Санкт-Петербургский государственный университет

КАЗЫМОВ Ян Азэрович

Выпускная квалификационная работа

Тензорное произведение представлений матроида

Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2019

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Петров Федор Владимирович

Рецензент:
к.ф.-м.н.
Калинин Никита Сергеевич

Санкт-Петербург
2023 год

Содержание

1 Основные определения

Напомним определение матроида.

Определение 1. Пусть M — конечное множество, система I его подмножеств называется *независимой*, если выполняются следующие аксиомы:
$(I1)$ $\emptyset \in I$;
$(I2)$ если $A \subset B$ и $B \in I$, то $A \in I$.
Система независимых множеств называется *матроидом*, если выполняется аксиома
$(I3)$ Для любого $M_1 \subset M$ все максимальные по включению независимые подмножества M_1 имеют поровну элементов.
Эквивалентная $(I3)$ аксиома:
$(I4)$ для любых независимых множеств A, B таких, что $|B| > |A|$ найдется элемент $x \in B \setminus A$ такой, что множество $A \cup x$ независимо.

Определение 2. *База* матроида — максимальное по включению независимое множество.

Матроид можно также определить при помощи баз.

Определение 3. Матроидом M называется пара $(E, \mathfrak{B})$, где E — конечное непустое множество, а $\mathfrak{B}$ (или $\mathfrak{B}(M)$) — непустое множество его поднмножеств (называемых базами), удовлетворяющее следующим двум аксиомам (аксиомы баз).
(B1) Никакая из баз не содержится в другой базе.
(B2) Если B_1 и B_2 — базы, то для любого элемента $b \in B_1$ существует такой элемент $c \in B_2$, что $(B_1 \setminus b) \cup c$ — также база.

Система независимых множеств определяется при таком подходе как система множеств, содержащихся хотя бы в одной базе.

Другой важной характеристикой матроида, которую также можно взять за альтернативное определение матроида, является *ранговая функция* $\mathrm{rank} : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Определение 4. Если M — матроид на E и $A \subset E$, то $\mathrm{rank}\, A$ определяется как размер максимального независимого подмножества в A.

Ключевым свойством рангвоой функции является следующая

Лемма 1. *Ранговая функция субмодулярна:* $\mathrm{rank}(A \cup B) + \mathrm{rank}(A \cap B) \leqslant \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ *для любых* $A, B \subset E$.

По ранговой функции определяются независимые множества как те, ранг которых равен их размеру. Можно доказать, что получается матроид тогда и только когда функция rank монотонна, субмодулярна и $0 \leqslant \mathrm{rank}(A) \leqslant |A|$ для всех $A \subset E$.

Важнейший пример матроидов — так называемые векторные, или линейные матроиды.

Определение 5. Пусть M — матроид с множеством элементов E, F^n - линейное пространство рамзерности n над полем F. Отображение $\varphi : E \longrightarrow F^n$ называется *представлением матроида M над полем F*, если оно удовлетворяет следующему условию: для любого подмножества $X = e_1, e_2, ..., e_k$ множества E система векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_k)$ линейно независима над полем F тогда и только тогда, когда X является независимым множеством матроида M.
Матроид, имеющий представление над полем, называют линейным или векторным.

2 Постановка задачи

Цель дипломной работы — исследовать разные подходы к понятию *тензорного произведения* матроидов.

Пусть F — поле. Рассмотрим матроид M_1 с множеством элементов E_1, который представим над полем F векторами $x_1, ..., x_n$ (не обязательно различными) и другой матроид M_2 с множеством элементов E_2, который представим над полем F векторами $y_1, ..., y_n$ (тоже не обязательно различными). Теперь рассмотрим матроид M_3, который представим векторами $x_i \otimes y_i$. Мы хотим понять, при каких условиях на поле F и число n матроид зависит только от M_1 и M_2, но не зависит от представлений.

