Санкт-Петербургский государственный университет

Мишура Пётр Степанович

Выпускная квалификационная работа

Невырожденные раскраски графов

Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2019

Научный руководитель:
доцент, Факультет математики
и компьютерных наук
Тискин Александр Владимирович

Рецензент:
Научный сотрудник,
Федеральное государственное
бюджетное учреждение
науки Санкт-Петербургское
отделение Математического
института им. В.А.Стеклова
Российской академии наук
Пастор Алексей Владимирович

Санкт-Петербург
2023 год

Содержание

1 Введение

1.1 История вопроса

Пусть G – простой граф степени $d \geq 3$, т.е. максимальная степень его вершины $\Delta(G) = d$. Потребуем еще, чтобы G не содержал K_{d+1} – полный подграф (клику) на $d+1$ вершине. Правильные раскраски G в k цветов, это отображения $\rho\colon V(G) \to \{1, ..., k\}$ такие, что $\rho(u) \neq \rho(v)$, при $\{u, v\} \in E(G)$. Сокращенно будем называть их правильные k-раскраски. Хроматическое число $\chi(G)$ – минимальное k такое, что существует правильная раскраска G. В данной работе мы будем преимущественно изучать d-раскраски.

Известная теорема Брукса утверждает, что хотя бы одна правильная d-раскраска G существует, иначе говоря $\chi(G) \leq d$. При этом существует множество обобщений этого результата, одним из которых является вообще-то и эта работа. Одно из направлений усилений состоит в уменьшении числа цветов. Статья [1], которая еще будет упомянута, доказывает, что если G не содержит также и K_d, то $\chi(G) \leq d - 1$, для достаточно больших $d \geq 10^{14}$. Конкретно $\omega(G)$ – размер наибольшей клики G и в общем клики большого размера играют важную роль в правильных раскрасках графа, так как являются самыми «трудноракрашиваемыми» множествами. Например, в [5] этот же автор показал: "существует $\varepsilon > 0$, что $\chi(G) \leq (1-\varepsilon)(\Delta(G)+1) + \varepsilon\omega(G)$" и другие похожие вариации. Гипотеза Хайоша и вовсе утверждает, что в некотором смысле, только это и является определяющим фактором: "Если $\chi(G) = q$, то G содержит подразбиение K_q в качестве подграфа", что на момент написания этого текста доказано для $\chi(G) = 4$ (см. [4] стр 136). Подразбиение графа – замена нескольких ребер на непересекающихся простые пути.

Мы же более подробно остановимся на другой «ветке» результатов: количество цветов остается неизменно d, но на раскраску накладываются дополнительные условия. Наиболее интересным для нас будет исследовать окрестности вершин, а более конкретно, чтобы цвета в них были распределены примерно поровну. Попробуем считать количества цветов в представленных в $N(V)$ по $v \in V(G)$. Это является в некотором смысле самым сильно-усложняющим условием к правильности раскраски: последовательно вершину раскрасить тем проще, чем меньше цветов в ее окрестности уже есть.

Для начала в [6] вводится понятие *динамической* раскраски – такой, что в окрестности любой невисячей вершины представлено не менее двух цветов. Показано, что при $d \geq 8$, динамическая раскраска связного G существует тогда и только тогда, когда G не является подразбиением K_{d+1}. Эта идея развивается на гиперграфы, см. [7]. Наконец, в [3] вводится ключевое для этой работы понятие *невырожденной* раскраски. Раскраска называется (c, p)-невырожденной если в окрестности любой вершины степени хотя бы p представлено хотя бы c разных цветов. Доказано, что если $p \geq (c^3 + 8c^2 + 19c + 6)(c+1)$, то G имеет (c, p)-невырожденную d-раскраску. При $p \sim d$ этот результат дает $d^{\frac{1}{4}}(1 - o(1))$ цветов в окрестности вершины.

Отметим исследование и, в некотором смысле, двойственного условия. В работе [2] исследуется существование «умеренной» (ориг. *frugal*) раскраски, правда уже в $d+1$ и более цветов. β-умеренная раскраска не может содержать один цвет в окрестности вершины более чем в β экземплярах. Доказано, что существует правильная β-умеренная раскраска в $d+1$ цвет для $\beta = \log^8(d)$, при $d \geq e^{10^7}$, и ряд оценок на количество на требуемых цветов при разных β.

1.2 Постановка задачи

Перейдем к основным определениям и понятиям этой работы. $N(v)$ – окрестность вершины $v \in V(G)$, а степень v обозначим более сокращенно $d_v = \deg(v) = |N(v)|$. Пусть $X \subset V(G)$ произвольное множество вершин и ρ – правильная d-раскраска. Рассмотрим величину, зависящую от раскраски $m_X(\rho)$ – количество разных цветов представленных в X, а $m_X \in \mathbb{R}$ некоторая нижняя граница для $m_X(\rho)$ которую раскраска должна стараться выполнить. Обозначим для $v \in V(G)$: $m_v(\rho) = m_{N(v)}(\rho)$ и $m_v = m_{N(v)}$. Рассмотрим произвольный набор чисел $\{m_v\}_{v \in V(G)}$.

Определение. Правильная раскраска ρ называется m_v*-невырожденной*, если $m_v(\rho) \geq m_v$ для всех $v \in V(G)$.

Теорема 1. *G – простой граф степени d не содержащий K_{d+1}, а d – достаточно велико. Пусть $m_v = \frac{d_v}{18} - 10\sqrt{d_v \ln d}$ для каждой вершины v. Тогда существует m_v-невырожденная d-раскраска графа G.*

Замечание. Результат [3] в этих терминах для больших d дает m_v-невырожденную раскраску с $m_v \sim d^{\frac{1}{4}}$. Текущий же дает $m_v \sim cd$, $0 < c \leq 1$, то есть линейную оценку, что является асимптотически неулучшаемым результатом. Естественно, можно пытаться добиться большей константы c чем $\frac{1}{18}$. В графах с $\omega(G) < d - 2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d}$ она достигает e^{-2}, но простой пример показывает что больше чем $\frac{1}{2}$ получить не удастся.

