Отзыв научного руководителя о выпускной квалификационной работе
Екатерины Александровны Кочетковой
"Суммы линейных образов множеств"

Работа Екатерины Кочетковой посвящена вопросам об оценках величин вида

$$\sum_{i=1}^{n} |\tau_i K|,$$

где $K \subset \mathbb{R}^d$ — компакт данной меры $|K| = 1$, а τ_i — данные линейные операторы.

Дискретный аналог этого вопроса весьма нетривиален даже в случае, когда все τ_i — гомотетии. Этот круг вопросов привлекает ведущих математиков, занимающихся аддитивной комбинаторикой (Бух, Конягин, Конлон и др.) В непрерывном же случае для нескольких гомотетий ответом является шар, и доказательство нижней оценки немедленно следует из неравенства Брунна – Минковского.;; Но даже в случае $n = 2$, $\tau_1 = I$ — тождественный оператор, неравенство Брунна – Минковского даёт точный ответ только в случае когда τ_2 — оператор с равными по модулю собственными числами.

В недавней работе Д. Крачуну удалось в случае двух операторов $\tau_1 = I$ и τ_2 доказать точную оценку $\prod(1 + |\lambda_i|)$, где λ_i — собственные числа τ_2.

Случай нескольких операторов более сложен, и едва ли ответ в общем виде может быть найден (что видно в частности, из нетривиальности полученных Екатериной оптимальных примеров в первом же случае трёх операторов, два из которых вырождены, на плоскости). Но можно пытаться получать, с одной стороны, удовлетворительно близкие асимптотические оценки, с другой стороны, решать задачу, когда она решается.

Екатерина преуспела и в том и в другом.

Во-первых, ей полностью решена задача в случае выпуклого компактана на плоскости и его суммы с двумя ортогональными проекциями. Эта задача параметризована углом α между прямыми, на которые рассматриваются проекции. Ответ даётся некоторым восьмиугольником, стороны которого удовлетворяют нетривиальному соотношению. Эта часть работы сочетает идейно-геометрическую и трудоёмкую техническую составляющие. Отметим, что ответ не является монотонным по α, чего можно было бы наивно ожидать.

Условие выпуклости можно заменить несколько более слабым условием что проекции являются отрезками (например, это так для связных компактов). Предположительно, и это техническое условие можно отбросить, но доказать это оказалось неожиданно сложно: пока не получается.

Во-вторых, ей получена общая оценка меры суммы множества и его проекций на прямые в многомерном случае, обращающаяся в равенство в выпуклом случае, и универсальная оценка (для любого набора прямых) сверху для решения оптимальной задачи.

Отмечу, что Екатерина работала совершенно самостоятельно, моя роль состояла в постановке вопросов, впрочем, некоторые и вопросы она ставила сама.

Безусловно, её работа вполне удовлетворяет самым взыскательным требованиям, предъявляемым к выпускным квадификационным работам бакалавров, и заслуживает оценки “отлично”.

научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор факультета математики и компьютерных наук
Санкт-Петербургского государственного университета
Ф. В. Петров
Петр