем. Приведем два иллюстративных примера.

A) Пример Толоконникова. Сформулируем ψ-задачу об идеалах, заменив условие $|h(z) \leq \|f(z)\|^\beta$ условием $|h(z)| \leq \psi(\|f(z)\|)$. Толоконниковым для каждой такой функции $[0,1] \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}_+, \psi = o(x^2)$ построены функции $f_1, f_2 \in H_\infty$, такие что $\{h : |h(z)| \leq \psi((|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2)^{\frac{1}{2}})\} \nsubseteq \{f_1 g_1 + f_2 g_2,\ g_1, g_2 \in H_\infty\}$. Построение описано в [7]

B) Пример Рао. B_1, B_2 произведения Бляшке без общих нулей с условием $\inf\limits_{z\in\mathbb{D}} |B_1(z)| + |B_2(z)| = 0$. Тогда $|B_1 B_2| \leq |B_1|^2 + |B_2|^2$, но $B_1 B_2 \notin I(B_1^2, B_2^2)$. Ссылку на пример можно найти в [2].

1. Формулировка основных результатов

С помощью упрощенной версии теоремы Пауэрса [5], доказанной автором в прошлой курсовой работе (то доказательство опубликовано в [4], там же есть определения терминов) получилось передоказать важный результат Злотникова [2] без довольно искусственного применения теоремы о непрерывном выборе. С помощью теоремы Фан Цзы–Какутани удалось доказать эквивалетность достаточно общих формулировок задачи об идеалах с разными метриками, а также установить эквивалетность ее обобщенной формулировки с классической.

Дадим определение следующего понятия: для банахова идеального пространства V разрешима задача об идеалах с показателем α и постоянной C, если для любой функции $f \in H_\infty(V)$ и функции $h \in H_\infty$, таких что $1 \geq \|f(z)\|^\alpha \geq |h(z)|$, найдется функция $g \in H_\infty(V')$, для которой $\langle f(z), g(z)\rangle = h(z)$.

Теорема 1. *Пусть E_0 и E_1 — банаховы пространства Кёте на множестве $\{1, \ldots, k\}$ и пространство $E_0 E_1 = E$ тоже банахово. Пусть для пространства E_0 задача об идеалах разрешима с постоянной C и показателем α. Тогда задача об идеалах разрешима для $E_0 E_1$ с показателем α и константой $C_E 2^\alpha$.*

Этот результат является ключевым техническим моментом в рассуждениях Злотникова из [2]. Он используется для получения равномерной по k оценки константы в задаче об идеалах, после чего с помощью нетривиальной вогнутости получается перейти от конечномерной решетки к бесконечномерной. Приведенное здесь доказательство несколько упрощает рассуждения Злотникова. Оно опубликовано в совместной статье [4] автора и С.В. Кислякова, которому я обязан рядом улучшений и правок в моем исходном рассуждении.

Формулировка второй теоремы требует нескольких предварительных слов. Пусть G_1, G_2 — банаховы пространства. Данными задачи об идеалах мы назовем аналитическую функцию $F \in Y_A(\mathbb{D}, Lin(G_1^*, G_2^*))$ и функцию $h \in Y_A(G_2^*)$. Значения первой в каждой точке круга это w^*-непрерывные линейные операторы. Пусть X — банахова решетка измеримых функций на окружности, удовлетворяющая двум условиям.

1) Условие Фату, или $X'' = X$.

2) Если $f \in X, f \neq 0$, то найдется функция $g \in X, g \geq |f|$, такая что $\log(g) \in L^1(\mathbb{T})$ и $\|g\|_X \leq C\|f\|_X$. В работе [6] есть ссылка на теорему, где доказывается, что постоянную C можно взять произвольно близкой к 1.

Рассмотрим следующее требование.

(S_X) Для любой скалярной функции $f \in X_A(\mathbb{T})$ найдется такая функция $g \in X_A(G_1^*)$, что $f(z)h(z) = F(z)g(z)$. Условие S_p есть S_{L_p} по определению. Отметим снова, что условие S_X по теореме об открытом отображении влечет существование такой функции g, что $\|g\|_{X_A(G_1^*)} \leq C\|f\|_{X_A}$ для некой абсолютной константы C.

Это условие имеет смысл прокомментировать. Мы хотим сформулировать нечто, аналогичное утверждению a) выше (о независимости оценок в задаче о короне от пространства X). Однако в нашей ситуации описать образ $F(z)X_A$ вряд ли получится (по крайней мере, не видно способов это сделать): все упомянутые выше результаты изучали лишь достаточные условия принадлежности к этому образу. По этой причине сам способ сформулировать аналог утверждения a) не вполне очевиден. Мы решили опереться на то обстоятельство, что по самой идеологии задачи об иделах упомянутый образ должен выдерживать умножение на достаточно многие скалярные функции. В качестве аналога утверждения a) выше предлагается следующая теорема, показывающая, что и здесь мало что зависит от X (частный случай этой теоремы приведен в [4]).