2 Доказательство основного результата

Наше доказательство теоремы 1 будет состоять из трех частей. В первой мы покажем как получить из графа степени d граф специального вида и оценим как при этом преобразуется m_v. Во второй мы опишем, как устроена интересующая нас случайная раскраска графа и оценим вероятность невыполнения некоторых событий. В третьей мы пользуясь этим покажем, почему граф преобразованного вида имеет соответствующую раскраску, которая даст нам $m_v = \frac{d_v}{18} - 10\sqrt{d_v \ln d}$.

2.1 Перестройка графа

2.1.1 Общие понятия и мотивация

На данном этапе у нас есть изначальный граф G степени d не содержащий K_{d+1}.

Определение. Назовем простой граф $\tilde{G}$ *перестроенным* из G, если он может быть получен из G дорисовкой ребер и стягиванием нескольких непересекающихся пар несмежных вершин (кратные ребра при этом заменяются на одно).

Определение. Если при этом $\tilde{G}$ будет удовлетворять трем требованиям:

1. Каждая вершина из $V(\tilde{G})$ может быть отнесена к одному из трех типов:

Тип 1. Вершины степени не более d.

Тип 2. Вершины степени не больше $d + 4356$, имеющие в своей окрестности хотя бы $\frac{d^2}{66}$ антиребер.

Тип 3. Вершины степени не более $\frac{12}{11}d+4356$, имеющие хотя бы $\frac{10}{11}d$ соседей степени не более $d-1$.

2. Никакая максимальная по включению клика H из d-вершин размера хотя бы $d - 2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d}$ не может иметь соседа с хотя бы $\frac{10}{11}d$ ребрами в H.

3. Если максимальная по включению клика H размера $d+1-k \geq d+1-66$, имеет хотя бы $k+1$ вершину в $N(H)$ степени хотя бы $\frac{d}{66}$ в H, то существует $k+1$ вершин в $N(H)$ степени не менее $\frac{d}{66}$ в H таких, что эти вершины образуют K_{k+1}.

Такой $\tilde{G}$ будет называться *правильно* перестроенным.

Понятно, как из правильной раскраски $\tilde{\rho}$ перестроенного графа получить правильную раскраску ρ исходного: каждая вершина в $V(G)$ получит цвет своего образа из $V(\tilde{G})$. В некотором смысле, перестройка графа накладывает лишь дополнительные условия на правильную раскраску: дорисованное ребро запрещает двум вершинам G иметь один цвет, а стягивание, наоборот, обязывает к этому. При этом следить за условием на невырожденность становится чуть сложнее. Обозначим образ $v \in V(G)$ при перестройке за $\tilde{v} \in V(\tilde{G})$. Каждая $\tilde{v} \in V(\tilde{G})$ имеет при этом один – v или два – v_1, v_2 прообраза, в зависимости от того, получилась ли она в результате стягивания. Заметим, что образ окрестности (любого) её прообраза есть подмножество $N(\tilde{v})$ – при дорисовках ребер и стягиваниях, окрестность вершины лишь растет. Получается, что в $N(\tilde{v})$ есть одно или два подмножества «старых» окрестностей $\tilde{v}$, разнообразие цветов в которых нас и интересует.

Определение. Обозначим эти подмножества $\tilde{N}_1(\tilde{v}), \tilde{N}_2(\tilde{v}) \subset N_{\tilde{G}}(\tilde{v})$. Для определенности у каждой вершины таких множеств будет два: если $\tilde{v}$ не результат стягивания, то считаем $\tilde{N}_1(\tilde{v}) = \tilde{N}_2(\tilde{v})$.

Замечание. $|\tilde{N}_i(\tilde{v})| \leq \deg(v_i) = |N(v_i)| \leq 2|\tilde{N}_i(\tilde{v})|$, так как каждая вершина $\tilde{u}$ из $\tilde{N}_i(\tilde{v})$ посчитается в $N(v_i)$ одной или двумя вершинами (если $\tilde{u}$ – результат стягивания, и оба прообраза u_1, u_2 лежат в $N(v_i)$). Пусть $\lambda(x)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – любая положительная возрастающая функция. Таким образом, если мы находим раскраску $\tilde{\rho}$ графа $\tilde{G}$, где $m_{\tilde{N}_i(\tilde{v})}(\tilde{\rho}) \geq \frac{|\tilde{N}_i(\tilde{v})|}{c} - \lambda\left(|\tilde{N}_i(\tilde{v})|\right)$, то $m_{N(v_i)}(\rho) = m_{v_i}(\rho) \geq \frac{\deg(v_i)}{2c} - \lambda(\deg(v_i))$.

2.1.2 Конструирование правильной перестройки

Цель этого раздела – доказать, что любой граф степени d не содержащий K_{d+1} может быть правильно перестроен. В свою очередь с правильно перестроенным графом уже можно работать вероятностными методами, в нем исключены общие «узкие» места для всех правильных раскрасок. Нам необходимо избавиться от некоторых конструкций связанных с кликами, при этом не сделав степень вершин слишком большой. Дадим несколько определений и рассуждений объясняющих структуру графа с этой точки зрения.

Определение. Назовем клики размера хотя бы $d - 2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d}$ *большими*. Напомним, что больше d их размер быть не может. Пусть $k_{\max} = 2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d}$.

Замечание. Для таких вершин из больших клик m_v-невырожденность выполнена автоматически, ведь в окрестности каждой такой вершины есть клика размера $d-k_{\max}-1 > \frac{d}{9}$ и любая правильная раскраска даст столько разных цветов. В частности, если все вершины G входят в такие клики, любая правильная d-раскраска нам подходит, и для такого графа доказательство может закончиться применением теоремы Брукса.

Утверждение. Для больших клик пересекаться – отношение эквивалентности.

Доказательство. Проверим транзитивность. Пусть большие клики A, B пересекаются и B, C пересекаются. Тогда вершина в пересечении A и B имеет степень не менее $|A \cup B| - 1 \leq d$, значит $|A \cap B| \geq d - 2k_{\max} - 1$, аналогично $|B \cap C| \geq d - 2k_{\max} - 1$. Оба множества $|A \cap B|$, $|B \cap C|$ находятся внутри B, размер которого не больше d. Следовательно $|A \cap B \cap C| = |A \cap B| \cap |B \cap C| \geq d - 4k_{\max} - 2 > 0$, следовательно $A \cap C \neq \emptyset$. □

Определение. Назовем носитель в $V(G)$ класса эквивалентности таких клик *бассейном.*

Утверждение. Размер бассейна не превосходит $d + 8 \cdot 10^8 \ln d$.

