

Отзыв научного руководителя о выпускной квалификационной работе  
Яна Азэровича Казымова  
“Тензорное произведение представлений матроида”

Пусть  $M_1, M_2$  — два линейных матроида на множестве  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ , представленных векторами  $x_1, \dots, x_n \in X$  и  $y_1, \dots, y_n \in Y$ , где  $X, Y$  — линейные пространства над одним и тем же полем  $\mathbb{F}$ . Можно рассмотреть матроид  $M_3$ , составленный из тензорных произведений  $x_i \otimes y_i$ .

Изучение комбинаторных свойств матроида  $M_3$  недавно позволило Б Ловицу и мне получить ряд новых результатов в теории тензорных рангов, в частности, усилить теорему Крускала — достаточное условие минимальности тензорного разложения. Но описанная выше конструкция апеллирует к конкретным представлениям матроидов  $M_1, M_2$ . Это обстоятельство ставит вопрос о комбинаторном описании тензорного произведения. Этим и занимался Ян.

Во-первых, оказалось, что матроид  $M_3$  вообще говоря зависит не только от матроидов  $M_1, M_2$ , но и от их представлений — Яном был построен соответствующий пример.

Это ставит вопрос о том, можно ли определить какое-то специальное, “максимальное”, или “минимальное” тензорное произведение. Один из возможных подходов к этому такой: заметим, что для любого множества  $A \subset E$  его ранг в матроиде  $M_3$  больше чем произведение рангов в матроидах  $M_1$  и  $M_2$ . В частности, если  $A$  независимо, то произведение рангов не меньше чем размер  $A$ . Это свойство чисто комбинаторное, и позволяет определить то, что в работе названо *псевдонезависимостью*: множество  $I \subset E$  псевдонезависимо, если для любого его подмножества произведение рангов в матроидах  $M_1, M_2$  не меньше размера. Семейство псевдонезависимых множеств не всегда образует матроид, соответствующий пример также был построен Яном.

Но имеется один интересный положительный результат: в случае, когда один из матроидов равномерный (независимы все множества размера не больше данного и только они), псевдонезависимость определяет матроид. Отмечу, что при том что работой в целом руководил я, и я ставил Яну вопросы, формулировку этой теоремы он нашёл самостоятельно.

В процессе работы над дипломной работой Ян освоил технику работы с матроидами и успешно применил её. Мне хотелось бы от работы большего (всегда хочется большего), тем не менее, считаю, что она и в имеющемся виде может быть оценена на “отлично”.

научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
профессор факультета математики и компьютерных наук  
Санкт-Петербургского государственного университета



Ф. В. Петров