Теорема 2. *a) Условие S_∞ влечет условие S_X с той же константой.*

b) Условие S_X влечет условие S_1 с той же константой.

c) Если пространство G_1 сепарабельно, то условие S_1 влечет условие S_∞ с той же константой.

Для формулировки третьей теоремы также потребуется сказать несколько предварительных слов. Пусть U — банахово пространство, $V = U^*$ — его сопряженное. Выделим число $\beta > 1$ и рассмотрим различные банаховы решетки X на $\mathbb{T}$, подчиненные тем же двум требованиям, что и ранее (такие решетки будем называть *хорошими*). Сформулирем X, β *задачу об иделах.* Пусть $Y = X^{\beta-1}, Z = X^\beta, f \in X_A(V), \|f\|_{X_A(V)} \leq 1, h \in Z_A, |h(z)| \leq \|f(z)\|_V^\beta$ при

$z \in \mathbb{D}$. Задача состоит в поиске такой функции $g \in Y_A(V^*)$, что $\|g\|_{Y_A(V^*)} \le C$ и $\langle f(x), g(z)\rangle = h(z), z \in \mathbb{D}$. Термин p, β задача об идеалах обозначает L_p, β задачу об идеалах по опредлению, при этом ∞, β задача об идеалах есть классическая задача об идеалах с показателем β и константой C. Отметим, что для решеток вида L_s определены классы Харди и при $s < 1$, когда решетка является всего лишь квазибанаховой. Это свойство позволяет нам определить p, β задачу об идеалах и при малых p.

Следующий результат — еще одна форма "независимости от решетки X" в задаче об идеалах, но несколько в ином ключе в сравнении с теоремой 2.

Теорема 3. *a) Если разрешима ∞, β задача об идеалах, то разрешима X, β задача об идеалах с той же константой.*

b) Если разрешима X, β задача об идеалах, то разрешима с той же константой β, β задача об идеалах, при условии что решетка X^β банахова (то есть X β-выпукла).

c) Если разрешима β, β задача об идеалах, то разрешима с той же константой ∞, β задача об идеалах, если пространство V сепарабельно.

В последнем разделе еще будет сформулирован ряд замечаний по обобщению операторной задачи о короне.

2. Доказательство теоремы 1

Факт 1. *Упрощенная теорема Пауэрса утверждает следующее. Рассмотрим выпуклые компакты $\{K_1, \dots, K_n\}$ в хаусдорфовых локально выпуклых пространствах $\{X_1, \dots, X_n\}$, и пусть между ними действуют многозначные отображения $\{f_1 : K_1 \to K_2, \dots, f_n : K_n \to K_1\}$ (по определению, многозначное отображение $f : A \to B$ — это отображение $f : A \to 2^B$ в стандартном смысле), у которых образ каждой точки является непустым выпуклым замкнутым множеством, а график у каждого отображения замкнут. Тогда найдется точка $x \in K_1$, такая что $x \in f_n \circ \dots \circ f_1(x)$.*

Доказательство (довольно простое) есть в [4]. При $n = 1$ получается классическая теорема Фан Цзы–Какутани. И.К. Злотников в своем доказательстве теоремы 1 сумел обойтись ею, но для этого ему пришлось довольно искусственно привлечь теорему о непрерывном выборе. Наше доказательство избегает этого приема, но опирается на факт 1 с $n = 2$.

Упрощенная теорема Пауэрса является частным случаем гораздо более общей теоремы, с формулировкой и доказательством можно ознакомиться в [5]. В [4] есть ссылки и на еще более общие ее формулировки.

Факт 2. *Логарифмическая выпуклость шаров имеет место в банаховых (и даже некоторых квазибанаховых) решетках; она означает, что если $\|f\| \le 1, \|g\| \le 1$, то $\|f^\alpha g^{1-\alpha}\| \le 1, 0 \le \alpha \le 1$.*

Доказательство легко получить из неравенства Юнга.

Факт 3. *Если решетки E_0, E_1 обладают свойством Фату и их произведение банахово, то $E_0' = (E_0E_1)'E_1$.*

Ссылки на объяснения можно найти в [4].