Доказательство. Выделим в нем наименьшую по размеру большую клику H, пусть её размер $d - k$ ($k \leq k_{\max}$). Рассмотрим остальные вершины бассейна, точнее следующий двудольный подграф исходного графа G: оставим ребра между H и другими вершинами бассейна. Заметим, что вершины H имеют в нем степень не больше k. Действительно, иначе объединение двух соответствующих больших клик хотя бы $d - k + k + 1 = d + 1$ и при этом есть третья клика, которая пересечется с данными и даст хотя бы еще одну вершину, что невозможно. Степень вершины не из H при этом хотя бы $d - 2k$, т.к. минимум таково пересечение любой большой клики ее содержащей с H. Значит вторая (отличная от H) доля нашего графа не превосходит $(d-k)\frac{k}{d-2k}$. Итого размер бассейна $d - k + \frac{d-k}{d-2k}k = d + \frac{k^2}{d-2k} \leq d + \frac{k_{\max}^2}{d-2k_{\max}}$. Заметим, что $d + \frac{k_{\max}^2}{d-2k_{\max}} \leq d + \frac{2k_{\max}^2}{d} = d + 8 \cdot 10^8 \ln d$. □

Таким образом все вершины, состоящие в больших кликах, разбиваются единственным образом на их объединения – бассейны. Для нас удобно различать бассейны двух видов: клики и нетривиальные объединения клик. В первом случае это клики размера $d + 1 - k$, где $1 \leq k \leq 2 \cdot 10^4 \sqrt{d \ln d}$. Из каждой вершины такой клики наружу идет k ребер – в другие бассейны или вершины не из больших клики. Во втором случае бассейн имеет размер не сильно больше d: максимум $d + 8 \cdot 10^8 \ln d$, то есть и не сильно больше размера любой из образующих его клик. Однако, что важно, внутри такого бассейна существует антиребро, так как он по определению не является кликой. Теперь мы готовы доказать основное утверждение этой секции:

Теорема 2. *Из любого графа G, содержащего K_{d+1}, где $\Delta(G) = d$, можно получить правильно перестроенный граф $\tilde{G}$.*

Доказательство. Выполним перечисленные ниже действия в интересующих нас бассейнах.

1) Рассмотрим бассейн H не являющийся кликой. Найдем в нем антиребро ab и стянем его. Заметим, что окрестности вершин a и b пересекаются минимум по клике размера $d - 2k_{\max} - 1$. Вершины a и b становятся вершинами типа 3, а общие соседи в H вершины после стягивания будут иметь степень $d - 1$. Любая вершина H начинает иметь хотя бы $d - 2k_{\max} - 1$ соседей степени не выше $d - 1$ и максимум $4k_{\max} + 2$ каких-то других. Сделаем так в каждом бассейне, не являющемся кликой.

Теперь рассмотрим бассейн H являющийся кликой размера $d + 1 - k$.

2) Если некоторая вершина $v \notin H$ имеет в H более $\frac{10}{11}d$ соседей, стянем ее с несоседней ей вершиной H. Тем самым $\frac{10}{11}d$ вершин стали степени меньше d.

3) Пусть $k \le 66$ и H имеет хотя бы столько соседей степени не менее $\frac{d}{66}$ в себя. Возьмем наибольшие по этой степени $k+1$ из них и проведем между ними все непроведенные ребра.

Полученный граф и возьмем в качестве $\tilde{G}$. Проверим что он удовлетворяет нашим требованиям.

Заметим, что все пары вершин которые мы решили стянуть не пересекаются. Действительно: выполняется максимум одно стягивание для каждого бассейна, причем оба участника имеют в этом бассейне по $\frac{10}{11}d$ соседей. Если одна вершина поучаствовала в двух стягиваниях для разных бассейнов, то у нее есть по $\frac{10}{11}d$ соседей в двух разных бассейнах, а значит ее степень была хотя бы $\frac{20}{11}d$.

Заметим что действие 3 не могло выполняться для вершины бассейна т.к. из неё вне её бассейна идет максимум $2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d} < \frac{d}{66}$ ребер наружу.

Таким образом одна вершина в результате стягиваний могла получить не более $\frac{1}{11}d$ новых соседей и при этом имеет хотя бы $\frac{10}{11}d$ соседей степени меньше d.

Каждая вершина могла приобрести максимум $66 \cdot 66 = 4356$ новых ребер в результате дорисовок, т.к. каждое из них дает максимум 66 ребер и это действие выполняется максимум 66 раз для одной вершины.

В стягивании всегда участвует не более одной вершины не из бассейна. Каждая вершина участвующая в стягивании таким образом приобретает не более 4356 ребер от одного из концов и ее степень тем самым не более $\frac{12}{11}d + 4356$, и она становится вершиной типа 3.

Пусть теперь некоторая вершина v не участвовавшая в стягиваниях, но в дорисовках ребер получила степень больше d. Значит до этого ее степень была не менее $d - 4355$. В некотором бассейне H она имела αd вершин ($\frac{1}{48} \le \alpha \le \frac{7}{8}$) и не менее $(1-\alpha)d - 4355$ вне H, откуда из H вело максимум $\alpha d \cdot (2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d})$ ребер из $\alpha d((1-\alpha)d - 4355)$ возможных. Получаем не менее $\alpha d((1-\alpha)d - 4355) - \alpha d \cdot (2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d}) > \frac{d^2}{66}$ антиребер в окрестности v, тем самым она – вершина типа 2.

Заметим, что в результате наших действий не появилось ни одной новой большой клики из d вершин. Действительно: ни одна из измененных вершин не может в них участвовать. Стянутая вершина имеет максимум $\frac{2}{11}d + 4356$ соседей степени хотя бы d. Вершина участвовавшая лишь в дорисовках имеет хотя бы $\frac{d^2}{66}$ антиребер в своей окрестности, а если бы входила в большую клику имела бы не более $d \cdot (2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d} + 4356)$.

