Санкт-Петербургский государственный университет

КОЧЕТКОВА Екатерина Александровна

Выпускная квалификационная работа

Суммы линейных образов множества

Уровень образования:
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2019 "Математика"

Научный руководитель:
профессор, Факультет математики
и компьютерных наук
Петров Федор Владимирович

Рецензент:
ассистент-профессор,
Гуангдонг Технион -
Израильский Технологический
Институт
Калинин Никита Сергеевич

Санкт-Петербург
2023 год

Содержание

1. Введение

Неравенство Брунна–Минковского

$$|A+B|^{1/n} \geqslant |A|^{1/n} + |B|^{1/n} \tag{1}$$

(здесь A, B — непустые компакты в $\mathbb{R}^n$, $|\cdot|$ обозначает меру Лебега) — одно из самых важных геометрических неравенств, имеющих множество приложений и обобщений, в том числе относящихся к дискретным задачам аддитивной комбинаторики, в которых A, B — конечные множества.

Равенство в (1) достигается для положительно–гомотетичных выпуклых тел (а также в тривиальных случаях, когда A или B — точка или $|A+B| = 0$, см. напр. [6]).

Когда B и A связаны таким образом, что гомотетичность исключается, неравенство (1) оказывается возможным усилить. В недавней работе [7] доказано, что если $B = TA$, где T — фиксированный линейный эндоморфизм $\mathbb{R}^n$, а A — переменный компакт единичной меры Лебега, то имеет место соотношение

$$\inf_A |A + TA| = H(T) := \prod_{i=1}^{n} (1 + |\lambda_i|),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа T (с учётом алгебраической кратности).

Эта оценка совпадает с даваемой неравенством Брунна – Минковского оценкой $(1 + |\det T|^{1/n})^n$ только когда все собственные числа равны по абсолютной величине.

Задачей настоящей работы является продолжение изучения экстремальных задач вида

$$|\sum_{i=1}^{N} T_i A| \to \min$$

для компактов A единчиной меры и фиксированных линейных операторов $T_1, \ldots, T_N$.

Отметим, что дискретный аналог этой задачи активно изучался [1-5 и др.], но в основном в случаях, для которых неравенство Брунна–Минковского обращается в равенство (сумма гомотетичных образов множества).

Уже в случае нескольких одномерных проектирований непрерывная задача оказывается, как мы видим в дальнейшем, нетривиальной.

2. Постановка задачи в $\mathbb{R}^2$

Дан компакт A единичной меры в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и две прямые X и Y. Символом α обозначим острый угол между прямыми. Пусть P_XA и P_YA – ортогональные проекции множества A меры $|A|=1$ на прямые X и Y соответственно. Необходимо найти чему равна минимальная возможная мера Лебега суммы по Минковскому $B=A+P_XA+P_YA$. Далее $|X|$ обозначает меру Лебега X соответствующей размерности.

3. Оценка в $\mathbb{R}^2$

Лемма 3.1. $|B|\geq 3+\sin^2\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим координаты, связанные с прямыми X и Y – выберем такую ориентацию прямых, чтобы ориентированный угол между ними не превосходил $\frac{\pi}{2}$. Отметим, что операция параллельного переноса A не меняет меру множества B. А тогда можно считать, что обе проекции содержат начало координат, причем для каждой проекции оно является точкой с наименьшей координатой по соответствующей оси. Пусть X' и Y' – прямые, перпендикулярные X и Y соответственно.

Рассмотрим сначала множество $A+P_YA$. Заметим, что мера пересечения любой прямой, параллельной P_YA, и множества $A+P_YA$ хотя бы на $|P_YA|$ больше, чем мера пересечения той же прямой и A, если пересечение не было пустым. Тогда, согласно принципу Кавальери,

$$|A+P_YA|\geq|P_YA|\cdot|P_{Y'}A|+|A|=|P_YA|\cdot|P_{Y'}A|+1.$$

Далее докажем, что $P_{X'}(A+P_YA)=P_{X'}A+P_{X'}P_YA$. Действительно, проекция суммы по Минковскому двух множеств есть сумма по Минковскому их проекций. Отсюда получим оценку

$$|P_{X'}(A+P_YA)|=|P_{X'}A+P_{X'}P_YA|\geq|P_{X'}A|+|P_{X'}P_YA|=|P_{X'}A|+|P_YA|\cdot\sin\alpha \qquad (1)$$

где первое неравенство следует из того, что сумма мер двух непустых множеств на прямой не превосходит меры их суммы по Минковскому.

Наконец, мера любого непустого сечения множества $A+P_YA$ прямой, параллельной P_XA, хотя бы на $|P_XA|$ меньше меры сечения той же прямой множества $A+P_XA+P_YA$. Отсюда, по принципу Кавальери,

$$|B|=|A+P_XA+P_YA|\geq|P_XA|\cdot|P_{X'}(A+P_YA)|+|A+P_YA|. \qquad (2)$$

В силу неравенства (1), получим оценку оценку:

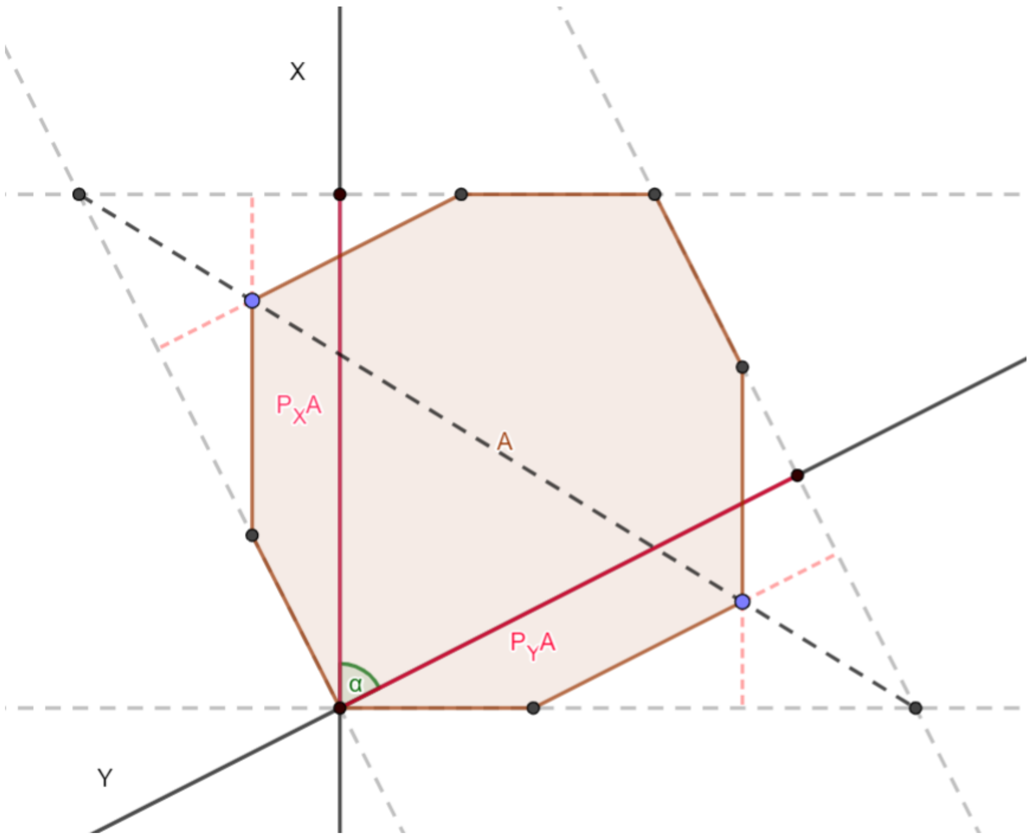
$$|B|\geq 1+|P_YA|\cdot|P_{Y'}A|+|P_XA|\cdot|P_{X'}A|+|P_XA|\cdot|P_YA|\cdot\sin\alpha.$$

Осталось заметить, что $|P_YA|\cdot|P_{Y'}A|\geq 1$ так как сумма по Минковскому P_YA и $P_{Y'}A$ содержит множество A; аналогично $|P_XA|\cdot|P_{X'}A|\geq 1$. Наконец, восстановим перпендикуляры к X и Y в точках множеств P_XA и P_YA; A будет лежать в пересечении этих множеств, а мера пересечения составляет $\frac{|P_YA|}{\sin\alpha}\cdot\frac{|P_XA|}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha$. Значит, $\frac{|P_YA|}{\sin\alpha}\cdot\frac{|P_XA|}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha\geq 1$, откуда $|P_XA|\cdot|P_YA|\cdot\sin\alpha\geq\sin^2\alpha$. Подставим полученные оценки в неравенство (2):

$$|B|\geq 3+\sin^2\alpha \qquad (3)$$

$\square$

4. Пример в $\mathbb{R}^2$



Будем искать $P_X A$ и $P_Y A$ в виде отрезков равной длины, начинающихся в начале координат и лежащих на положительных полуосях X и Y. В концах этих отрезков восстановим перпендикуляры, и пересечение этих перпендикуляров даст параллелограмм. Рассмотрим диагональ между острыми углами параллелограмма. Будем искать множество A в виде восьмиугольника, симметричного относительно каждой биссектрисы параллелограмма, две вершины которого лежат на диагонали (будем называть такие вершины *диагональными*), две совпадают с вершинами при тупых углах параллелограмма, а остальные четыре, которые мы будем называть *побочными*, лежат на его сторонах, причем так, чтобы стороны восьмиугольника, не лежащие на сторонах параллелограмма, были перпендикулярны соотвествующим сторонам параллелограмма (см. рисунок). Полученный восьмиугольник выпуклый, а значит, в оценке (2) достигается равенство: при сдвиге множества A на $P_Y A$ площадь восьмиугольника увеличится *ровно* на $|P_Y A| \cdot |P_{Y'} A|$, проекция на X' – *ровно* на $|P_Y A| \cdot \sin\alpha$, и наконец при сдвиге на $P_X A$ множества $A + P_Y A$ его мера увеличится *ровно* на $|P_X A| \cdot |P_{X'}(A + P_Y A)|$.