Приступим к доказательству. Пусть $|k(z)| \leq \|f(z)\|_E^\alpha \leq 1$. Наша цель решить уравнение $\langle f(z), g(z)\rangle = k(z)$. Поскольку конечномерные банаховы решетки обладают свойством Фату, можно найти функции u, v такие что $|f| = uv, \|f(\zeta)\|_E = \|u(\zeta)\|_{E_0}\|v(\zeta)\|_{E_1} \leq 1$ при $|\zeta| = 1, \|u(\zeta)\|_{E_0}, \|v(\zeta)\|_{E_1} \leq 1$ (далее по умолчанию $|\zeta| = 1$, а норма подразумевается в соотвествующем пространстве). Поскольку нас интересует функция f только в рамках носителя, можно считать что $\log v \in L_1(\mathbb{T} \times \mathbb{Z})$. Рассмотрим множество $B = \{\ \log w : w \in L_\infty(E_1), w \geq v, \|w\|_{E_1} \leq 2\}$ со слабой L_1 топологией. По теореме Данфорда–Петтиса получим компакт, он выпуклый в силу логарифмической выпуклости шаров в банаховых решетках (теорема Данфорда–Петтиса о связи равномерной интегрируемости и слабой компактности в L_1 на пространствах с конечной мерой изложена, например, в [16]). Определим отображение $\Phi_1 : B \to 2B_{H^\infty(E_1)}$ по правилу $\Phi_1(\log w) = e^{P_z(Id+iH)[\log_w]}$ (напомним, что P_z — ядро Пуассона, формула приведена в начале работы), при этом у $2B_{H_\infty(E_1)}$ слабая снизу топология, эквивалентная топологии равномерной сходимости на компактах в круге. Это отображение однозначно и непрерывно (значит, его график замкнут) и почти всюду сохраняет модуль на границе. Далее, пусть

$$D = \{p \in H_\infty(E_0) : \frac{|k(z)|}{2^\alpha} \leq \|p(z)\|^\alpha \leq 1\}$$

с топологией равномерной сходимости на компактах в круге. Определим второе отображение (тоже однозначное) $\Phi_2 : \Phi_1(B) \to D$ по правилу $\Phi_2(\psi) = \frac{f}{\psi}$. Оно также непрерывно и имеет потому замкнутый график. Поясним, что на окружности справедливо равенство $|\frac{f}{\psi}| = |\frac{f}{\omega}|$, поэтому $\frac{|f|}{2} \leq |\frac{f}{\psi}| \leq |u| \leq 1$, так что это отображение действительно действует в D.

Далее определим третье отображение, на этот раз многозначное. На множестве $2^\alpha C_{E_0} B_{H^\infty(E_0')}$ вводим слабую топологию, она же топология равномерной сходимости на компактах в круге. Определим многозначное отображение $\Phi_3 : D \to 2^\alpha C_{E_0} B_{H^\infty(E_0')}$ формулой

$$\Phi_3(\phi) = \{h \in 2^\alpha C_{E_0} B_{H_\infty(E')} : \langle\phi(z), h(z)\rangle = k(z)\}.$$

Непустота образа каждого элемента следует из разрешимости задачи об идеалах для E_0, замкнутость графика и выпуклость образов очевидны. Не у всех трех отображений выпуклая область определения, но, как было сделано в [4], рассмотрим их композицию. Она уже задана на выпуклом компакте, а что касается замкнутости графика, то это свойство легко проверяется для композиции даже многозначных отображений (правда, требуется компактность областей значения) с замкнутым графиком. Обозначим эту композицию через A.

Теперь будем факторизовывать функции h, из которых состоит множество $\Phi_3(\phi)$. Поступаем снова, как в [4]: определим многозначное отображение $F : 2^\alpha C_{E_0} B_{H^\infty(E_0')} \to B$ формулой $F(h) = \{\ \log w \in B : \|\frac{h}{w}\|_{L_\infty(E')} \leq (1+\varepsilon)2^\alpha C_{E_0}\}$.

Так как $E_0' = E'E_1$, по функции h мы можем найти соотвествующую функцию $w \geq 0, \|w\|_{L_\infty(E_1)} \leq 1$ (не обязательно из B). Чтобы попасть в B, возьмем

$w+v$, так что непустота доказана. Выпуклость образов очевидна, осталось проверить только замкнутость графика. Ее можно получить, построив по функциям w_n внешние и перейдя к пределу в круге. Конкретно, мы хотим перейти к пределу в неравенстве $\|\frac{h_n}{w_n}\|_{L_\infty(E')} \le (1+\varepsilon)2^\alpha C_{E_0}$, но если взять соответствующие внешние функции g_{w_n}, то они будут связаны аналогичным неравенством $\|\frac{h_n}{g_{w_n}}\|_{L_\infty(E')} \le (1+\varepsilon)2^\alpha C_{E_0}$, причем по принципу максимума модуля и в круге. Функции $\log w_n$ слабо сходится, тогда внешние функции поточечно сходятся в круге (поскольку и ядро Пуассона, и сопряженное к нему это непрерывные в круге без границы функции), то же можно сказать и про функции h_n — они поточечно сходятся в круге. Тогда в круге в неравенстве можно сделать предельный переход, и мы получим желаемое.

Итак, согласно упрощенной теореме Пауэрса у этой композиции отображений A и F будет неподвижная точка $\log w$. Построив по w внешнюю функцию g_w, мы решим уравнение так: $\langle f, \frac{h}{g_w}\rangle = k$, что и требовалось сделать. От ε легко избавиться с помощью перехода к поточечному пределу решений.