Все ранее существовавшие большие клики входили в соответствующие бассейны и условия на правильность $\tilde{G}$ в них уже были выполнены. $\square$

2.2 Случайная раскраска

2.2.1 Определение случайной раскраски

Будем случайным образом раскрашивать правильно перестроенный граф G ($\tilde{G}$ из прошлого раздела) в d цветов. Напомним, что нас интересует получить правильную раскраску, в которой в $\tilde{N}_1(v), \tilde{N}_2(v)$ будет побольше цветов. На данном этапе $\tilde{N}_1(v), \tilde{N}_2(v)$ можно считать произвольными подмножествами $N(v)$ размера не более d.

Определение. *Замыкание* $\overline{G}$ графа G получается присоединением к каждой вершине v степени меньше d такого числа листов, чтобы ее степень стала ровно d. Сами эти листы назовем *фиктивными* вершинами и $\overline{N}(v) = N_{\overline{G}}(v)$ *замыканием* окрестности v.

Случайная раскраска ρ будет графа $\overline{G}$ устроена следующим образом: каждой вершине из $V(\overline{G})$ присваивается независимо равновероятно цвет из $\{1, ..., d\}$. Затем для каждого монохроматического ребра отменим покраску его концов и оставим вершины нераскрашенными. Эта раскраска индуцирует и случайную раскраску G, допуская вольность обозначений её тоже называем ρ.

Замечание. Как следует из сказанного выше, ρ не является раскраской по определению. Некоторые вершины она не красит вообще, что позволяет докрасить их детерминировано. ρ является частичной раскраской или *предраскраской*, именно в таком ключе мы и будем с ней дальше работать. Но стоит отметить, что ρ можно считать и раскраской в классическом смысле: она все таки назначает цвет каждой вершине и мы лишь «считаем» не раскрашенными те вершины, которые нарушают её правильность. В дальнейшем эта двойственность определения (правильная предраскраска или полная неправильная раскраска) не будет вызывать путаницы, будет понятно из контекста что имеется в виду.

Замечание. Трюк с фиктивными вершинами позволяет нам ограничить сверху вероятность окраски вершины малой степени. Количество представленных цветов продолжает считаться в настоящей окрестности вершины.

2.2.2 Общие рассуждения

Симметричная версия локальной леммы Ловаса говорит нам, что если в некотором наборе событий каждое не зависит от совокупности всех остальных, кроме некоторых n, выполняется с вероятностью не более p и $ep(d+1) \leq 1$, то с положительной вероятностью ни одно из них не произойдет.

Мы применим одну "большую" локальную лемму куда включим некоторый набор событий, совокупное невыполнение которых гарантирует искомую невырожденность раскраски и возможность докраски до правильной. Каждое из них будет затрагивать только 3-окрестность некоторой вершины, к которой мы привяжем это событие, и для каждой вершины их будет не более 10. Вершины у которых пересекаются 3-окрестности с данной, это вершины на расстоянии не более шести ребер. Степень каждой вершины меньше $2d$, так что таковых менее $2^6 d^6$ Так что каждое событие будет зависеть максимум $640d^6$ других. Вероятность каждого будет не более $\frac{15 \ln d}{d^7}$, что позволит нам применить локальную лемму Ловаса и утверждать, что существует случайная раскраска которая их все избегает.

Утверждение. Вероятность того, что конкретная вершина v будет покрашена равняется $(1 - \frac{1}{d})^{d_v}$. В случае $d_v = d$ равняется $(1 - \frac{1}{d})^d \in \left[\frac{1}{e} - \frac{1}{d}, \frac{1}{e} + \frac{1}{d}\right]$. В случае $d_v = d_{\max} = \frac{12}{11}d + 4356$: $(1 - \frac{1}{d})^{\frac{12}{11}d + 4356} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right]$ для достаточно больших d.

Пусть $T(\rho)\colon \{1, ..., d\}^{V(H)} \to \mathbb{R}$ – некоторая функция от раскраски графа H, где $H = G$ или $H = \overline{G}$. Тогда с ней ассоциирована случайная величина T зависящая от случайной раскраски и равная $T(\rho)$ для каждого элементарного исхода – раскраски.

Расположим вершины графа в некотором порядке и будем красить уже по очереди независимо каждую вершину. Тогда величины $X_i = \mathbb{E}(T|$ покрашены i вершин$)$ образуют мартингал. Для таких величин мы будем использовать неравенство Ацумы в следующем виде:

Утверждение. Если $\{X_i\}$ – мартингал и $|X_{i+1} - X_i| \leq c_i$, тогда $\Pr[X_n \leq X_0 - \lambda] \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}}$ и аналогично $\Pr[X_n \geq X_0 + \lambda] \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}}$.

Замечание. $\max|X_{i+1} - X_i| = \max|\mathbb{E}(T|$ покрашены i вершин$) - \mathbb{E}(T|$ покрашены $i+1$ вершин$)| \leq \max\limits_{j,k} \max|\mathbb{E}(T|$ покрашены i вершин и $(i+1)$-ая имеет цвет $j) - \mathbb{E}(T|$ покрашены i вершин и $(i+1)$-ая имеет цвет $k)|$, так как X_i является средним арифметическим X_{i+1} по всем вариантам раскраски $i+1$ вершины. Правую часть этого неравенства мы и будем далее оценивать сверху.

2.2.3 Вычисления вероятностей некоторых событий

Рассмотрим несколько событий, вероятность невыполнения которых не превышает $\frac{1}{d^7}$ и докажем это описанным выше способом. В следующих трех случаях случайные величины будут считать количество чего-нибудь в $N(v)$ и зависеть эта случайная величина будет только от покраски вершин 2-окрестности в v в $\overline{G}$.

А. Количество разных цветов в $\tilde{N}_i(v)$ не меньше $\frac{|\tilde{N}_i(v)|}{9} - 10\sqrt{d_v \ln d}$.