Пусть $a = |P_Y A| = |P_X A|$ а $b = |P_{X'} A| = |P_{Y'} A|$. Зафиксируем некоторое значение a. Ясно, что положение диагональных вершин однозначно определяет b, а также расположение побочных вершин. Чтобы восьмиугольник существовал, необходимо и достаточно чтобы диагональные вершины лежали внутри параллелограмма, а так же чтобы побочные вершины, построенные по ним, лежали именно на сторонах параллелограмма, а не на их продолжениях. Первый критерий равносилен тому, что проекция восьмиугольника на X' меньше проекции параллелограмма на X'. По второму критерию отберем все значения b между двумя критическими — которые соответствуют случаю, когда все побочные вершины совпадают с вершинами острых углов параллелограмма, и когда они совпадают с вершинами тупых углов параллелограмма. Первый критерий дает ограничение $a \operatorname{ctg} a/2 > b$. Когда побочные вершины восьмиугольника совпадают с вершинами острых углов параллелограмма, снова получаем $b = a \operatorname{ctg} a/2$. Когда же они совпадают с вершинами тупых углов параллелограмма, диагональные вершины находятся в точках пересечения диагонали и высот параллелограмма, опущенных из его тупого угла. Отсюда расстояние между диагональными вершинами будет равно $\frac{a}{\sin\alpha/2} - 2\frac{a \operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha/2}$ – разности длины диагонали и двух гипотенуз прямоугольных треугольников, образованных вершиной острого угла параллелограмма, ближайшей к ней диагональной вершиной и основанием высоты параллелограмма, выпущенной из вершины тупого угла. Ее проекция будет равна $a \operatorname{ctg}\alpha/2 - 2a \operatorname{ctg}\alpha$. Тем самым, второй крайний случай дает $b = a \operatorname{ctg}\alpha/2 - 2a \operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом, чтобы восьмиугольник существовал, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено двойное неравенство:

$$a \operatorname{ctg}\frac{a}{2} > b > a \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 2a \operatorname{ctg}\alpha.$$

Теперь выразим площадь восьмиугольника через a и b. Дополнение восьмиугольника до параллелограмма можно разбить на четыре равных треугольника – образованные вершиной острого угла, ближайшей к ней диагональной вершиной, и основанием высоты параллелограмма, выпущенной из вершины тупого угла. Про такой треугольник нам известна его сторона, лежащая на диагонали – она равна полуразности диагонали параллелограмма и восьмиугольника, и все углы. Длина этой стороны равна $\frac{a}{2\sin\alpha/2} - \frac{b}{2\cos\alpha/2}$. Сторона напротив тупого угла по теореме синусов будет равна $(\frac{a}{2\sin\alpha/2} - \frac{b}{2\cos\alpha/2})\frac{\sin(\pi/2+\alpha/2)}{\cos\alpha}$. Тем самым, площадь четырех треугольников будет равна $\frac{1}{2\cos\alpha}(\frac{a}{\sin\alpha/2} - \frac{b}{\cos\alpha/2})^2 \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

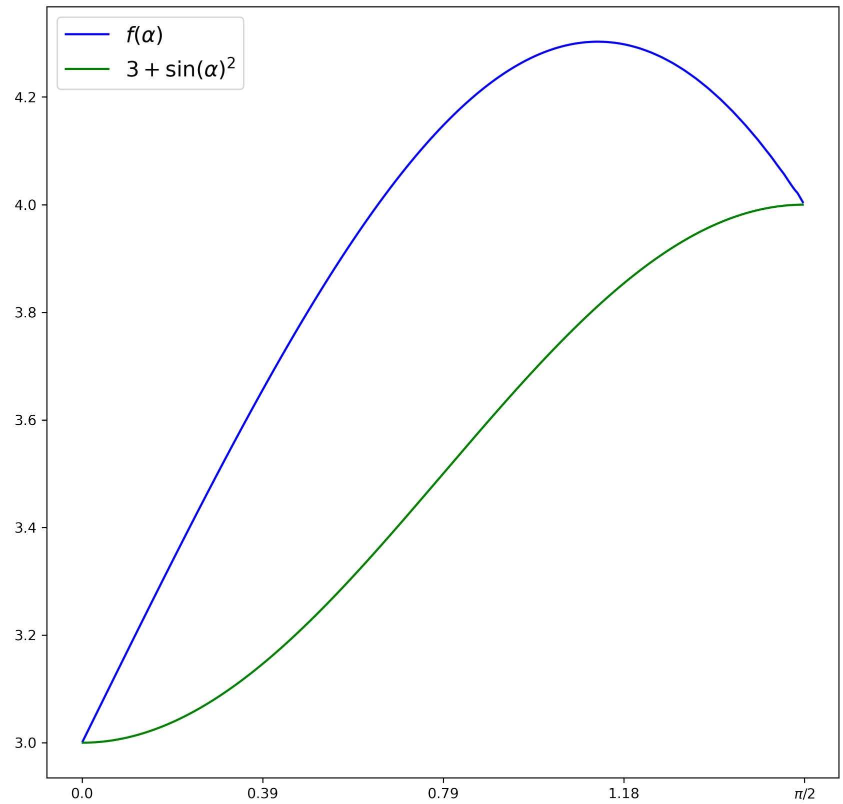
Итого, площадь восьмиугольника будет равна:

$$\frac{a^2}{\sin\alpha} - \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{a}{\sin\alpha/2} - \frac{b}{\cos\alpha/2}\right)^2 \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Теперь, имея ограничения на b, необходимо минимизировать отношение площади B к посчитанной площади восьмиугольника. Сократим числитель и знаменатель на a^2, введем обозначение $x = \frac{b}{a}$, получим, что для каждого α необходимо минимизировать

$$L(x,\alpha) = 1 + \frac{2x + \sin\alpha}{\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4}(\frac{1}{\sin\alpha/2} - \frac{x}{\cos\alpha/2})^2} \tag{4}$$

по x с соответсвующим ограничением на x. На следующем чертеже представлена функция $f(\alpha)$, являющаяся решением задачи минимизации, а также оценка $3 + \sin^2(\alpha)$:


$f(\alpha)$
$3 + \sin(\alpha)^2$
4.2
4.0
3.8
3.6
3.4
3.2
3.0
0.0
0.39
0.79
1.18
$\pi/2$

5. Решение задачи для выпуклых множеств в $\mathbb{R}^2$

Теорема 5.1. *Если рассматривается частный случай задачи, где проекции компакта на прямые X, Y и ортогональные им X' и Y' являются отрезками, то построенный пример является оптимальным.*

Следствие 5.1. В частности, мы получаем ответ для всех выпуклых множеств и всех связных множеств.

Доказательство. Задача равносильна поиску минимума $\frac{|B|}{|A|}$ по всем компактам, не обязательно единичной меры, поэтому будем считать, что $|A|$ может быть произвольной. Воспользуемся полученной оценкой

$$\frac{|B|}{|A|} \geq \frac{|P_X A| \cdot (|P_{X'} A| + |P_Y A| \cdot \sin\alpha) + |P_Y A| \cdot |P_{Y'} A|}{|A|} + 1,$$

причем было установлено, что для выпуклого A неравенство обращается в равенство. Для удобства дальнейших рассуждений, будем считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. При $\alpha = 0$, согласно оценке, $|B| \geq 3|A|$, причем равенство достигается, например, на квадрате со стороной параллельной X и Y. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ у нас есть оценка $|B| \geq 4|A|$, которая достигается на квадрате со сторонами параллельными X и Y.