Комментарий. На самом деле, такой метод доказательства позволяет получить более сильный результат. А именно, вместо конечномерности решеток E_0, E_1 достаточно попросить существование таких пространств F_0, F_1, что $F_i^* = E_i$. Рассуждение при этом практически не меняется. Тем не менее, Злотников в своем работе смог доказать разрешимость задачи об идеалах для большего числа решеток, чем получается в этой теореме.

3. Доказательство теоремы 2

Факт 4. *Пусть G — банахово пространство. Тогда $H_1(\mathbb{T}, G^*)$ есть w^* замкнутое подпространство в $M(T, G^*) = C(T, G)^*$. Следовательно, единичный шар этого пространства w^* компактен. Далее, w^* сходимость обобщенных последовательностей в этом шаре эквивалента поточечной w^* сходимости в круге соотвествующих аналитических функций. Если пространство G сепарабельно, то его шар с такой топологией метризуем. При этом $f_n \to f <=> \langle x, F_n\rangle \to \langle x, F\rangle$ при $x \in G$ равномерно на компактах внутри $\mathbb{D}$ для соответствующих аналитических функций F_n, F.*

Факт 5. *Для всякой функции f из $X_A(G^*)$ можно построить внешнюю функцию $\psi_f \in X_A$ (на самом деле, эта внешняя функция строится стандратным способом по функции $\alpha(f)$, которая введена ранее), причем $\|\frac{f}{\psi_f}\|_\infty \le 1$.*

Факт 6. *Теорема Лозановского (в несколько упрощенном виде) гласит, что для обладающей свойством Фату банаховой решетки $L_1 = XX'$.*

Эти факты, обозначения и схема рассужений взяты из [6], там же можно найти ссылки на доказательства или сами доказательства приведенных утверждений.

Нам будет полезен еще один факт, который мы, на сей раз, докажем.

Факт 7. *$H_p(G^*)$ — слабо снизу замкнутое подпространство в пространстве $s - L_p(G^*), 1 < p \le \infty$. Поэтому единичный шар пространства $H_p(G^*)$ слабо* *снизу компактен. Далее, w^* сходимость обобщенных последовательностей в этом шаре эквивалента поточечной w^* сходимости в круге соотвествующих аналитических функций. Если G сепарабельно, то шар этого пространства с такой топологией метризуем. При этом $f_n \xrightarrow{w^*} f$ эквивалентно тому, что $\langle x, F_n\rangle \to \langle x, F\rangle$ при $x \in G$ равномерно на компактах внутри $\mathbb{D}$ для соответствующих аналитических функций F_n, F.*

Начнем доказательство факта 7. Заметим, что по теореме Крейна–Шмульяна (смотри, например, лемму 2 в доказательстве теоремы Эберлейна–Шмульяна из книги [18]) достаточно доказать лишь слабую снизу замкнутость шара пространства $H_p(G^*)$. Пусть $f_\alpha \to f$. Рассмотрим функции вида $\langle f_\alpha, P_z \cdot x\rangle, x \in G$. Так как $P_z \cdot x \in L_q(G)$, то они сходятся при каждом x равномерно на компактах в круге, причем к функции $\langle f, P_z \cdot x\rangle$. Получается, что гармоническое продолжение функции f в круг аналитично. Чтобы показать, что оно принадлежит нужному классу Харди, возьмем любую скалярную функций $g \in H_q$ и получим поточечно сходящуюся в круге обобщенную последовательность функций $f_\alpha g$ в $H_1(G^*)$ с равномерно ограниченной H_1-нормой. Тогда поточечный предел в круге равен $g \cdot f$ и принадлежит классу H_1 (функции $f_\alpha g$ принадлежат шару H_1 и равномерно на компактах сходятся, поэтому предельная функция также принадлежит классу H_1, смотри факт 4). Замкнутость и компактность доказана. То, что равномерная сходимость на компактах влечет слабую сходимость, следует из того, что в обеих топологиях шар компактен, но пределы обобщенных последовательностей в них совпадают. Наконец, метризуемость следует из сепарабельности предсопряженного пространства. Факт доказан.

Приступим к доказательству теоремы.

a) Рассмотрим уравнение $F(z)g(z) = h(z)f(z)$, где $f \in X_A$ и, чтобы его решить, возьмем внешнюю функцию для $f(z)$, то есть $\psi_f(z)$ (факт 5), далее решим уравнение $F(z)g(z) = h(z)\frac{f(z)}{\psi_f(z)}$ (пользуясь условием S_∞, мы можем найти решение $g \in H_\infty(G_1^*)$) и возьмем в качестве ответа $g(z)\psi_f(z)$.