Рассмотрим следующую случайную величину T_1: количество окрашенных вершин в $\tilde{N}_i(v)$ таких, что их цвета больше нет в $N(v)$ (соответственно и в $\overline{N}(u)$). Пусть $n_i = |\tilde{N}_i(v)|$.

Утверждение. $\mathbb{E}(T_1) \geq \frac{n_i}{9}$.

Доказательство. Каждая вершина $u \in \tilde{N}_i(v)$ подходит нам, если цвет в который она покрашена не встречается в $N(u) \cup N(v)$ больше ни разу. Вероятность этого не менее $(1 - \frac{1}{d})^{d_u + d_v} \geq \frac{1}{9}$. □

B. Если $d_v \geq d$ и $N(v)$ имеет E антиребер, то количество цветов повторяющихся дважды в $N(v)$ не менее $\frac{E}{27d} - 10\sqrt{d_v \ln d}$

Пусть $T_2(\rho)$ – количество пар одноцветных вершин в $N(v)$ таких, что этот цвет в $N(v)$ более не представлен.

Утверждение. $\mathbb{E}(T_2) \geq \frac{E}{27d}$.

Доказательство. Каждое антиребро ab имеет шанс образовать такую пару со следующей вероятностью: во-первых, должны совпасть цвета его концов с вероятностью $\frac{1}{d}$. Во-вторых, в $\overline{N}(a), \overline{N}(b), N(v)$ этот цвет больше встретиться не должен. Вероятность последнего не меньше $(1 - \frac{1}{d})^{d_a + d_b + d_v} \geq \frac{1}{27}$. Итого, $\mathbb{E}(T_2) \geq \frac{E}{27d}$. □

C. Если $d_v \geq d$, то количество неокрашенных вершин в $N(v)$ не меньше $\frac{1}{4}d_v - 10\sqrt{d_v \ln d}$.

Пусть $T_3(\rho)$ – количество цветов k, таких что в $N(v)$ есть вершина u этого цвета, имеющая соседа тоже цвета k.

Утверждение. $\mathbb{E}(T_3) \geq \frac{d}{4}$

Доказательство. Будем красить вершины $\overline{G}$ по очереди, причем $N(v)$ в начале. Чтобы цвет k посчитался в T_3 ему достаточно появиться в $N(v)$, впервые в вершине u и после этого появиться еще раз в $\overline{N}(u)$. Вероятность первого не менее $1-(1-\frac{1}{d})^d \geq \frac{1}{2}$. Вероятность второго в момент появления u также не менее $1-(1-\frac{1}{d})^d \geq \frac{1}{2}$. Таким образом, вероятность одного цвета посчитаться в T_3 не менее $\frac{1}{4}$, а общее матожидание $\mathbb{E}(T_3) \geq \frac{d}{4}$. □

Замечание. Если цвет k таков, что в $N(v)$ есть вершина u цвета k, имеющая соседа тоже цвета k, то вершина u будет неокрашена в предраскраске. Таким образом количество неокрашенных вершин в окрестности v всегда не менее T_3 и как мы сейчас выясним, меньше $\frac{d_v}{4} - 10\sqrt{d_v \ln d}$ с вероятностью не более d^{-7}.

Теперь оценим отклонение сразу трех этих величин вниз от матожидания. Подобный подсчет для величины T_2 происходит в [1].

Утверждение. $l \in \{1,2,3\}$: $\Pr[T_l < \mathbb{E}(T_l) - 10\sqrt{d_v \ln d}] \leq d^{-7}$

Доказательство. Обозначим за $M = \tilde{N}_i(v)$ в случае $l = 1$, иначе $M = N(v)$. Во всех случаях мы считаем количество некоторых вершин или цветов в $M \subset N(v)$ (которое хоть может и зависеть от покраски других вершин).

Оценим $\Pr[T_l < \mathbb{E}(T_l) - \lambda]$. Будем считать, что мы красим вершины $\overline{G}$ по очереди, причем M в самом конце: $i \leq s \Leftrightarrow v_i \notin M$. Случайные величины $\mathbb{E}(T_l|$ покрашены i вершин) образуют мартингал. Оценим c_i из неравенства Ацумы. Пусть i-ая вершина v_i имеет d_i соседей в M и $i \leq s$. Заметим, что изменив цвет данной вершины v_i с j на k мы меняем T_l максимум на 1 по каждому из цветов j и k. Получаем $c_i \leq \max\limits_{j,k} |\mathbb{E}(T_l|$ покрашены $i-1$ вершин и i-ая имеет цвет $j) - \mathbb{E}(T_l|$ покрашены $i-1$ вершин и i-ая имеет цвет $k)| \leq 2\Pr[$среди d_i вершин есть цвет $j] \leq \min(\frac{2d_i}{d}, 2)$. Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{s} d_i \leq \frac{11}{10} d|M| \leq \frac{11}{10} dd_v$ и $c_i \leq 2$, то $2\sum\limits_{i=1}^{s} c_i^2 \leq 4\sum\limits_{i=1}^{s} c_i \leq 4\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{2d_i}{d} \leq 8,8d_v$. Оставшаяся сумма $\sum\limits_{i \geq s} c_i^2$ оценивается сверху $\sum\limits_{i \geq s} 4 = 4|M| \leq 4d_v$, а вся сумма $\sum c_i^2$ таким образом меньше $13d_v$. Искомая вероятность оценивается $e^{-\frac{\lambda^2}{13d_v}}$, что должно быть не больше d^{-7}. Получаем $\frac{\lambda^2}{13d_v} \geq 7\ln d \Rightarrow \lambda \geq \sqrt{91 d_v \ln d}$, то есть $\lambda = 10\sqrt{d_v \ln d}$ нам подходит. □

Итого, про события A, B, C доказали оценку на вероятность их невыполнения. Рассмотрим еще три полезных для нас.

D. Среди $14\ln d$ вершин найдется одна неокрашенная.

Замечание. В условии этого события нет требований на расположение этих $14\ln d$ вершин. Однако применяться это событие будет к вершинам лежащим в 2-окрестности некоторой $v \in V(G)$, тем самым всё событие лежит в 3-окрестности v.

Заметим, что $e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} > \frac{1}{5}$. Рассмотрим некоторые $k < 100\ln d$ вершин $v_1, ..., v_k$.