Покажем, что минимум выражения $\frac{|B|}{|A|}$ достигается на выпуклом множестве. Зафиксируем множество A_0, реализующее минимум отношения. Рассмотрим максимальное по включению множество A'_0 с такими же проекциями на X, X', Y, Y' как и у множества A_0. Ясно, что множество A'_0 является выпуклым. Его можно определить как пересечение четырех полос, каждая из которых является прообразом проекции A_0 при операции проектирования $\mathbb{R}^2$ на одну из прямых. Обозначим через B'_0 множество $A'_0 + P_X A'_0 + P_Y A'_0$. Имеет место оценка

$$\frac{|B_0|}{|A_0|} \geq \frac{|P_X A_0| \cdot (|P_{X'} A_0| + |P_Y A_0| \cdot \sin\alpha) + |P_Y A_0| \cdot |P_{Y'} A_0|}{|A_0|} + 1 \geq$$
$$\geq \frac{|P_X A_0| \cdot (|P_{X'} A_0| + |P_Y A_0| \cdot \sin\alpha) + |P_Y A_0| \cdot |P_{Y'} A_0|}{|A'_0|} + 1 = \frac{|B'_0|}{|A'_0|}.$$

Поскольку отношение $\frac{|B_0|}{|A_0|}$ минимально по выбору A_0 и $\frac{|B_0|}{|A_0|} \geq \frac{|B'_0|}{|A'_0|}$, на множестве A'_0 тоже достигается минимум. Более того, это множество имеет специальный вид, описанный выше. Его можно также представить как пересечение прямоугольника, проекции которого на X и X' это $P_X A'_0$ и $P_{X'} A'_0$, и прямоугольника, проекции которого на Y и Y' это $P_Y A'_0$ и $P_{Y'} A'_0$. Задача поиска минимума $\frac{|B|}{|A|}$, тем самым, свелась к задаче минимизации функционала $L(\alpha, x, x', y, y', z) = \frac{x(x' + y \cdot \sin\alpha) + y \cdot y'}{z}$, где x, x', y, y' – длины проекций компакта меры z специального вида.

Ясно, что A'_0 является многоугольником с числом сторон от четырех до восьми. Покажем, что A'_0 должен содержать именно восемь сторон. Предположим противное. Отметим, что компакт A'_0 обязан содержать хотя бы одну точку каждой из сторон прямоугольников, так как их проекции совпадают с проекциями A'_0. Значит, у A'_0 может быть меньше чем восемь сторон только если угол одного из прямоугольников лежит на стороне другого. Ясно, что если мы уменьшим проекцию на прямую, перпендикулярную этой стороне, на

ε, то мера A'_0 уменьшится на величину, квадратичную по ε, а числитель L уменьшится на величину, линейную по ε. Поэтому если взять достаточно малое значение ε, то описанная операция уменьшит значение функционала, а значит исходное A'_0 не могло быть оптимальным.

Тот факт, что в пересечении прямоугольников лежит именно восьмиугольник, означает, что прямоугольники можно расположить относительно друг друга так, что их вершины будут лежать строго вне друг друга. Из этого следует, что проекции прямоугольника со сторонами $P_X A'_0$ и $P_{X'} A'_0$ на Y и Y' должны быть строго больше, чем $|P_Y A'_0|$ и $|P_{Y'} A'_0|$, и наоборот:

$$\begin{cases} y\sin\alpha + y'\cos\alpha > x' \\ x\sin\alpha + x'\cos\alpha > y' \\ y\cos\alpha + y'\sin\alpha > x \\ x\cos\alpha + x'\sin\alpha > y \end{cases} \tag{2}$$

Если требование выше выполнено, то прямоугольники можно расположить так, чтобы в пересечении был именно восьмиугольник. Достаточно сдвинуть их таким образом, чтобы их центры совпали. Поэтому минимум функционала L необходимо и достаточно искать на множестве точек (x, x', y, y'), удовлетворяющих ограничениям выше.

Зафиксируем x, x', y, y' и найдем оптимальный восьмиугольник A с такими длинами проекций. Удвоенную меру множества A можно записать как $xx' + yy' - S$, где S – сумма мер прямоугольных треугольников, которые отсекаются при пересечении прямоугольников. Максимизация меры A при фиксированных x, x', y, y', тем самым, равносильна минимизации S. Разобьем восемь треугольников на пары: два треугольника находятся в паре, если они были отсечены от одного прямоугольника параллельными сторонами другого прямоугольника. Ясно, что сумма их высот, проведенных к гипотенузе, является постоянной величиной. Все восемь треугольников подобны друг другу, значит их площади пропорциональны квадрату высоты, проведенной к гипотенузе, с одним и тем же коэффициентом. Это означает, что сумма площадей двух парных треугольников минимальна тогда, когда их высоты, проведенные к гипотенузе, равны. В случае совпадения центров прямоугольников суммы площадей треугольников в каждой из четырех пар минимальны, значит он соответствует оптимальному A. Мера оптимального A выражается явно через x, x', y, y', что позволяет нам избавиться от переменной z в функционале L

$$L(\alpha, x, x', y, y') = \frac{x(x' + y\cdot\sin\alpha) + y\cdot y'}{\frac{x'y'}{2\sin\alpha} + \frac{xy'}{2\cos\alpha} + \frac{x'y}{2\cos\alpha} + \frac{xy}{2\sin\alpha} - \frac{x^2+x'^2+y^2+y'^2}{2\sin 2\alpha}}$$

Поскольку $L(\alpha, x, x', y, y') = L(\alpha, cx, cx', cy, cy')$, поделим каждую из переменных на y. Образ каждой из оставшихся переменных будем обозначать так же. Этим преобразованием мы сократили число переменных. Чтобы облегчить вычисления, перейдем от функционала L к функционалу $K = \frac{1}{L}$. Вместо того, чтобы искать минимум L, будем искать максимум K

$$K(\alpha, x, x', y') = \frac{\frac{x'y'}{2\sin\alpha} + \frac{xy'}{2\cos\alpha} + \frac{x'}{2\cos\alpha} + \frac{x}{2\sin\alpha} - \frac{x^2+x'^2+1+y'^2}{2\sin 2\alpha}}{x(x' + \sin\alpha) + y'}$$

Рассмотрим K в замыкании области $\bar{\Omega}$, заданной системой неравенств 2 с нестрогим знаком и системой неравенств $x \geq 0, x' \geq 0, y' \geq 0$. Мы хотим доказать, что его супремум достигается во внутренней точке $\bar{\Omega}$, причем в этой точке все производные первого порядка должны обнуляться.

Во всех точках $\bar{\Omega}$ функционал K непрерывно дифференцируем, так как ни в одной точке его знаменатель не обращается в 0. Действительно, из неравенства $x\cos\alpha + x'\sin \geq y = 1$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ следует, что $x > 0$ и $x' > 0$. Супремум K не может достигаться на границе $y' = 0$ – при такой подстановке числитель K обращается в 0. Мы уже установили, что супремум не может достигаться ни на одной из границ, полученных из 2 – выбор точки (x, x', y, y') с такой границы соотвествует выбору прямоугольников, пересечение которых не является восьмиугольником. Таким образом, если супремум K в $\bar{\Omega}$ и достигается, то только во внутренней точке. Отметим, что в силу $L(\alpha, x, x', y, y') = L(\alpha, y, y', x, x')$ все значения K, встречающиеся при $x > y$, встречаются и при $x < y$. Определим пересечение $\bar{\Omega}$ с полупространством $x \leq y = 1$ как $\bar{\Omega}'$. Достаточно показать, что супремум K в $\bar{\Omega}'$ достигается, причем либо во внутренней точке, либо в точке на границе $x = y$. Из этого будет следовать, что супремум K в $\bar{\Omega}$ достигается во внутренней точке, причем в силу непрерывной диффферецируемости K все его первые производные действительно равны 0.

Наложим дополнительные условия $C \geq x'$, $C \geq y'$ с достаточно большим C. С этими ограничениями $\bar{\Omega}'$ становится компактом, и нам нем K гарантированно достигает максимума. Рассмотрим точку на одной из границ $C = x'$ или $C = y'$. Так как числитель K не превосходит $\frac{x}{\sin\alpha}$, что соотвествует мере пересечения полосы ширины 1 и полосы ширины x, располагающихся под углом α друг к другу, а знаменатель составляет хотя бы $\max\{xx', y'\}$, K можно оценить как $\min\{\frac{1}{x'\sin\alpha}, \frac{x}{y'\sin\alpha}\}$. Это является малой величиной и в случае $C = x'$, и в случае $C = y'$, поэтому в такой точке K не может достигать максимума. Вернемся к $\bar{\Omega}'$. В его подмножестве, где $x' > C$ или $y' > C$, функционал K ограничен заведомо малым числом, а его дополонение до $\bar{\Omega}'$ – компакт. Значит, максимум K на $\bar{\Omega}'$ действительно достигается, причем либо во внутренней точке, либо на границе $x = y$.