b) На этот раз функция f пробегает пространство $H_1(\mathbb{T})$. Если $f \neq 0$, тогда по теореме Лозановского $|f| = uv_0,\ u, v_0 \geq 0, u \in X, v_0 \in X', \|f\|_{L_1} \leq (1 + \varepsilon)\|u\|_X \|v_0\|_{X'}$. Известно, что если решетка X хорошая, то и X' тоже, поэтому возьмем внешнюю функцию $v \in X'_A$, такую что $|v| \geq v_0$ и $\|v\|_{X'} \leq (1+\varepsilon)\|v_0\|_{X'}$. Взяв уравнение $Fg = h\frac{f}{v}$ и решив его, мы получим желаемое умножением на v. От ε можно избавиться за счет предельного перехода и слабой компактности множества решений.

c) Нам нужно проверить условие S_∞, то есть решить уравнение $F(z)g(z) = f(z)h(z)$ для произвольной фиксированной функции f из единичного шара пространства H_∞, получив ограниченное решение g. Известно нам только, что такое решение существует в множестве $C \cdot B$, где B — единичный шар пространства $H_1(G_1^*)$.

Наделим шар $B = B_{H_1(G_1^*)}$ слабой снизу топологией. Получим метризуемый компакт, где сходимость эквивалентна равномерной слабой снизу сходимости на компактах в открытом круге. Пусть e — конечное подножество единичной сферы пространства G_1. С помощью рассуждений о центрированном семействе пункт с легко сводится к следующему утверждению: для каждого числа $\delta > 0$ найдется функция $g \in C(\delta)B$, такая что

$$Fg = hf, \max_{x \in e} |\langle g(z), x \rangle| \leq (1+\delta)C.$$

Чтобы такое решение найти, берем произвольную функцию $g \in B$ (это не то же g, что в уравнении) и будем делать с ней ряд манипуляций. Пусть P_r — оператор свертки с ядром Пуассона. Пусть $u(\zeta) = \max_{x \in e} |\langle x, P_r[g](\zeta) \rangle|$, далее введем функции

$$f_{r,g} = \frac{\exp(\log(u+\delta) + iH\log(u+\delta))}{C(1+\delta)}.$$

Отметим, что $|f_{r,g}| \geq \frac{\delta}{C(1+\delta)}, \|f_{r,g}\|_1 \leq \frac{1}{C}$.

Определим многозначное отображение $B \xrightarrow{T} B$ формулой $T(g) = \{k \in B : Fk = f_{r,g}fh\}$. Образ каждого элемента непустой и выпуклый, замкнутость графика следует из равномерной сходимости на компактах (функции u_n будут сходиться равномерно, не умаляя общности функции $\log(u_n + \delta)$ сходятся слабо в L_2, тогда функции $f_{r,g}$ сойдутся равномерно на компактах в круге). По теореме Фан Цзы–Какутани, у отображения T есть неподвижная точка g_r, то есть $Fg_r = f_{r,g}fh$. Возьмем $r_n \to 1$ и пусть $g_{r_n} \xrightarrow{w*} g, u_n = u_{g_{r_n}}, a_n = \log(u_n + \delta)$. Опять-таки не умаляя общности (снова из ограниченности в L_2 логарифмов модулей граничных значений) функции f_{r_n,g_n} равномерно на компактах сходятся к Φ. При этом $Fg = \Phi hf$, $|\Phi| \geq \frac{\delta}{C(1+\delta)}$.

Также не умаляя общности $k_n = P_{r_n}[g_{r_n}] \xrightarrow{w*} k \in B$. Взяв $x \in G_1$, можно написать:

$$\langle x, P_r[k](\cdot)\rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} P_{r_n}[\langle x, k_n(\cdot)\rangle] = \lim_{n \longrightarrow \infty} P_r[\langle x, g_{r_n}(\cdot)\rangle] + \lim_{n \longrightarrow \infty} (Id - P_{r_n})P_r[\langle x, g_{r_n}(\cdot)\rangle].$$

Первое слагаемое справа равномерно сходится к $\langle x, P_r[g]\rangle$, по этой причине второе слагаемое равно нулю и $g = k$ (по крайней мере, они граничные значения одинаковых функций). То есть $Fk = \Phi hf$. Еще для них выполняется предельное неравенство для $k = g, x \in e, \Phi$, а именно $|\langle x, g(z)\rangle| = |\langle x, k(z)\rangle| \leq (1+\delta)\Phi(z)$ при $x \in e$. В качестве решения можно взять $\frac{k}{\Phi}$. Получается, все доказано.

Комментарий. Можно заметить, что если описанная перед теоремой форма задачи об идеалах разрешима для всех $f \in X_A$, то $\frac{h}{g_F} \in H_\infty(G_2^*)$, где g_F — внешняя функция для F. Действительно, рассмотрим (выбирая по каждой функции $f \in H_1$ функцию $g \in H_1(G_1^*)$) соотношения $\|\frac{F}{g_F}g\| = |f|\|\frac{h}{g_F}\| \leq C\|f\|$ $=> \|\frac{h}{g_F}\|_\infty \leq C$ (чтобы получить следствие, достаточно аппаратом внешней функции заставить $|f|$ пробежать плотное в положительной части единичного шара L_1 множество, состоящее из функций, суммируемых вместе с логарифмом). Получили даже более сильное утверждение.