Утверждение. Вероятность окраски всех этих k вершин не превосходит $e^{-\frac{k}{2}}$.

Доказательство. Будем выдавать цвет вершинам $\overline{G}$ последовательно, поместив наши вершины $v_1, ..., v_k$ в конец, остальные вершины назовем *обычными*. Будем считать, что любая v_i не окрасится только в случае конфликта с обычными вершинами, что не увеличивает количество неокрашенных вершин. Таким образом после окраски обычных вершин, окраски необычных вершин становятся независимыми. Пусть $X_i(\rho)$ - количество цветов не представленных в обычных соседях v_i, X_i – соответствующая случайная величина. Отметим также, что $\mathbb{E}(X_i) \le d(1-\frac{1}{d})^{d-100\ln d} \le \frac{d}{2{,}5}$.

Теперь оценим вероятность $\Pr[X_i > \mathbb{E}(X_i)+\lambda]$ с помощью неравенства Ацумы. При последовательной раскраске вершин, считая матожидание количества непредставленных цветов получаем мартингал $Y_j = \mathbb{E}(X_i | \text{в } \overline{N}(v_i) \text{ покрашены } j \text{ вершин})$. Заметим, что на каждом шаге количество непредставленных цветов не изменяется, либо уменьшается на 1. Следовательно, $|Y_j - Y_{j-1}| \le 1$. Обозначим $d_i = d_{v_i} \ge d$, по неравенству Ацумы имеем:

$$\Pr[Y_{d_i} > Y_0 + \lambda d_i] \le \Pr[X_i > \mathbb{E}(X_i) + \lambda d] \le e^{-\frac{\lambda^2 d}{2}}$$

Всего таких событий k, значит суммарная их вероятность не больше $ke^{-\frac{\lambda^2 d}{2}}$. В случае же когда все $X_i \le (\frac{2}{5}+\lambda)d$, вероятность окраски всех v_i не превосходит $(\frac{2}{5}+\lambda)^k$, так как среди простых соседей v_i представлено цветов не больше чем среди всех. Итого, искомая вероятность не превосходит

$$ke^{-\frac{\lambda^2 d}{2}} + \left(\frac{1}{e}+\lambda\right)^k$$

Поставим $\lambda = \frac{1}{10}$ и получим вероятность:

$$ke^{-\frac{d}{200}} + \left(\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)^k \le 100\ln d \cdot e^{-\frac{d}{200}} + \left(\frac{1}{2}\right)^k < e^{-\frac{k}{2}}$$

Последнее неравенство выполнено при достаточно больших d, т.к. $\frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{2}$ и $k \le 100\ln d$. $\square$

Мы доказали, что для любого множества $k < 100\ln d$ вершин, вероятность их полной окраски не больше $e^{-\frac{k}{2}}$ и это событие зависит лишь от 1-окрестности множества этих вершин. Остается заметить, что $e^{-\frac{k}{2}} \le d^{-7}$ при $k \ge 14\ln d$.

E. Есть b непересекающихся пар вершин. Пусть $28\ln d \le b \le 50\ln d$. Тогда из них будет полностью неокрашено.

Доказательство. Рассмотрим наши $k = 2b$ вершин $v_1, ..., v_{2b}$ и мартингалы как в предыдущем пункте. Тогда с вероятностью не более $2be^{-\frac{d}{200}}$, хоть одна из вершин имеет более $\frac{d}{2}$ доступных цветов для себя. Таким образом, каждая пара вершин v_{2i-1}, v_{2i} имеет шанс не более $\frac{3}{4}$ не быть полностью неокрашенной. Вероятность того, что это произойдет во всех b случаях таким образом не превосходит $\left(\frac{3}{4}\right)^b$. Общая вероятность оценивается сверху:

$$2be^{-\frac{d}{200}} + \left(\frac{3}{4}\right)^b < e^{-\frac{b}{4}}$$

Здесь пользуемся $\frac{3}{4} < e^{-\frac{1}{4}}$ и тем, что $b \le 50\ln d$, а d достаточно велико. Поскольку $b \ge 28\ln d$, правая часть меньше d^{-7}, что и требовалось доказать. $\square$

Определение. *Антипаросочетание* – паросочетание из антиребер.

F. Если в окрестности вершины v есть антипаросочетание размера $10^4\sqrt{d\ln d}$, то в ней останется незакрашенное антипаросочетание размера более $1350\sqrt{d\ln d}$.

Доказательство. Пусть в $N(v)$ есть антипаросочетание размера β. Рассмотрим соответствующие пары вершин: $v_1v_2, ..., v_{2\beta-1}v_{2\beta}$, остальные вершины – обычные.

Будем красить наши вершины последовательно, расположив паросочетание в конце, причем считать вершину паросочетания незакрашенной только в случае конфликта с вершиной не из паросочетания. Таким образом раскраска вершин паросочетания после раскраски остальных вершин становится независимой. Пусть X_i - количество цветов не представленных в обычных соседях v_i. $\mathbb{E}(X_i) \leq d(1-\frac{1}{d})^{d-2\beta} \leq \frac{d}{2}$. А если это количество не превышает $e^{-\frac{1}{2}}d$, то вероятность отсутствия конфликта в v_i не превышает $e^{-\frac{1}{2}}$.

Утверждение. $\Pr[X_i > \mathbb{E}(X_i) + \lambda d] \leq e^{-\frac{\lambda^2 d}{2}}$

Доказательство. При последовательной раскраске $\overline{N}(v_i) \cup \{v_i\}$, где v_i красится последней, будем считать матожидание количества отсутствующих цветов в $\overline{N}(v_i)$. Эта последовательность образует мартингал $\{Y_j\}$. Заметим, что на каждом шаге количество непредставленных цветов не изменяется, либо уменьшается на 1. Следовательно, $|Y_j - Y_{j-1}| \leq 1$. По неравенству Ацумы, имеем:

$$\Pr[Y_d > Y_0 + \lambda d] \leq e^{-\frac{\lambda^2 d}{2}}$$

Что и требовалось доказать. □

Всего таких событий 2β, значит суммарная их вероятность не больше $2\beta e^{-\frac{\lambda^2 d}{2}}$. Выберем $\lambda = \frac{1}{10}$, тогда вероятность того, что в замыкании некоторой вершины отсутствует более $(\frac{1}{2}+\frac{1}{10})d < e^{-\frac{1}{2}}d$ цветов не более $e^{-\frac{d}{200}}$ и суммарная вероятность по всем вершинам не превосходит $2\beta e^{-\frac{d}{200}}$.