Рассмотрим производные K. Пусть (x_0, x_0', y_0') – точка глобального максимума. Из правила дифференцирования дробей тогда следует, что

$$\frac{(\frac{x_0'y_0'}{2\sin\alpha} + \frac{x_0y_0'}{2\cos\alpha} + \frac{x_0'}{2\cos\alpha} + \frac{x_0}{2\sin\alpha} - \frac{x_0^2+x_0'^2+1+y_0'^2}{2\sin 2\alpha})'_x}{(x_0(x_0'+\sin\alpha)+y_0')'_x} = \frac{(\frac{x_0'y_0'}{2\sin\alpha} + \frac{x_0y_0'}{2\cos\alpha} + \frac{x_0'}{2\cos\alpha} + \frac{x_0}{2\sin\alpha} - \frac{x_0^2+x_0'^2+1+y_0'^2}{2\sin 2\alpha})'_{x'}}{(x_0(x_0'+\sin\alpha)+y_0')'_{x'}} =$$

$$= \frac{(\frac{x_0'y_0'}{2\sin\alpha} + \frac{x_0y_0'}{2\cos\alpha} + \frac{x_0'}{2\cos\alpha} + \frac{x_0}{2\sin\alpha} - \frac{x_0^2+x_0'^2+1+y_0'^2}{2\sin 2\alpha})'_{y'}}{(x_0(x_0'+\sin\alpha)+y_0')'_{y'}}$$

и каждая из дробей равняется $K(\alpha, x_0, x_0', y_0')$. Преобразуем полученное уравнение

$$\frac{\frac{y_0'}{2\cos\alpha} + \frac{1}{2\sin\alpha} - \frac{x_0}{\sin 2\alpha}}{x_0' + \sin\alpha} = \frac{1}{x_0}\cdot\left(\frac{y_0'}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2\cos\alpha} - \frac{x_0'}{\sin 2\alpha}\right) = \frac{x_0'}{2\sin\alpha} + \frac{x_0}{2\cos\alpha} - \frac{y_0'}{\sin 2\alpha}$$

Выразим y_0' двумя способами: из равенства первой и второй дроби и из равенства второй и третьей.

$$y_0'(x_0\sin\alpha - x_0'\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = \sin^2\alpha - x_0'^2 + x_0^2 - x_0\cos\alpha$$

$$y_0'(\cos\alpha + x_0) = x_0 x_0' \cos\alpha + x_0^2 \sin\alpha - \sin\alpha + x_0'$$

Уже понятно, что y_0' можно выразить через x_0 и x_0' и тем самым сократить число неизвестных переменных до двух. Поделим выражения друг на друга чтобы найти зависимость x_0 и x_0' друг от друга

$$x_0^2 x_0' \sin\alpha\cos\alpha - x_0 x_0'^2 \cos^2\alpha - x_0 x_0' \cos^2\alpha \sin\alpha + x_0^3 \sin^2\alpha - x_0^2 x_0' \sin\alpha\cos\alpha - x_0^2 \sin^2\alpha\cos\alpha -$$
$$- x_0 \sin^2\alpha + x_0' \cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + x_0 x_0' \sin\alpha - x_0'^2 \cos\alpha - x_0' \sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= \sin^2\alpha\cos\alpha - x_0'^2\cos\alpha + x_0^2\cos\alpha - x_0\cos^2\alpha + x_0\sin^2\alpha - x_0 x_0'^2 + x_0^3 - x_0^2\cos\alpha$$

$$-x_0^2\sin^2\alpha\cos\alpha - x_0\sin^2\alpha + x_0 x_0'\sin^3\alpha = -x_0\cos^2\alpha + x_0\sin^2\alpha - x_0 x_0'^2\sin^2\alpha + x_0^3\cos^2\alpha$$

Разделим все на x_0:

$$-x_0\sin^2\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha + x_0'\sin^3\alpha = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - x_0'^2\sin^2\alpha + x_0^2\cos^2\alpha$$

$$x_0'^2\sin^2\alpha + x_0'\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha = x_0^2\cos^2\alpha + x_0\sin^2\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha$$

Поскольку в правой части находится возрастающая функция по x, а в левой – возрастающая по x', если существует хотя бы одно решение x_0' для данного x_0, то оно и единственное. Значение x_0' можно выразить как положительный корень квадратного уравнения

$$x_0' = \frac{-\sin^2(a) + \sqrt{8\sin^2 a - 4\cos^2 a + (2x_0\cos a + \sin^2 a)^2}}{2\sin\alpha}$$

Из рассуждений выше, для точки (x_0, x_0', y_0'), в которой достигается глобальный максимум, остальные две координаты определяются по x_0 однозначно: $y' = y'(x_0),\ x' = x'(x_0)$. Координата y зафиксирована и равна 1. Вернемся к функционалу L. Поделим все четыре координаты на x_0. В силу однородности, в такой точке тоже достигается минимум L. Так как $L(\alpha, x, x', y, y') = L(\alpha, y, y', x, x')$, в точке $y = 1$, $y' = \frac{x'(x_0)}{x_0}$, $x = \frac{1}{x_0}$, $x' = \frac{y'(x_0)}{x_0}$ также достигается глобальный минимум L (или глобальный максимум K). Поскольку при $y = 1$ по значению $x = \frac{1}{x_0}$ однозначно восстанавливаются координаты x' и y', мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x'(x_0)}{x_0} = y'\left(\frac{1}{x_0}\right) \\ \frac{y'(x_0)}{x_0} = x'\left(\frac{1}{x_0}\right) \end{cases}$$

Достаточно решить первое уравнение, поскольку второе получается из первого подстановкой $x_0 \to \frac{1}{x_0}$. Распишем его по определению функций y' и x'

$$\frac{-\sin^2(a) + \sqrt{8\sin^2 a - 4\cos^2 a + (2x_0\cos a + \sin^2 a)^2}}{2x_0\sin\alpha} = \frac{\frac{x'\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x_0}\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{x_0^2} - \sin\alpha + x'\left(\frac{1}{x_0}\right)}{\frac{1}{x_0} + \cos\alpha}$$

Домножим числитель и знаменатель правой части на x_0 и после приведем дроби к общему знаменателю

$$(1+x_0\cos\alpha)\left(-\sin^2(a)+\sqrt{8\sin^2 a-4\cos^2 a+(2x_0\cos a+\sin^2 a)^2}\right)=$$

$$=2x'\left(\frac{1}{x_0}\right)(x_0\cos\alpha+x_0^2)\sin\alpha+2\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha x_0^2$$

$$(1+x_0\cos\alpha)\left(-\sin^2(a)+\sqrt{8\sin^2 a-4\cos^2 a+(2x_0\cos a+\sin^2 a)^2}\right)-2\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha x_0^2=$$

$$=2\sin\alpha(x_0\cos\alpha+x_0^2)\frac{-\sin^2(a)+\sqrt{8\sin^2 a-4\cos^2 a+(2\frac{1}{x_0}\cos a+\sin^2 a)^2}}{2\sin\alpha}=$$

$$=(x_0\cos\alpha+x_0^2)(-\sin^2(a)+\sqrt{8\sin^2 a-4\cos^2 a+(2\frac{1}{x_0}\cos a+\sin^2 a)^2})$$

Воспользуемся компьютером, чтобы решить это уравнение относительно x_0 и убедиться в том, что для $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<x$ существует единственный корень $x=1$. При подстановке $x=1$ получается, что $x'=y'$, что соотвествует примеру, в котором $P_XA\times P_{X'}A$ симметричен $P_YA\times P_{Y'}A$. Пример строился следующим образом: проекции множества A на X и Y, а также на X' и Y' предполагались равными, фиксировался размер проекции на X, а дальше аналитически находился оптимальный размер проекции на X'. Поскольку этот процесс возвращает то же множество, что и рассуждение из теоремы, он действительно строит оптимальное множество A.

$\square$

Теорема 5.2. *При определенных ограничениях, минимум отношения* $\frac{|B|}{|A|}$ *достигается на выпуклом множестве.*

Доказательство. Покажем, что минимум отношения $\frac{|P_XA|\cdot(|P_{X'}A|+|P_YA|\cdot\sin\alpha)+|P_YA|\cdot|P_{Y'}A|}{|A|}$ достигается на выпуклом множестве. Поскольку это выражение является оценкой снизу на $\frac{|B|}{|A|}$, причем в случае выпуклого A оценка точна, мы получим требуемое.

Пусть A_0 – оптимальный компакт, и $C_0=\frac{|P_XA_0|\cdot(|P_{X'}A_0|+|P_YA_0|\cdot\sin\alpha)+|P_YA_0|\cdot|P_{Y'}A_0|}{|A_0|}$. Ясно, что можно считать, что $A_0=P_XA^0\times P_{X'}A_0\,\cap\,P_YA_0\times P_{Y'}A_0$. Рассмотрим прямоугольник со сторонами, параллельными X и X', длины $|P_XA_0|$ и $|P_{X'}A_0|$ соответственно, и прямоугольник со сторонами, параллельными Y и Y', длины $|P_YA_0|$ и $|P_{Y'}A_0|$ соответственно. Расположим их так, чтобы их центры совпали. Назовем их пересечение A_1. Аналогично определим C_1 для A_1.

Два прямоугольника, имеющие общий центр, имеют в пересечении центрально симметричный многоугольник, в котором не более чем восемь сторон. Тем самым, A_1 является либо четырехугольником, либо шестиугольником, либо восьмиугольником. Мы докажем утверждение теоремы для первых двух случаев. Условие того, что A_1 не является восьмиугольником, это и есть органичение, указанное в условии теоремы.