3 Пример

Несложно построить примеры представлений M_1 и M_2 таких, что M_3 от них зависит (для этого можно рассматривать какие-то тождества на тензорах и немного их поменять). Вот один из примеров:

Пример 1. *Рассмотрим два матроида ранга 2 M_1 и M_2 с носителем из 4 элементов $E = \{1, 2, 3, 4\}$, базами которых являются все подмножества размера 2. Теперь рассмотрим такие два представления M_1 и M_2: M_1 представим векторами $x_1, x_2, x_1-x_2, x_1+x_2$ и M_2 представим векторами $y_1, y_2, y_1-y_2, y_1+y_2$ (x_1 и x_2 — независимые векторы, y_1 и y_2 тоже независимы). Видно, что в каждом из этих представлений любые два вектора линейно независимы. Посмтрим на соответствующие тензорные произведения: $(x_1 \otimes y_1), x_2 \otimes y_2, (x_1-x_2) \otimes (y_1-y_2), (x_1+x_2) \otimes (y_1+y_2)$. Заметим, что $(x_1 - x_2) \otimes (y_1 - y_2) + (x_1 + x_2) \otimes (y_1 + y_2) = 2(x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2)$, стало быть, эти 4 вектора линейно зависимы, а значит, в матроиде M_3 $\{1, 2, 3, 4\}$ — зависимое множество. Теперь рассмотрим другое представление матроида M_1: пусть $\varphi(1) = 2x_1 + x_2$, а остальные элементы носителя M_1 переходят в те же векторы, что и в первом представлении (видно, что любые два вектора тут также независимы). Второе представление матроида M_2 будет такое же, как первое. Рассмотрим соответствующие тензорные произведения: $x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2, (x_1 - x_2) \otimes (y_1 - y_2), (2x_1 + x_2) \otimes (y_1 + y_2)$.*
Несложно видеть, что эти 4 вектора линейено независимы, так что теперь в матроиде M_3 множество $\{1, 2, 3, 4\}$ — независимое. Значит, получили два неизоморфных матроида M_3.

Определение 6. *Максимальный* матроид для M_1 и M_2 — такой матроид, в котором множество A является независиимым тогда и только тогда, когда *существуют* представления $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_n$ матроидов M_1 и M_2 соответственно, причем множество A независимо в матроиде, предстваленном векторами $x_i \otimes y_i$.

Определение 7. *Минимальный* матроид для M_1 и M_2 - такой матроид, в котором множество A является независиимым тогда и только тогда, когда *для любых* представлений $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_n$ матроидов M_1 и M_2 соответственно, множество A независимо в матроиде, представленном векторами $x_i \otimes y_i$.

Гипотеза. *Максимальный матроид является матроидом.*

Лемма 2. *Если $x_1, ..., x_n$ — набор линейно независимых векторов в векторном пространстве V, и $y_1, ..., y_n$ — набор ненулевых векторов в пространстве U, то тензоры $x_1 \otimes y_1, ..., x_n \otimes y_n$ линейно независимы.*

Доказательство. Так как $x_1, ..., x_n$ линейно независимы, мы можем дополнить их до базиса в V (либо они уже образуют базис). Выберем базис в пространстве U. В качестве базиса в $V \otimes U$ рассмотрим тензорные произведения базисных векторов. Тогда векторы $x_1 \otimes y_1, ..., x_n \otimes y_n$ раскладываются по различным базисным элементам и ненулевые, а значит, они линейно независимы. $\square$

Утверждение. *Пусть M_1 и M_2 — наши матроиды на множестве E, M_3 — их какое-то тензорное произведение. Пусть rank_j обозначает ранговую функцию в матроиде M_j, $j = 1, 2, 3$. Пусть $A = \sqcup_{i=1}^{k} A_i$ — разбиение подмножества $A \subset E$ на непересекающиеся множества. Заметим, что $\operatorname{rank}_3(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}_3(A_i)$. Далее, из базовых свойств тензорного произведения имеем $\operatorname{rank}_3(E_i) \leq \operatorname{rank}_1(E_i) \operatorname{rank}_2(E_i)$. Тогда для любого $A \subseteq E$,*

$$\operatorname{rank}_3(A) \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}_1(A_i) \operatorname{rank}_2(A_i).$$

Определение 8. Определим функцию $\operatorname{rk}'(A) := \min(\sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}_1(A_i) \operatorname{rank}_2(A_i))$ по всем разбиениям $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ множества A.

Является ли эта функция ранговой функцией матроида? Если да, то таковой матроид естественно называть тензорным произведением матроидов M_1 и M_2. Как показано выше, для *любого* тензорного произведения M_3 имеем $\operatorname{rank}_3 \leqslant \operatorname{rk}'$.