Пусть X – случайная величина, равная количеству полностью неокрашенных пар антипаросочетания. Вероятность, что антиребро будет неокрашено, не меньше $(1 - e^{-\frac{1}{2}})^2 \geq e^{-2}$ и такие события для разных антиребер независимы. Получаем $\mathbb{E}(X) \geq \frac{\beta}{e^2}$ и по оценке Чернова:

$$\Pr\left[X \leq (1-\delta)\frac{\beta}{e^2}\right] \leq e^{-\frac{\delta^2 \beta}{2e^2}}$$

Выберем $\delta = \frac{1}{10^3}$ и как мы помним $\beta \geq 10^4\sqrt{d\ln d}$. Числовое неравенство $1350 < \frac{10^4}{e^2}(1-\frac{1}{10^3})$ дает нам:

$$\Pr\left[X \leq 1350\sqrt{d\ln d}\right] \leq \Pr\left[X \leq \left(1-\frac{1}{10^3}\right)\frac{10^4}{e^2}\sqrt{d\ln d}\right]$$

И в свою очередь:

$$\Pr\left[X \leq \left(1-\frac{1}{10^3}\right)\frac{10^4}{e^2}\sqrt{d\ln d}\right] \leq e^{-\frac{10^4\sqrt{d\ln d}}{2e^2\cdot 10^6}} < e^{-e^{-8}\sqrt{d\ln d}}$$

Итого, общая вероятность неудачного события не превосходит:

$$2 \cdot 10^4 \sqrt{d \ln d} \cdot e^{-\frac{d}{200}} + e^{-e^8 \sqrt{d \ln d}} < \frac{1}{d^7}$$

Что нам и требовалось.

$\square$

2.3 Детерминированная докраска

2.3.1 Достижение невырожденности

Потребуем выполнения вышеописанных событий правильным образом и убедимся, что в этом случае случайная предраскраска ρ гарантирует невырожденность и продолжается до полной правильной раскраски правильно перестроенного графа G.

Применим к каждой вершине событие A два раза для $\tilde{N}_1(v)$ и $\tilde{N}_2(v)$. Таким образом, в $\tilde{N}_i(v)$ уже в предраскраске окажется представлено не менее $\frac{|\tilde{N}_i(v)|}{9} - 10\sqrt{d_v \ln d}$. Следовательно, согласно замечанию в конце **2.1.1**, получаем $m_v \geq \frac{d_v}{18} - 10\sqrt{d_v \ln d}$ для всех v в прообразе правильной перестройки G, то есть невырожденность раскраски уже достигнута.

2.3.2 Хорошие вершины

Нам осталось гарантировать возможность продолжения частичной раскраски до полной правильной раскраски графа G, так как количество цветов в окрестности каждой вершины не уменьшается при докраске новых вершин. Расположим вершины G в некотором порядке в очередь и после случайной раскраски будем докрашивать согласно этому порядку. Определим упорядоченное множество вершин которые будем называть *хорошими*, для данного набора гарантируемых событий.

Общее правило назначения хороших вершин такое. Мы будем заполнять ими очередь с конца, причем для любой хорошей вершины v, случайной предраскраски удовлетворяющей перечисленным событиям и любой докраски предшествующих v в очереди вершин, гарантированно должен существовать свободный цвет для v, который мы ей и назначим в этой поочередной докраске. Будем перечислять их в порядке пометки хорошими, соответственно – обратном очереди.

• Сначала пометим хорошими вершины степени менее d, для них свободный цвет безусловно будет существовать.

• Хорошими будут вершины типа 2. Они имеют в своей окрестности не менее $E = \frac{d^2}{66}$ антиребер. Событие B гарантирует им хотя бы $\frac{E}{27d} - 10\sqrt{d_v \ln d} \geq \frac{d}{2000}$ повторившихся цветов в окрестности, а следовательно не менее чем $\frac{d}{2000} - 4356 > 0$ свободных цветов.

• Все вершины v типа 3. Событие C гарантирует им хотя бы $\frac{d}{4} - 10\sqrt{d_v \ln d}$ неокрашенных уже хороших соседей (вершин степени $\leq d-1$). Все они стоят в очереди уже после v, то есть v имеет менее $\frac{12}{11}d + 4356 - \frac{d}{4} + 10\sqrt{d_v \ln d} < d$ покрашенных соседей на момент очереди своей покраски.

Замечание. На этом моменте все вершины степени $\neq d$ уже являются хорошими.

• Вершины, имеющие более $270d\sqrt{d \ln d}$ антиребер. Событие B гарантирует им хотя бы один повторяющийся в окрестности цвет, а значит хотя бы один свободный.

Определение. Эти вершины назовем *разреженными*. Соответственно, оставшиеся – *плотными*.

• Если вершина v в какой-то момент становится соседней хотя бы с $14 \ln d$ хорошими, помечаем её хорошей. Событие D гарантирует, что один из её хороших соседей не будет окрашен, то есть если поместить v в текущую позицию очереди, то она будет иметь хотя бы одну неокрашенную вершину после себя в очереди и таким образом максимум $d - 1$ цвет в окрестности, а значит может быть докрашена.

• Пусть некоторая клика H имеет хотя бы $28 \ln d$ непересекающихся ребер наружу из неё в хорошие вершины и хотя бы одну еще не хорошую вершину v. Тогда событие гарантирует E, что одно из таких ребер будет полностью неокрашено. Событие E лежит в 3-окрестности v и считаем, что применено к ней. Поместим все вершины в текущее место очереди (некоторые вершины уже могут быть помещены на более поздние места). Благодаря событию E имеем неокрашенную вершину u внутри H которая имеет неокрашенного соседа после себя в очереди. Докрасим вновь добавленные в очередь вершины $V(H) \setminus \{u\}$, что возможно пока u бесцветна и они имеют степень d. В конце для u существует свободный цвет либо потому что она была хорошей ранее, либо она имеет степень d и неокрашенного соседа позднее в очереди.