Случай 1. A_1 *имеет четыре стороны.*

Отметим, что для произвольного компакта A и любых $Z_1, Z_2 \in \{X,\ X',\ Y,\ Y'\}$ выполнено $A \subset P_{Z_1}^{-1}(P_{Z_1}A) \cap P_{Z_2}^{-1}(P_{Z_2}A)$. Также заметим, что $|P_{Z_1}^{-1}(P_{Z_1}A) \cap P_{Z_2}^{-1}(P_{Z_2}A)|$ зависит только от мер проекций, но не от самих проекций.

В силу центральной симметричности A_1, либо все его стороны лежат на сторонах одного прямоугольника, либо две пары противоположных сторон лежат на сторонах разных прямоугольников. В первом случае, A_1 совпадает с одним из двух прямоугольников пересечения, то есть $A_1 = P_{Z_1}^{-1}(P_{Z_1}A_1) \cap P_{Z_2}^{-1}(P_{Z_2}A_1)$ для $Z_1 = X,\ Z_2 = X'$ или $Z_1 = Y,\ Z_2 = Y'$. Во втором случае, A_1 является параллелограммом и $A_1 = P_{Z_1}^{-1}(P_{Z_1}A_1) \cap P_{Z_2}^{-1}(P_{Z_2}A_1)$ для Z_1 и Z_2 перпендикулярных сторонам параллелограмма. По построению A_1, для Z_1, Z_2 выполнено, что $|P_{Z_1}A_0| = |P_{Z_1}A_1|$ и $|P_{Z_2}A_0| = |P_{Z_2}A_1|$, а остальные проекции A_1 не превосходят по мере соотвествующие проекции A_0. Из замечания

$$|A_0| \leq |P_{Z_1}^{-1}(P_{Z_1}A_0) \cap P_{Z_2}^{-1}(P_{Z_2}A_0)| = |P_{Z_1}^{-1}(P_{Z_1}A_1) \cap P_{Z_2}^{-1}(P_{Z_2}A_1)| = |A_1|.$$

Используем неравенство $|A_1| \geq |A_0|$

$$C_0 = \frac{|P_XA_0| \cdot (|P_{X'}A_0| + |P_YA_0| \cdot \sin\alpha) + |P_YA_0| \cdot |P_{Y'}A_0|}{|A_0|} \geq$$
$$\geq \frac{|P_XA_0| \cdot (|P_{X'}A_0| + |P_YA_0| \cdot \sin\alpha) + |P_YA_0| \cdot |P_{Y'}A_0|}{|A_1|} \geq$$
$$\geq \frac{|P_XA_1| \cdot (|P_{X'}A_1| + |P_YA_1| \cdot \sin\alpha) + |P_YA_1| \cdot |P_{Y'}A_1|}{|A_1|} = C_1.$$

Поскольку мы подобрали выпуклый многоугольник, на котором значение целевого отношения оптимально, мы доказали, что в этом случае минимум достигается на выпуклом множестве.

Случай 2. A_1 *имеет шесть сторон.*

Если в пересечении двух прямоугольников с общим центром лежит шестиугольник, то четыре его стороны лежат на сторонах одного прямоугольника, а еще две – на сторонах другого. Значит, A_1 можно рассмотреть как фигуру, которая осталась после того, как от прямоугольника параллельными прямыми были отсечены два треугольника. Не умаляя общности, пусть прямоугольник $P_YA_1 \times P_{Y'}A_1$ отсекает два треугольника от прямоугольника $P_XA_1 \times P_{X'}A_1$ в направлении Y. Докажем, что мера шестиугольника A_1 составляет хотя бы меру пересечения $P_XA_0 \times P_{X'}A_0$ и $\mathbb{R} \times P_{Y'}A_0$. Поскольку компакт A_0 можно представить как пересечение $P_XA_0 \times P_{X'}A_0$ и $P_YA_0 \times P_{Y'}A_0$, из этого будет следовать неравенство $|A_1| \geq |A_0|$, откуда, аналогично рассуждению в предыдущем пункте, $C_0 \geq C_1$.

В рассуждении нам будет удобнее считать, что все P_ZA_0 для $Z \in \{X, X'\}$ являются конечными объединениями отрезков. Если результат будет доказан для такого частного случая, то для произвольного A_0 можно будет рассмотреть его приближение с таким свойством. Ясно, что можно построить сколь угодно точное приближение A_0' для A_0, а A_1', построенный по A_0, будет сколь угодно точно приближать A_1. Значит, неравенство $|A_1| \geq |A_0|$ можно получить предельным переходом.

Рассмотрим функцию $f_0(y) = |\mathbb{R} \times y \cap P_X A_0 \times P_{X'} A_0|$ для $y \in Y'$. В силу того, что $P_X A_0 \times P_{X'} A_0$ является конечным объединением прямоугольников, функция $f_0(y)$ непрерывна. Если фиксирована величина $|P_{Y'} A_0|$ и проекции $P_X A_0$ и $P_{X'} A_0$, то множество A_0 оптимально если $\{y \in supp(f_0) \mid f_0(y) > D_0\} \subset P_{Y'} A_0 \subset \{y \in supp(f_0) \mid f_0(y) \geq D_0\}$ для некоторой константы D_0. Рассмотрим также функцию $f_1(y) = |\mathbb{R} \times y \cap P_X A_1 \times P_{X'} A_1|$. По построению множества A_1 выполнено, что $P_{Y'} A_1 = \{y \in supp(f_1) \mid f_1(y) \geq D_1\}$ для некоторой константы D_1. Неравенство $|A_0| \leq |A_1|$ можно записать с помощью введенных функций как

$$\int_{P_{Y'} A_0} f_0(y) dy \leq \int_{P_{Y'} A_1} f_1(y) dy.$$

Лемма 5.1. *Для любой константы D выполнено, что*

$$\int_{\{y \in Y' \ \mid \ f_0(y) \geq D\}} f_0(y) dy \leq \int_{\{y \in Y' \ \mid \ f_1(y) \geq D\}} f_1(y) dy.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $\int_{\{y \in Y' \ \mid \ f_1(y) < D\}} f_1(y) dy \leq \int_{\{y \in Y' \ \mid \ f_0(y) < D\}} f_0(y) dy$, поскольку интегралы функций f_1 и f_0 равны.

Отметим, что $\max f_1(y) \geq \max f_0(y)$. Если значение D не достигается функцией f_0, то неравенство тривиально, поэтому предположим противное. В этом случае, значение D достигается и функцией f_1. Введем на Y' направление и координаты. Пусть $y_{1,0}$ и $y_{1,1}$ это координаты крайних точек, значение в которых функции f_1 равно D. Аналогично определим точки $y_{0,0}$ и $y_{0,1}$ для функции f_0. Ясно, что $\{y \in Y' \mid f_1(y) < D\} = \{y \in Y' \ | y < y_{1,0} \cup y > y_{1,1}\}$ и $\{y \in Y' \mid f_0(y) < D\} \supset \{y \in Y' \ | y < y_{0,0} \cup y > y_{0,1}\}$. Поэтому достаточно показать неравенство

$$\int_{\{y \in Y' \ | y < y_{1,0} \cup y > y_{1,1}\}} f_1(y) dy \leq \int_{\{y \in Y' \ | y < y_{0,0} \cup y > y_{0,1}\}} f_0(y) dy.$$

Вернемся к прямоугольнику $P_X A_1 \times P_{X'} A_1$. Рассмотрим две прямые, параллельные Y, мера пересечения которых с $P_X A_1 \times P_{X'} A_1$ равна D. Интеграл в левой части неравенства равен сумме площадей отсеченных прямоугольных треугольников и равен $D^2 \sin\alpha \cos\alpha$. Теперь рассмотрим $P_X A_0 \times P_{X'} A_0$ и две крайние прямые, параллельные Y, мера пересечения которых с $P_X A_0 \times P_{X'} A_0$ равна D. Интеграл в правой части равен сумме мер отсеченных ими компактов. Рассмотрим один из этих компактов. Удалим из него все точки, проекции которых на X и X' не лежат в проекциях соотвествующего сечения на X и X'. Само сечение является объединением отрезков. Компакт, получившийся после этой операции, можно представить как объединение по отрезкам прямоугольных треугольников со сторонами, равными проекции одного отрезка на X и X', и прямых сумм проекций на X и X' некоторых различных отрезков. Из вида конструкции ясно, что для любой пары различных отрезков ровно один из прямоугольников, полученный прямой суммой проекции одного отрезка на X и другого на X', лежит в компакте. Отсюда, мера исходного компакта составляет хотя бы меру прямоугольного треугольника с острым углом α и гипотенузой D, а значит интеграл в правой части составляет хотя бы $D^2 \sin\alpha \cos\alpha$, и неравенство доказано.