4. Доказательство теоремы 3

Прежде всего заметим, что в формулировке X,β-задачи об идеалах выбор $Y = X^{\beta-1}$ и $Z = X^{\beta}$ практически принудительный, другие решетки Y и Z рассматривать особого смысла не имеет. Действительно, по условию $F \in X_A(V)$, а h должна быть более или менее произвольной функцией из Z_A, такой что $\|f(z)\|^{\beta} \geq |h(z)|$ при $z \in \mathbb{D}$, что, в общем, не оставляет вариантов кроме как взять $Z = X^{\beta}$. Далее, мы хотим обеспечить равенство $\langle f, g\rangle = h$ с $g \in Y_A(V)$, поэтому разумно потребовать, чтобы произведение XY равнялось Z. Однако $X \cdot X^{\beta-1} = Z$. Воспользуемся теперь давно известным фактом.

Если Z, E, F — банаховы решетки со свойством Фату и $ZE = ZF$ (обе решетки банаховы), то $E = F$. Действительно, $E' = (ZE)'Z = (ZF)'Z = F' \Rightarrow E = E'' = F'' = F$. Свойство Фату существенно, например $l_q = l_q l_\infty = l_q c_0$.

Перейдем к доказательству теоремы.

a) Решаем уравнение $\langle f, g\rangle = h$. Построим по f внешнюю функцию Ψ_f и решим уравнение $\langle \frac{f}{\Psi}, g\rangle = \frac{g}{\Psi^{\beta}}$. Функция $g\Psi^{\beta-1}$ нам подойдет.

b) Так как $|f|^{\beta} \in L_1$, то по теореме Лозановского $|f| = u^{\frac{1}{\beta}} v_0^{\frac{1}{\beta}}, u^{\frac{1}{\beta}} \in X, v_0^{\frac{1}{\beta}} \in ((X^s)')^{\frac{1}{\beta}} = W$. Можно считать, что $\|u^{\frac{1}{\beta}}\|_X \|v_0^{\frac{1}{\beta}}\|_W \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{X(V)}, \|u^{\frac{1}{\beta}}\|_X \leq 1$. Поскольку пространство W тоже хорошее, возьмем внешнюю функцию $v \in W_A$, для которой $|v| \geq |v_0^{\frac{1}{\beta}}|, \|v\|_W \leq (1+\varepsilon)\|v_0^{\frac{1}{\beta}}\|_W$. Решаем уравнение $\langle \frac{f}{v}, g\rangle = \frac{g}{v^{\beta}}$, берем $gv^{\beta-1}$. Легко проверить, что это решение из нужной решетки. От ε можно избавиться за счет предельного перехода и слабой компактности множества решений.

c) Пусть $B = B_{H_{\frac{\beta}{\beta-1}}}$ со слабой снизу топологией, e — конечное подмножество единичной сферы V. Ищем то же, что и в теореме 2 — хотим для каждого числа $\delta > 0$ функцию $g \in C(\delta)B$, такую что

$$\langle f, g\rangle = h, \max_{x \in e} |\langle g(z), x\rangle| \leq (1+\delta)C.$$

(и как и в теореме 2, этого будет достаточно), определяем функцию $f_{r,g}$ как и в прошлой теореме (снова нам, начиная с этого места, удобно считать g произвольным элементом единичного шара просранства $H_{\frac{\beta}{\beta-1}}$), у нее те же ограничения ($|f_{r,g}| \geq \frac{\delta}{C(1+\delta)}, \|f_{r,g}\|_1 \leq \frac{1}{C}$). Пусть отображение T задано формулой $g \xrightarrow{T} \{\ k : \langle f(z) f_{r,g}^{\frac{1}{\beta-1}}, k(z)\rangle = h(z) f_{r,g}^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}$. Аналогично теореме 2 у него по теоереме Фан Цзы–Какутани (непустота этих образов следует из условия пункта c, выпуклость очевидна, замкнутость графика обусловлена тем, что слабая снизу топология на шаре пространства $H_{\frac{\beta}{\beta-1}}$ эквивалентна равномерной слабой снизу сходимости на компактах в круге) есть неподвижная точка g_r (для нее верно равенство $\langle f(z) f_{r,g}^{\frac{1}{\beta-1}}, g_r\rangle = h(z) f_{r,g}^{\frac{\beta}{\beta-1}}\}$). Далее действуем, как в прошлой теореме, с теми же обозначениями и рассуждениями — снова берем сходящуюся к единице последовательность r_n, снова g считаем пределом соответствующей последовательности функций g_n, а пределом последовательности функций f_{r_n,g_n}

считаем функцию Φ, снова вводим с помощью ядра Пуассона функции k_n и k и с помощью него же точно так же устанавливаем, что $g = k$. Единственное небольшое расхождение состоит в следующем — когда мы пишем ядро Пуассона, мы используем то, что $H_p \subset H_1$ и что $\|P_z\|_{H_p \to H_p} = 1$.