Эта функция задает матроид (то есть является ранговой функцией).

Некоторые свойства ранга понятны:

1) $\operatorname{rk}'(A) \leq |A|$. Это так, потому что можно разбить A на единичные подмножества, и у такого разбиения сумма произведений рангов кусков будет не больше чем $|A|$.

2) Монотонность: если $A \subseteq B$, то $\operatorname{rk}'(A) \leq \operatorname{rk}'(B)$. Это ясно.

Субмодулярность не понятна.

Что означает независимость в матроиде с ранговой функцией rk'?

Определение 9. Будем называть $A \subset E$ *псевдонезависимым*, если для любого подмножества $A' \subseteq A$ верно, что $\operatorname{rank}_1(A') \operatorname{rank}_2(A') \geq |A'|$. Ранг относительно псевдонезависимости будем называть *псевдорангом.*

Лемма 3. *A независимо в матроиде с ранговой функцией rk' тогда и только когда A псевдонезависимо.*

Доказательство. 1) Если A не псевдонезависимо, то есть для какого-то $A' \subset A$ выполняется неравенство $\operatorname{rank}_1(A') \operatorname{rank}_2(A') < |A'|$, то, дополняя это A' одноточечными множествами до разбиения A, получим верхнюю оценку на ранг $\operatorname{rk}' A < |A|$. Таким образом, A не независимо в матроиде с рангоовой функцией rk'.

2) Если A псевдонезависимо, то есть для любого $A' \subset A$ выполняется неравенство $\operatorname{rank}_1(A') \operatorname{rank}_2(A') \geq |A'|$, то

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}_1(A_i) \operatorname{rank}_2(A_i) \geq \sum_{i=1}^{k} |A_i| = |A|$$

для любого разбиения $A = \sqcup A_i$. Переходя к минимуму по разбиениям, получаем, что $\mathrm{rk}'(A) = |A|$, значит, A независимо относительно rk'. $\square$

Следствие. Если rk' и псевдоранг задают матроиды, то эти матроиды совпадают.

Гипотеза. *Если E образует матроид относительно псевдонезависимости, то ранговая функция этого матроида равна* rk'.

Обозначим ранговую функцию относительно псевдонезависимости за $r(A)$. Пусть $A = \sqcup A_i$ — разбиение A, $B \subset A$ — максимальное псевдонезависимое подмножество, то есть $|B| = r(A)$. Тогда

$$\mathrm{rank}_1(A_i)\,\mathrm{rank}_2(A_i) \geq \mathrm{rank}_1(B \cap A_i)\,\mathrm{rank}_2(B \cap A_i) \geqslant |B \cap A_i|$$

в силу псевдонезависимости B. Складывая эти неравенства, получаем, что

$$\sum_i \mathrm{rank}_1(A_i)\,\mathrm{rank}_2(A_i) \geqslant |B| = r(A).$$

Переходя к минимуму, получаем, что $\mathrm{rk}'(A) \geqslant r(A)$.

Вообще говоря, может быть такое, что псевдонезависимость определяет матроид с ранговой функцией r, а rk' нет (то есть, возможно, бывает, что $rk' > r$).

Теперь вместо разбиений можно думать про псевдонезависимость.

4 Случай, когда один из матроидов равномерный

Теорема 1. *В случае, когда один из матроидов M_1, M_2 равномерный, псевдоранг является ранговой функцией.*