□

Отметим, что мера носителя f_0 составляет хотя бы меру носителя f_1: мера носителя f_1 равна сумме мер проекций $P_X A_1$ и $P_{X'} A_1$ на Y', а мера носителя f_0 равна хотя бы сумме мер проекций $P_X A_0$ и $P_{X'} A_0$ на Y'. Предположим, что мы хотим выбрать минимальное по мере подмножество носителя f_0 таким образом, чтобы интеграл по нему равнялся S. Определим функцию $g_0(S)$ как инфимум f_0 на этом подмножестве. Определим функцию $h_0(S)$ как меру этого подмножества, а $\Omega_0(S)$ – самим этим подмножеством. Аналогично определим функции g_1, h_1 и Ω_1. Ясно, что $\Omega_i(S)$ для $i \in \{0,1\}$ всегда имеет вид $\{y \in supp(f_i) \mid f_i(y) > E_i\} \subset \Omega_i(S) \subset \{y \in supp(f_i) \mid f_i(y) \geq E_i\}$ для некоторой константы E_i, поэтому g_i и h_i не зависят от выбора $\Omega_i(S)$, а любые два множества, подходящие на роль $\Omega_i(S)$, могут различаться разве что на множество точек, на котором f_i равняется E_i. Чтобы, однако, избежать неопределенности, потребуем, чтобы $\Omega_i(S) \cap \{y \in supp(f_i) \mid f_i(y) = E_i\}$ всегда являлось начальным подмножеством $\{y \in supp(f_i) \mid f_i(y) = E_i\}$. Это требование также гарантирует, что $\Omega_i(S') \subset \Omega_i(S)$ для всех $S' < S$. Отметим, что функции g_i и h_i непрерывны в силу непрерывности f_i.

Покажем, что $g_0(S) \leq g_1(S)$. Пусть нашлось значение S_0 такое, что $g_0(S_0) > g_1(S_0)$. В таком случае, $g_1(S_0)$ не может быть максимальным значением f_1. Тогда, в силу леммы, выполнено

$$S_0 = \int_{\{y \in Y' \mid f_1(y) \geq g_1(S_0)\}} f_1(y)dy \geq \int_{\{y \in Y' \mid f_0(y) \geq g_1(S_0)\}} f_0(y)dy > S_0,$$

последнее неравенство выполнено в силу непрерывности f_0.

Докажем, что $h_i'(S) = \frac{1}{g_i(S)}$. Действительно, $\frac{h_i(S+\varepsilon)-h_i(S)}{\varepsilon} = \frac{h_i(S+\varepsilon)-h_i(S)}{\int_{\Omega_i(S+\varepsilon)\setminus\Omega_i(S)} f_i(y)dy}$ и

$$\frac{h_i(S+\varepsilon)-h_i(S)}{g_i(S)(h_i(S+\varepsilon)-h_i(S))} \leq \frac{h_i(S+\varepsilon)-h_i(S)}{\int_{\Omega_i(S+\varepsilon)\setminus\Omega_i(S)} f_i(y)dy} \leq \frac{h_i(S+\varepsilon)-h_i(S)}{g_i(S+\varepsilon)(h_i(S+\varepsilon)-h_i(S))}.$$

В силу непрерывности g_i, предел при $\varepsilon \to 0$ существует, поэтому функция h_i действительно дифференцируема, а значение производной действительно равно $\frac{1}{g_i(S)}$. Поскольку $h_0(0) = h_1(0)$ и $h_0'(S) = \frac{1}{g_0(S)} \geq \frac{1}{g_1(S)} = h_1'(S)$, для всех S выполнено неравенство $h_0(S) \geq h_1(S)$.

Рассмотрим $|A_1| = \int_{P_{Y'}A_1} f_1(y)dy$ и $|A_0| = \int_{P_{Y'}A_0} f_0(y)dy$. По построению A_1, $\Omega_1(|A_1|) = P_{Y'}A_1$, поэтому $h_1(|A_1|) = |P_{Y'}A_1| = |P_{Y'}A_0| \geq h_0(|A_0|)$. В силу неравенства $h_0(S) \geq h_1(S)$, $h_1(|A_1|) \geq h_0(|A_0|) \geq h_1(|A_0|)$, а поскольку h_1 является монотонно возрастающей функцией, $|A_1| \geq |A_0|$, что и требовалось показать.

$\square$

6. Постановка задачи в $\mathbb{R}^n$

Дан компакт A единичной меры в $\mathbb{R}^n$ и линейно независимые прямые $X_1, \ldots, X_n$, проходящие через начало координат. Пусть $P_{X_i}A$ – ортогональная проекция A на прямую X_i. Необходимо установить нижнюю и верхнюю оценки на минимальную меру Лебега $B = A + \sum_{k=1}^{n} P_{X_k}A$ в зависимости от расположения прямых.

Лемма 6.1. *Пусть B – компакт в $\mathbb{R}^n$, а C – компакт, содержащийся на некоторой прямой X. Тогда*

$$|B + C| \geq |B| + |C| \cdot |P_{X^\perp}B|,$$

причем если B и C – выпуклые компакты, то в оценке достигается равенство.

Доказательство. Поскольку мера суммы по Минковскому не зависит от параллельного переноса слагаемых, будем считать что прямая X проходит через начало координат. Рассмотрим B как объединение сечений B прямыми параллельными X. При переходе от множества B к множеству $B+C$ мера каждого такого сечения увеличится хотя бы на $|C|$ и ровно на $|C|$, если B и C являются выпуклыми. Значит, разность между мерами $B+C$ и B составляет хотя бы $|C| \cdot |P_{X^\perp}B|$.

□

Теорема 6.1. *Пусть A – компакт единичной меры в $\mathbb{R}^n$, а $X_1, \ldots, X_m$ – набор линейно независимых прямых, проходящих через начало координат. Определим $B = A+\sum_{k=1}^{m} A_k$, где A_k – компактное множество на прямой X_k. Тогда*

$$|B| \geq \sum_{S \subset \{X_1,\ldots,X_m\}} |P_{Lin(S)^\perp}A| \cdot |\sum_{X_i \in S} A_k|,$$

Если A – выпуклый компакт, а все A_i – отрезки, то в оценке достигается равенство.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по размерности пространства и числу прямых – (n, m). На парах (n, m) порядок лексикографический. Базовый случай соответствует паре $(n, 0)$ и неравенству $|A| \geq |A|$.

Докажем индукционный переход. Обозначим размерность A как $l + 1$, а число прямых как $k + 1$, $k \geq 0,\ l \geq k$. В силу леммы 6.1,

$$|A + A_1 + \ldots + A_{k+1}| \geq |A + A_1 + \ldots + A_k| + |A_{k+1}| \cdot |P_{X_{k+1}^\perp}(A + A_1 + \ldots + A_k)|.$$

Первое слагаемое можно сразу заменить на $\sum_{S \subset \{X_1,\ldots,X_k\}} |P_{Lin(S)^\perp}A| \cdot |\sum_{X_i \in S} A_i|$ согласно индукционному предположению. Проекция прямой суммы совпадает с прямой суммой проекций, поэтому $P_{X_{k+1}^\perp}(A + A_1 + \ldots + A_k) = P_{X_{k+1}^\perp}A + P_{X_{k+1}^\perp}A_1 + \ldots + P_{X_{k+1}^\perp}A_k$. Заметим, что все слагаемые располагаются в одном линейном подпространстве размерности l, $P_{X_{k+1}^\perp}A$ – компакт размерности l, а все $P_{X_{k+1}^\perp}A_i$ – компакты, лежащие на k линейно независимых прямых. Поскольку индукционное предположение для пары (l, k) уже доказано, для второго неравенства тоже имеется оценка. Значит,

$$|A + A_1 + \ldots + A_{k+1}| \geq \sum_{S \subset \{X_1,\ldots,X_k\}} |P_{Lin(S)^\perp}A| \cdot |\sum_{X_i \in S} A_i| +$$

$$+|A_{k+1}| \sum_{S' \subset \{P_{X_{k+1}^\perp} X_1, \ldots, P_{X_{k+1}^\perp} X_k\}} |P_{Lin(S')_{k+1}^\perp} P_{X_{k+1}^\perp} A| \cdot |\sum_{P_{X_{k+1}^\perp} X_i \in S'} P_{X_{k+1}^\perp} A_i|,$$

где $Lin(S')_{k+1}^\perp$ – ортогональное дополнение в подпространстве $X_{k+1}^\perp$. Чтобы закончить доказательства перехода, осталось проверить что

$$|A_{k+1}| \sum_{S' \subset \{P_{X_{k+1}^\perp} X_1, \ldots, P_{X_{k+1}^\perp} X_k\}} |P_{Lin(S')_{k+1}^\perp} P_{X_{k+1}^\perp} A| \cdot |\sum_{P_{X_{k+1}^\perp} X_i \in S'} P_{X_{k+1}^\perp} A_i| =$$

$$= \sum_{S \subset \{X_1, \ldots, X_k\}} |P_{Lin(S, X_{k+1})^\perp} A| \cdot |A_{k+1} + \sum_{X_i \in S} A_i|.$$