В итоге получаем соотношение $\langle f(z)\Phi^{\frac{1}{\beta-1}}, g(z)\rangle = h(z)\Phi^{\frac{\beta}{\beta-1}}$ и снова берем фуекцию $\frac{k}{\Phi}$, которая снова нам годится.

Комментарий. В некоторых случаях достаточно $(\beta - 1)$-выпуклости решетки X, если возможно определить аналитическую часть для не обязательно банаховой решетки X^β. В качестве примера можно взять $X = L_p$.

5. Несколько комментариев к операторной задаче о короне

Рассмотрим несколько примеров приложений теорем 2 и 3. Существует так называемая операторная задача о короне или задача Сёкефальви-Надя. Она заключается в следующем: пусть $F \in H_\infty(Lin(H_1, H_2)), H_1, H_2$ — гильбертовы пространства (для простоты, сепарабельные), причем $|a| \geq |F(z)a| \geq \delta|a|$. Тогда требуется найти операторную функцию G из $H_\infty(Lin(H_2, H_1))$ так, чтобы $GF = Id_{H_1}$. Это равносильно тому, что все уравнения вида $GF = K$ с $K \in H_\infty(End(H_1))$ разрешимы в $H_\infty(Lin(H_2, H_1))$.

Операторные функции $F(z)$ со свойством $\|a\| \geq \|F(z)a\| \geq \delta\|a\|$ для всех векторов a и некого $\delta > 0$ будем звать удобными. В.И. Васюнин доказал разрешимость задачи в случае $\dim H_1 < \infty$ и оценил норму решения, С.Р. Трейль построил в [8] пример удобной функции, для которой операторная задача о короне не разрешима (естественно, в его работе $\dim H_1 = \infty$).

Рассмотрим несколько обобщений этой задачи.

Рассмотрим разрешимость уравнений такого вида с $F \in H_\infty(Lin(H_1, H_2)), G \in X_A(Lin(H_2, H_1)), K \in X_A(End(H_1))$.

Сравнительно несложно изучить разрешимость в случае $\dim H_1 < \infty$.

Предложение 1. *Разрешимость таких уравнений не зависит от решетки X и возможна только для удобных функций F. В частности, если $\dim H_1 = n < \infty$, то уравнение выше разрешимо причем $C \leq \sqrt{n}C_{corona}(\delta^n)$ (где $C_{corona}(\delta)$ — наилучшая оценка решения в классической задаче о короне с данными в l_2).*

Опишем кратко доказательства этого и других родственных утверждений (опуская детали, аналогичные уже изложенным).

То, что от решетки ничего не зависит, следует из теоремы об открытом отображении и эквивалентности задач о короне для разных X, что обосновано в [6]. При этом G рассматривается именно как векторозначная функция, у которой существуют граничные значения (в силу наличия у пространства операторов между гильбертовыми пространствами предсопряженного), а умножение справа на F - как действие на этот вектор линейного оператора. Случай $n < \infty$ следует из рассуждения Васюнина, описанного в [7]. Удобство операторной функции F необходимо в случае пространства H_∞, а потому необходимо всегда. Предложение доказано.

Оказывается, что если нет условия $\dim H_1 < \infty$, то даже для удобных данных уравнения $GF = K$ могут быть неразрешимы.

Предложение 2. *Существует такая удобная операторная функция $F \in H_\infty$, что для любой решетки X найдется функция $K \in X_A$, такая что уравнение $GF = K$ не разрешимо в X_A. Более того, такую операторную функцию K можно выбрать вида $h(z)Id_{H_1}$*

Для доказательства возьмем построенный Трейлем в [8] пример удобной операторной функции $F(z)$, для которой неразрешимо в H_∞ уравнение $G(z)F(z) = Id_{H_1}$. Далее применим теорему 2, вот и все.

Рассмотрим теперь как данные F, h и для K уравнение $GF = hK$ относительно G. В теореме 2 в роли K была скалярная функция h, но от того, что на ее месте стоит оператор, рассуждения теоремы 2 совершенно не зависят. По теореме 2 получаем, что разрешимость данного уравнения при всех K не зависит от решетки, зависит лишь от F, h. Уже знаем случай, когда такой разрешимости у нас нет, приведем пример когда она есть.