Доказательство. Предположим, что в матроиде M_1 база - любое подмножество размера k и что нашлись два псевдонезависимых множества A и B такие, что $|B| > |A|$ и для любого $b \in B \setminus A$ найдется $X_b \subseteq A$ такое, что $X_b \cup b$ не псевдонезависимо. То есть, $rk_1(X_b) rk_2(X_b) >= |X_b|$ (X_b псевдонезависимо как подмножество A), при этом $rk_1(X_b \cup b) rk_2(X_b \cup b) < |X_b \cup b| = |X_b| + 1 \Leftrightarrow rk_1(X_b \cup b) rk_2(X_b \cup b) \leq |X_b|$. Так как $rk_i(X_b) \leq rk_i(X_b \cup b)$ для $i = 1, 2$, то эти неравенства могут выполняться, только если $rk_i(X_b) = rk_i(X_b \cup b)$. Заметим, что если $rk_1(X_b) < k$, то $rk_1(X_b \cup b) = rk_1(X_b) + 1$, значит, $rk_1(X_b) = k$ и $rk_2(X_b) = \frac{|X_b|}{k}$. Пусть $a, b \in B \setminus A$. Рассмотрим множества X_b и X_a.
Покажем, что $rk_2(X_a \cap X_b) \geq \frac{|X_a \cap X_b|}{k}$. Действительно, $X_a \cap X_b$ псевдонезависимо, поэтому $|X_a \cap X_b| \leq rk_1(X_a \cap X_b) rk_2(X_a \cap X_b) = min(k, |X_a \cap X_b|) rk_2(X_a \cap X_b) \leq k rk_2(X_a \cap X_b)$, откуда и следует требуемое. Аналогично, из псевдонезависимости $X_a \cup X_b$ следует, что $rk_2(X_a \cup X_b) \geq \frac{|X_a \cup X_b|}{k}$.
Теперь премению субмодулярность для $rk_2 : rk_2(X_a) + rk_2(X_b) = \frac{|X_b|}{k} + \frac{|X_a|}{k} \geq$
$\geq rk_2(X_a \cup X_b) + rk_2(X_a \cap X_b) \geq \frac{|X_a \cap X_b|}{k} + \frac{|X_a \cup X_b|}{k} = \frac{|X_b|}{k} + \frac{|X_a|}{k}$. Эти неравенства верны только, когда обращаются в равенство, то есть $rk_2(X_a \cup X_b) = \frac{|X_a \cup X_b|}{k}$ и $rk_2(X_a \cap X_b) = \frac{|X_a \cap X_b|}{k}$. Заметим, что $rk_1(X_a \cup X_b) = k = rk_1(X_a \cup X_b \cup a)$ и $rk_2(X_a \cup X_b \cup a) = rk_2(X_a \cup X_b)$, так как $rk_2(X_a \cup a) = rk_2(X_a)$, аналогично, $rk_2(X_a \cup X_b \cup b) = rk_2(X_a \cup X_b)$.

Значит, $X = X_{b_1} \cup X_{b_2} \cup ... \cup X_{b_m}$, где $\{ b_1, b_2, ..., b_m \} = B \setminus A$, подходит в качестве X_b для любого $b \in B \setminus A$ (из индукциии по m очевидно следует, что $rk_2(X) = \frac{|X|}{k}$). Теперь рассмотрим множество $B' = (B \setminus A) \cup (X \cap B)$. Оно содержится в B, а потому псевдонезависимо, значит, $rk_2(B') \geq \frac{|B'|}{k}$. Заметим, что $|B'| = |B \setminus A| + |X \cap B| > |A \setminus B| + |X \cap B| = |X|$ (последнее неравенство верно, потому что $|B| > |A|$), то есть $rk_2(B') > \frac{|X|}{k}$. Но с другой стороны, каждый элемент из B' лежит в плоскости X, а потому $rk_2(B') \leq rk_2(X) = \frac{|X|}{k}$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Следствие. Максимальные по включению множества X_b для каждого $b \in B \setminus A$ попарно равны. Действительно, пусть для каких-то a, b максимальные по включению множества X_a и X_b не совпадают, но тогда из теоремы следует, что $X_a \cup X_b$ тоже подходит в качестве X_a и X_b, но $X_a \cup X_b$ строго больше X_a, противоречие.