Будем считать, что подмножество S' из левой части соотвествует подмножеству S, если S' получается из S проекцией входящих в него прямых на $X_{k+1}^\perp$. Докажем равенство каждого слагаемого в левой части и соответствующего ему слагаемого в правой:

$$|A_{k+1}| \cdot |P_{Lin(S')_{k+1}^\perp} P_{X_{k+1}^\perp} A| \cdot |\sum_{P_{X_{k+1}^\perp} X_i \in S'} P_{X_{k+1}^\perp} A_i| = |P_{Lin(S, X_{k+1})^\perp} A| \cdot |A_{k+1} + \sum_{X_i \in S} A_i|.$$

Отметим, что $P_{Lin(S')_{k+1}^\perp} P_{X_{k+1}^\perp} A = P_{Lin(S, X_{k+1})^\perp} A$ для соответствующих друг другу S и S'. Действительно, $P_{Lin(S')_{k+1}^\perp} P_{X_{k+1}^\perp} = P_{Lin(S')_{k+1}^\perp}$. Пространства $Lin(S')_{k+1}^\perp$ и $Lin(S, X_{k+1})^\perp$ совпадают так как оба состоят из всех векторов в $X_{k+1}^\perp$, перпендикулярных набору S. Поэтому уравнение выше равносильно

$$|A_{k+1}| \cdot |\sum_{P_{X_{k+1}^\perp} X_i \in S'} P_{X_{k+1}^\perp} A_i| = |A_{k+1} + \sum_{X_i \in S} A_i|.$$

Это утверждение можно переформулировать так: если в $\mathbb{R}^k$ есть k линейно независимых прямых и k компактов на них, то мера суммы по Минковскому этих компактов не изменится, если спроецировать $k-1$ их них на ортогональное дополнение оставшегося. Заметим, что сумма по Минковскому компактов на прямых зависит от мер этих компактов, но не зависит от их вида и расположения. Поэтому утверждение достаточно доказывать для отрезков исходящих из начала координат, которые, для удобства, можно ориентировать. Мера суммы по Минковскому n векторов равна по модулю его определителю. Назовем, как прежде, прямые как $X_1, \ldots, X_k$, а векторы – как $A_1, \ldots, A_k$. Выделим X_1 как прямую, на ортогональное дополнение которой мы будем проецировать все остальные векторы. Выберем ортонормированный базис, в котором первый вектор коллинеарен A_1, разложим все вектора $A_1, \ldots, A_k$ по этому базису и запишем их координаты в матрицу. Определитель этой матрицы не зависит от того, что написано в первой строчке в столбцах $2, \ldots, k$, поскольку в первом столбце заполнена лишь клетка на пересечении с первой строкой. Проецирование вектора на $X_1^\perp$ отвечает обнулению его первой координаты в этом базисе, значит после проекции определитель останется прежним, что и требовалось доказать.

$\square$

Следствие 6.1. Пусть A – компакт единичной меры в $\mathbb{R}^n$, а $X_1, \ldots, X_m$ – набор линейно независимых прямых, проходящих через начало координат. Определим $B = A + \sum_{k=1}^m P_{X_k} A$. Тогда

$$|B| \geq \sum_{S \subset \{X_1, \ldots, X_m\}} |P_{Lin(S)^\perp} A| \cdot |\sum_{X_i \in S} P_{X_i} A|,$$

Если A – выпуклое множество, то в неравенстве достигается равенство.

Доказательство. Применим предыдущую теорему с подстановкой $A_k = P_{X_k} A$ для всех k. Если компакт A выпуклый, то все его проекции на прямые являются отрезками, значит, по замечанию теоремы, для выпуклого A оценка действительно точна. □

Лемма 6.2. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – набор линейно независимых прямых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат. Отметим на каждой прямой компакты $B_1, \ldots, B_n$. Пусть $A = \cap_{k=1}^n \mathbb{R}^{n-1} \times B_k$. Тогда A является суммой по Минковскому*

$$A = \sum_{k=1}^n A_k,$$

где A_k – прообраз B_k при операции проекции $(\bar{X}_k)^\perp$ на прямую X_k. Прямая $(\bar{X}_k)^\perp$ определяется как ортогональное дополнение набора прямых $\{X_i\}_{i \neq k}$.

Мера компакта A составляет $\frac{\prod_{k=1}^n |B_k|}{|\det \{X_i\}_{i=1}^n|}$, где $\det S$ – определитель набора единичных векторов на прямых из S в линейном подпространстве $Lin(S)$.

Доказательство. Компакт A, по определению, это множество всех точек, проекция которых на прямую X_k лежит в B_k, $k = 1, \ldots, n$. Докажем, что любая точка из $\sum_{k=1}^n A_k$ обладает таким свойством, и что любая точка с таким свойством может быть представлена как сумма векторов из $A_1, \ldots, A_n$. Отсюда будет следовать совпадение A и $\sum_{k=1}^n A_k$.

Рассмотрим произвольную точку из суммы по Минковскому: $\sum_{k=1}^n a_k$, $a_k \in A_k$. Отметим, что ее проекция на X_k совпадает с проекцией a_k на X_k, так как $A_i \subset \bar{X}_i^\perp$ и $\bar{X}_i^\perp \perp X_k$ для всех $i \neq k$, а проекция a_k на X_k, по определению A_k, лежит в B_k.

Пусть теперь a – произвольная точка, проекции которой на все X_k лежат в B_k. Докажем, что $a = \sum_{k=1}^n a_k$, где a_k – прообраз проекции a на X_k при операции проекции $\bar{X}_k^\perp$ на X_k. Мы уже установили, что проекции a и $\sum_{k=1}^n a_k$ на все X_k совпадают. Если $a \neq \sum_{k=1}^n a_k$, то их разность является ненулевым вектором, ортогональным всем X_k, что невозможно так как $\mathbb{R}^n = Lin(X_1, \ldots, X_n)$.

Мы уже знаем, что меру суммы по Минковскому компактов на линейно независимых прямых можно выразить как модуль определителя векторов, коллинеарных прямым и по модулю равных мере соотвествующего компакта. Отсюда $|A| = |\det \{(\bar{X}_i)^\perp\}_{i=1}^n| \cdot \prod_{k=1}^n \frac{|B_k|}{|\cos(X_k, (\bar{X}_k)^\perp)|}$, поэтому осталось только доказать, что

$$\prod_{k=1}^n |\cos(X_k, (\bar{X}_k)^\perp)| = |\det \{(\bar{X}_i)^\perp\}_{i=1}^n| \cdot |\det \{X_i\}_{i=1}^n|$$

Выберем в $\mathbb{R}^n$ ортонормированную систему векторов так, чтобы первые k векторов образовывали линейное пространство $Lin(X_1, \ldots, X_k)$. В этом базисе матрица $\{X_i\}_{i=1}^n$ является верхнетреугольной. Рассмотрим вектор $(\bar{X}_k^\perp)$. Поскольку он перпендикулярен всем векторам $X_1, \ldots, X_{k-1}$, в этом базисе у него нулевые первые $k-1$ координаты, откуда матрица $\{(\bar{X}_i)^\perp\}_{i=1}^n$ является нижнетреугольной. При этом произведение его k-ой координаты и k-ой координаты X_k равно их скалярному произведению $\cos(X_k, (\bar{X}_k)^\perp)$, поскольку только k-ая координата не равняется нулю у каждого из векторов. Произведение определителей верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц равно произведению их элементов на диагоналях, которое по модулю равно $\prod_{k=1}^n |\cos(X_k, (\bar{X}_k)^\perp)|$.

□

Лемма 6.3. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – набор линейно независимых прямых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат, и A – компакт в $\mathbb{R}^n$. Выполнена оценка*

$$\frac{|\sum_{k=1}^n P_{X_k} A|}{|A|} \geq \overset{2}{\det} S.$$

Доказательство. Мы уже отмечали, что $|\sum_{k=1}^n P_{X_k} A| = \det S \cdot \prod_{k=1}^n |P_{X_k} A|$. Для произвольного компакта A справдливо включение $A \subset B = \cap_{k=1}^n \mathbb{R}^{n-1} \times P_{X_k} A$, поэтому $|A| \leq |B|$. Отсюда, достаточно будет показать неравенство

$$\frac{\prod_{k=1}^n |P_{X_k} A|}{|B|} \geq \det S.$$

Из леммы 6.2, $|B| = \frac{\prod_{k=1}^n |P_{X_k} A|}{\det S}$, поэтому неравенство действительно выполнено.