Предложение 3. *Если для всех векторов a выполнено условие $|a| \geq |F(z)a| \geq |h(z)|^{\frac{1}{p}}|a|, \dim H_1 = n, p > 2n$, то уравнение $GF = h(z)Id_{H_1}$ разрешимо в H_∞, поэтому разрешимы уравнения $GF = hK$, G, K из любой решетки (причем с той же константой).*

Для доказательства заметим, что все собственные числа операторной функции $F(z)$ по модулю не меньше, чем $|h(z)|^{\frac{1}{p}}$, так что $\det FF^* \geq |h(z)|^{\frac{2n}{p}}$, но первое равно $\sum_{A \subset \mathbb{N}, |A|=n} |\det F_A|^2$ по формуле Бине–Коши, где $F_A = \{F_{ij}\}_{i \in A, 1 \leq j \leq n}$. Используя разрешимость задачи об идеалах, можем найти функции $\{g_A\}$, для которых $\sum \det F_A g_A = h$. Здесь функция F_A^{ij} — алгебраическое дополнение элемента F_{ij} в F_A, если $j \in A$, иначе 0. Определим $G_{ij} = \sum_A g_A F_A^{ij}$, тогда $G_{ij}F = \delta_{ij}h$. Оценка величины $\|G\|$ производится абсолютно так же, как в [7], откуда и взята идея рассуждения. Предложение доказано.

А что, если брать F, h не из H_∞, а из X_A, X_A^p? Для удобства при этом $K \in H_\infty, G \in X_A^{p-1}$ (иными словами, есть ли операторный аналог теоремы 3)? Оказывается, есть. Если $p > 1$, то аналогично теореме 3 можно определить X, p операторную задачу об идеалах: найти операторную функцию G со свойством $GF = hK$, если $\|F\|_X \leq 1$, $|h(z)|^{\frac{1}{p}}|a| \leq |F(z)a|$, при этом $\|G\|_{X^{p-1}} \leq C$.

Предложение 4. *a) $L_\infty, p => X, p$ с той же константой (то есть из разрешимости одной задачи следует разрешимость другой, далее смысл $=>$ такой же).*

b) $L_s, p => X, p$, если $s \geq p$ и решетка X^s банахова (то есть X s-выпукла).

c) $L_s, p => L_\infty, p$, если H_1, H_2 сепарабельны.

Доказательство по существу такое же, как в теореме 3. С помощью внешних функций мы можем получить решение из случая L_∞, p, и с их помощью (а также за счет теоремы Лозановского) мы можем свести любую задачу к случаю L_s, p, откуда выводим разрешимость задачи L_∞, p с помощью внешних функций и теоремы Фан Цзы–Какутани. Сепарабельность этих двух гильбертовых пространств гарантирует сепарабельность пространства ядерных операторов, предсопряженного к пространству ограниченных операторов.

Список литературы

[1] Fan Ky, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38. **1** (1952), №1, 121–126.

[2] И. К. Злотников, *Задача об идеалах алгебры H^∞ в случае некоторых пространств последовательностей*, Алгебра и анализ (2017), том 29, выпуск 5, 51–67

[3] D.V. Rutsky, *Real Interpolation of Hardy-Type Spaces and BMO-Regularity*, Journal of Fourier Analysis and Applications (2020)

[4] Кисляков С. В., Скворцов А. А, *Теоремы о неподвижной точке и классы Харди*, Записки научных семинаров ПОМИ (2022), том 512, 95-115

[5] Michael J. Powers, *Lefschetz fixed point theorems for a new class of multi-valued maps*, Pacific Journal of Mathematics (1972), Vol 42, no 1.

[6] С. В. Кисляков, Д. В. Руцкий, *Несколько замечаний к теореме о короне*, Алгебра и анализ, 2012, том 24, выпуск 2, страницы 171–191

[7] В. А. Толоконников, *Оценки в теореме Карлесона о короне, идеалы алгебры H^∞, задача Секефальви-Надя*, Записки научных семинаров ЛОМИ, 1981, том 113, страницы 178–198

[8] С. Р. Треиль, *Углы между коинвариантными подпространствами и операторная проблема короны. Задача Сёкефальви-Надя*, Доклады Академии наук, 1988, том 302, номер 5, страницы 1063–1068

[9] П. Кусис, *Введение в теорию пространств Харди с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Москва «Мир», 1984

[10] И. И. Привалов, *Граничные свойства однозначных аналитических функций*, Москва, Издание МГУ, 1941

[11] Г. Я. Лозановский, *О некоторых банаховых структурах*, Сиб. матем. журн., 1969, том 10, номер 3, 584–599

[12] А. В. Бухвалов, *Пространства Харди векторнозначных функций*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1976, том 65, 5–16

[13] С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках аналитических функций*, Алгебра и анализ, 2002, том 14, выпуск 2, с 117-135

[14] Dmitry V. Rutsky, *Corona problem with data in ideal space of sequence*, Archive der Mathematic 108 (2017), 609-619

[15] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *Функциональный анализ* 3 издание, Москва «Наука», 1984

[16] Богачев В.И. *Основы теории меры. Том 1*, Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003

[17] А.Я. Хелемский, *Лекции и упражнения по функциональному анализу*, Москва, МЦНМО, 2004

[18] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Москва «Мир», 1967