5 Общий случай

Предложение 1. *В общем случае псевдоранг не всегда задает матроид.*

Доказательство. Предъявим контрпример. Положим, $n = 5$ (то есть $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$) и рассмотрим следующие матроиды M_1 и M_2:
Пусть M_1 представлен векторами $x_1, x_2, x_1, x_1 + x_2, x_1$, где x_1 и x_2 независимые векторы.
M_2 представим векторами $y_1, y_1, y_2, y_1, y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 также независимые векторы.
Покажем, что не выпоняется аксиома матроида $(I3)$ для множеств $A = \{ 1, 2, 3 \}$ и $B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$. $B \setminus A = \{ 4, 5 \}$. Несложно проверить, что A и B действительно псевдонезависимы. В качестве X_4 возьмем $\{ 1, 2 \}$, в качетсве X_5 возьмем $\{ 1, 3 \}$. Тогда $rk_1(X_4) rk_2(X_4) = |X_4| = 2$ и $rk_1(X_5) rk_2(X_5) = |X_5| = 2$.
При этом $rk_1(\{ 1, 2, 4 \}) rk_2(\{ 1, 2, 4 \}) = 2 < |\{ 1, 2, 4 \}|$ и $rk_1(\{ 1, 3, 5 \}) rk_2(\{ 1, 3, 5 \}) = 2 < |\{ 1, 3, 5 \}|$, а это противоречит псевдонезависимости. $\square$

Для тензоров есть следующая *лемма*:

Лемма 4. *Если $A_1, A_2 \subseteq E$ и не пересекаются и $rank_1(A_1 \cup A_2) = rank_1(A_1) + rank_2(A_1)$, и оба матроида M_1, M_2 не имеют петель, то это же равенство верно для rk_3.*

Доказательство. Доказывается аналогично *лемме 2.* $\square$

Оказывается, верна аналогичная лемма для псевдонезависимости:

Лемма 5. *В условиях* леммы 4*, предположим, что $B_1 \subseteq A_1$ и $B_2 \subseteq A_2$ псевдонезависимые множества и сужение матроида M_1 на $B_1 \cup B_2$ есть сумма своих сужений на B_1 и B_2, то $B_1 \cup B_2$ псевдонезависимо.*

Прежде, чем доказывать эту лемму, над понадобится следующее *утверждение*:

Утверждение. *Если $A_1, A_2 \subseteq E$ и не пересекаются и $rank_1(A_1 \cup A_2) = rank_1(A_1) + rank_2(A_1)$, $B_1 \subseteq A_1$ и $B_2 \subseteq A_2$, то тогда $rank_1(B_1 \cup B_2) = rank_1(B_1) + rank_1(B_2)$.*

Доказательство. Предположим, что $rank_1(B_1 \cup B_2) < rank_1(B_1) + rank_1(B_2)$. Рассмотрим любой элемент $a \in A_1 \setminus B_1$ и добавим его в B_1. Тогда, если a не увеличил ранга B_1, то тем более не увеличит ранг $B_1 \cup B_2$. Если же ранг B_1 увеличился на 1, то ранг $B_1 \cup B_2$ увеличился не более чем на 1, таким образом, дополняя B_1 и B_2 до A_1 и A_2, получим, что $rank_1(A_1 \cup A_2) < rank_1(A_1) + rank_2(A_1)$, противоречие. □

Доказательство леммы 5. Рассмотрим произвольное $B \subseteq B_1 \cup B_2$. Обозначим $X_1 = B \cap B_1$, $X_2 = B \cap B_2$. Тогда, $B = X_1 \cap X_2$. Нужно показать, что $rank_1(B) rank_2(B) \geq |B|$. Ни умаляя общности, пусть

$$max(rank_2(X_1), rank_2(X_2)) = rank_2(X_1).$$

В силу предыдущего *утверждения*,

$$rank_1(B) = rank_1(X_1) + rank_1(X_2) \Rightarrow rank_1(B) rank_2(B) = (rank_1(X_1) + rank_1(X_2)) rank_2(B) \geq$$

$$(rank_1(X_1) + rank_1(X_2)) max(rank_2(X_1), rank_2(X_2)) = rank_1(X_1) rank_2(X_1) + rank_1(X_2) rank_2(X_1)$$
$$\geq |X_1| + rank_2(X_1) rank_1(X_2) \geq |X_1| + rank_2(X_2) rank_1(X_2) \geq |X_1| + |X_2| = |B|,$$

что и требовалось (последние два неравенства верны в силу псевдонезависимости X_1 и X_2).

Это неравенство играет важную роль в лемме о связности из работы [2].

Список литературы

[1] Oxley J.G. Matroid Theory. Oxford University Press, 1992. — 542 p.

[2] B. Lovitz, F. Petrov. A generalization of Kruskal's theorem on tensor decomposition. *Forum of Math., Sigma* **11**, e27. Published online: 05 April 2023 (2023)