□

Следствие 6.2. В условиях следствия 6.1 имеется численная оценка на $|B|$

$$|B| \geq |A| \sum_{S \subset \{X_1, \ldots, X_m\}} \overset{2}{\det} S = \sum_{S \subset \{X_1, \ldots, X_m\}} \overset{2}{\det} S.$$

Доказательство. В силу следствия 6.1, достаточно показать, что

$$\frac{|P_{Lin(S)^\perp} A| \cdot |\sum_{X_i \in S} P_{X_i} A|}{|A|} \geq \overset{2}{\det} S$$

для всякого S. Так как $|A| \leq |P_{Lin(S)^\perp} A| \cdot |P_{Lin(S)} A|$, достаточно доказать оценку

$$\frac{|\sum_{X_i \in S} P_{X_i} A|}{|P_{Lin(S)} A|} \geq \overset{2}{\det} S.$$

Поскольку $P_{X_i} P_{Lin(S)} A = P_{X_i} A$ для $X_i \in S$, это неравенство можно получить применением леммы 6.3 к компакту $P_{Lin(S)} A$.

□

Теорема 6.2. *Мера оптимального множества A не превосходит $(\frac{2^n}{2^n - n - 1})^n \cdot \binom{2n}{n}$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно построить пример множества A, для которого $\frac{|B|}{|A|} \leq (\frac{2^n}{2^n-n-1})^n \cdot \binom{2n}{n}$. Рассмотрим $A = \sum_{k=1}^n A_k + A'_k$, где A_k – единичные отрезки на X_k, а A'_k – отрезки меры $\frac{2^n - n - 1}{|\cos(X_k, (\bar{X}_k)^\perp)|}$ на $(\bar{X}_k)^\perp$. Отметим, что B также является суммой по Минковскому отрезков на прямых X_k и $(\bar{X}_k)^\perp$. Назовем их B_k и B'_k соответственно.

Ясно, что B'_k имеет меру $\frac{2^n-n-1}{|\cos(X_k,(\bar{X}_k)^\perp)|}$, а B_k имеет меру $1+|P_{X_k}A|$. Поскольку A – сумма по Минковскому, а $P_{X_k}A$ – компакт на прямой, то

$$|P_{X_k}A| = \left|\sum_{i=1}^n P_{X_k}A_i + P_{X_k}A'_i\right| = \sum_{i=1}^n |P_{X_k}A_i| + |P_{X_k}A'_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^n |P_{X_k}A_i| + |P_{X_k}A'_k| = \sum_{i=1}^n |\cos(X_i, X_k)| + 2^n - n - 1.$$

Предпоследнее равенство выполнено, поскольку $(\bar{X}_i)^\perp \perp X_k$ для $i \neq k$. Ясно, что $|B_k| = 1+|P_{X_k}A| \leq 2^n$.

A и B – зонотопы, поэтому $|B| = \sum_{\substack{|S|=n,\\ S\subset\{B_i,B'_i\}_{i=1}^n}} |\mathrm{Det}\ S|, |A| = \sum_{\substack{|S|=n,\\ S\subset\{A_i,A'_i\}_{i=1}^n}} |\mathrm{Det}\ S|$, где Det – обычный определитель векторов.

Докажем, что $|B| \leq (\frac{2^n}{2^n-n-1})^n \cdot \binom{2n}{n}|A|$. Для этого достаточно доказать, что $|B| \leq (\frac{2^n}{2^n-n-1})^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot |\mathrm{Det}\ \{A'_j\}_{j=1}^n|$. Поскольку $|A'_j| = \frac{2^n-n-1}{|\cos(X_j,(\bar{X}_j)^\perp)|}$, то

$$\left(\frac{2^n}{2^n-n-1}\right)^n \cdot |\mathrm{Det}\ \{A'_j\}_{j=1}^n| = \frac{2^{n^2}}{\prod_{k=1}^n |\cos(X_k, (\bar{X}_k)^\perp)|} \cdot |\det\{(\bar{X}_j)^\perp\}_{j=1}^n|.$$

Если $S \subset \{B_i, B'_i\}_{i=1}^n$ состоит из l компактов на $\{X_i\}_{i=1}^n$ и $n-l$ на $\{(\bar{X}_i)^\perp\}_{i=1}^n$, то $|\mathrm{Det}\ S| = \frac{(2^n-n-1)^l\cdot 2^{(n-l)n}}{\prod_{B'_j\in S}|\cos(X_j,(\bar{X}_j)^\perp)|} \cdot |\det S|$. В обеих частях неравенства $|B| \leq \binom{2n}{n} \cdot (\frac{2^n}{2^n-n-1})^n \cdot |\mathrm{Det}\ \{A'_j\}_{j=1}^n|$ находится по $\binom{2n}{n}$ слагаемых, поэтому достаточно доказать, что для любого S

$$\frac{(2^n-n-1)^l \cdot 2^{(n-l)n}}{\prod_{B'_j\in S}|\cos(X_j, (\bar{X}_j)^\perp)|} \cdot |\det S| \leq \frac{2^{n^2}}{\prod_{k=1}^n |\cos(X_k, (\bar{X}_k)^\perp)|} \cdot |\det\{(\bar{X}_j)^\perp\}_{j=1}^n|.$$

Сократим правую часть на 2^{n^2}, а левую – на $(2^n-n-1)^l \cdot 2^{(n-l)n}$. Воспользуемся тождеством $\prod_{k=1}^n |\cos(X_k, (\bar{X}_k)^\perp)| = |\det\{(\bar{X}_i)^\perp\}_{i=1}^n| \cdot |\det\{X_i\}_{i=1}^n|$, чтобы преобразовать правую часть. Получим, что достаточно доказать неравенство

$$|\det S| \cdot |\det\{X_i\}_{i=1}^n| \leq \prod_{B'_j\in S} |\cos(X_j, (\bar{X}_j)^\perp)|.$$

Обозначим $\{(\bar{X}_j)^\perp\}_{B'_j\in S} = T$. Ясно, что $|\det S| = |\det T| \cdot |\mathrm{Det}\{P_{Lin(T)^\perp}X_i\}_{B_i\in S}| \leq |\det T|$, так как модули векторов во втором определителе не превосходят 1 как проекции единичных векторов. Аналогично, $|\det\{X_i\}_{i=1}^n| = |\det\{X_i\}_{(\bar{X}_i)^\perp\notin T}| \cdot |\mathrm{Det}\{P_{Lin(T)}X_j\}_{(\bar{X}_j)^\perp\in T}| = |\det\{X_i\}_{(\bar{X}_i)^\perp\notin T}| \cdot |\det\{P_{Lin(T)}X_j\}_{(\bar{X}_j)^\perp\in T}| \cdot \prod_{(\bar{X}_j)^\perp\in T} |\cos(X_j, Lin(T))|$, что не превосходит $|\det\{P_{Lin(T)}X_j\}_{(\bar{X}_j)^\perp\in T}| \cdot \prod_{(\bar{X}_j)^\perp\in T} |\cos(X_j, Lin(T))|$. Преобразуем неравенство, заменив определители в левой части на полученные оценки сверху

$$|\det T| \cdot |\det\{P_{Lin(T)}X_j\}_{(\bar{X}_j)^\perp\in T}| \cdot \prod_{(\bar{X}_j)^\perp\in T} |\cos(X_j, Lin(T))| \leq \prod_{B'_j\in S} |\cos(X_j, (\bar{X}_j)^\perp)|.$$

Отметим, что $P_{Lin(T)}X_j$ для $(\bar{X}_j)^\perp \in T$ перпендикулярна всем $(\bar{X}_k)^\perp \in T$, $k \neq j$. Это позволяет воспользоваться тождеством и заменить $|\det T| \cdot |\det \{P_{Lin(T)}X_j\}_{(\bar{X}_j)^\perp \in T}|$ на произведение косинусов

$$\prod_{(\bar{X}_j)^\perp \in T} |\cos(P_{Lin(T)}X_j, (\bar{X}_j)^\perp)| \cdot \prod_{(\bar{X}_j)^\perp \in T} |\cos(X_j, Lin(T))| \leq \prod_{B'_j \in S} |\cos(X_j, (\bar{X}_j)^\perp)|.$$

Поскольку $(\bar{X}_j)^\perp \in T$, проекцию X_j на $(\bar{X}_j)^\perp$ можно рассмотреть как композицию проекций X_j на $Lin(T)$ и $P_{Lin(T)}X_j$ на $(\bar{X}_j)^\perp$, поэтому правая часть равняется левой, и неравенство доказано.

$\square$

Список литературы

[1] A. Balog, G. Shakan. On the sum of dilations of a set. Acta Arithmetica, 164(2):153–162, 2014.

[2] B. Bukh. Sums of dilates. Combinatorics, Probability and Computing, 17(05):627– 639, June 2008.

[3] Yong-Gao Chen, Jin-Hui Fang. Sums of dilates in the real numbers. Acta Arithmetica, 182(3):231–241, 2018

[4] S. Konyagin and I. Laba. Distance sets of well-distributed planar sets for polygonal norms. Israel Journal of Mathematics, 152(1):157–179, December 2006.

[5] A. Mudgal. Sums of linear transformations in higher dimensions. The Quarterly Journal of Mathematics, 70(3):965–984, May 2019.

[6] Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. Геометрические неравенства. Ленинград, “Наука”, 1980.

[7] D. Krachun, F. Petrov. On the size of $A + \lambda A$ for algebraic λ. arXiv:2010.00119