Заметим, что на здесь на одно место очереди помещается набор вершин все из которых теперь хорошие.

2.3.3 Плохие вершины

Определение. Вершины не помеченные таким способом назовем *плохими*. Их докраска не будет проходить в очереди хороших вершин, а перед ними.

Замечание. Все плохие вершины имеют степень ровно d, плотны, соседствуют менее чем с $14 \ln d$ хорошими и не входят в клику с $28 \ln d$ ребрами в хорошие вершины.

Утверждение. В окрестности клики из плохих вершин менее $392 \ln^2 d$ хороших вершин.

Доказательство. В противном случае начнем строить паросочетание по одной вершине, за каждый ход хорошая окрестность уменьшается не более чем на $14 \ln d$, а всего ходов должно быть менее $28 \ln d$. После этого в окрестности клики не останется хороших вершин и насчитали мы таким образом менее $392 \ln^2 d$ вершин. □

Теперь будем смотреть на плохие вершины нашего графа. После случайной предраскраски они разобьются на неокрашенные компоненты связности. Мы хотим убедиться, что каждая из них может быть окрашена правильно и дополнительными гарантированными событиями *исключим возникновение недокрашиваемой компоненты.*

Индуцированный подграф на неокрашенных плохих вершинах графа G устроен следующим образом. У каждой его вершины есть список из запрещенных цветов (из окрашенных соседей в G) и интересующий нас список из остальных разрешенных цветов. Заметим, что каждый список не меньше чем степень вершины.

Определение. *Лес Галлаи* - граф, в котором каждый блок является кликой или нечётным циклом.

Определение. Граф называется *списочно d-раскрашиваемым*, если он может быть правильно списочно раскрашен для любого набора списков таких, что размер каждого списка равен степени его вершины.

Нам потребуется теорема Бородина о списочной d-раскрашиваемости (см. например [4] стр. 161):

"Граф G является списочно d-раскрашиваемым, если он имеет блок, отличный от полного графа и нечетного цикла. Причем в противном случае этот граф является лесом Галлаи и набор списков обязательно устроен следующим образом. В этом наборе каждому блоку B, вершины которого имеют степень d_B (в блоке B) соответствуют d_B цветов. Множества цветов соответствующие соседним блокам не пересекаются. Каждая вершина получает список — множество всех цветов, соответствующих блокам, в которых она лежит."

В нашем случае список будет состоять из всех цветов доступных после случайной раскраски. Если H имеет структуру отличную от описанной в теореме Бородина, то может быть докрашен правильным образом.

Определение. Описанный случай-исключение из теоремы будем называть *условием Бородина.*

Замечание. Если такая компонента соединена с неокрашенной хорошей вершиной, то эта компонента является докрашиваемой, так как в ней есть вершины со списком больше степени.

Рассмотрим потенциальную недокрашиваемую компоненту. Любая её вершина v входит в блоки – клики и циклы. Обозначим (не путать с обозначением из предыдущих разделов доказательства) $\tilde{N}(v)$ – окрестность в неокрашенном подграфе. Из событий C и B знаем, что $|\tilde{N}(v)| \geq \frac{d}{4} - 10\sqrt{d\ln d} > \frac{d}{5}$ и в $\tilde{N}(v)$ не более $270d^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln d}$ антиребер. Между вершинами из разных блоков H в $\tilde{N}(v)$ нет рёбер, поэтому если есть два блока размера a и b (не считая v), то между ними есть ab антиребер.

Пусть размеры пересечений этих блоков с $\tilde{N}(v)$ имеют размер: $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k$. Тогда $a_1 + ... + a_k \geq \frac{d}{5}$ и $\sum\limits_{i\neq j} a_i a_j \leq 270d^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln d}$. Из этого следует (например методом Штурма), что $a_2 + ... + a_k \leq 5 \cdot 270 d^{\frac{1}{2}}\sqrt{\ln d}$ и соответственно $a_1 \geq \frac{d}{5} - 5\cdot 270\sqrt{d\ln d} \geq \frac{d}{6}$. Следовательно блок соответствующий a_1 это клика размера не менее $\frac{d}{6}$, а объединение всех остальных мало – меньше $1350\sqrt{d\ln d}$. Отметим, что циклы считаются в $\tilde{N}(v)$ двумя вершинами, но клики – всеми. В частности v и в G входит в клику размера не менее $\frac{d}{6}$.

Следствие. Мы выяснили, что $\tilde{N}(v)$ содержит клику в которую не входит менее $1350\sqrt{d\ln d}$ вершин.

Если в $\tilde{N}(v)$ имеется антипаросочетание размера более $1350\sqrt{d\ln d}$, то клики размера $|\tilde{N}(v)| - 1350\sqrt{d\ln d}$ там быть не может. Событие F говорит нам, что если в $N(v)$ есть антипаросочетание размера хотя бы $10^4\sqrt{d\ln d}$, то в ней останется паросочетание размера больше $1350\sqrt{d\ln d}$. Гарантируем его для всех подходящих под него вершин.

Утверждение. Вершина способная попасть в недокрашиваемую компоненту входит в большую клику – размера не менее $d - 2\cdot 10^4\sqrt{d\ln d}$.

Доказательство. Будем жадно набирать антипаросочетание в $N(v)$ по одному антиребру. Если мы не можем продвинуться дальше $10^4\sqrt{d\ln d}$ шагов, значит за пределами некоторого множества размера менее $2\cdot 10^4\sqrt{d\ln d}$ в $N(v)$ нет ни одного антиребра, то есть это клика нужного нам размера. $\square$

Рассмотрим максимальные по включению большие клики в G. Как мы помним из доказательства теоремы 2, в них не могут входить вершины степени больше d (типов 2 и 3).

Утверждение. Две большие клики не могут пересекаться.

Доказательство. Пусть пересекаются H_1 и H_2. Тогда $v\in H_2\backslash H_1$ имеет в H_1 минимум $d-4\cdot 10^4\sqrt{d\ln d}\geq \frac{10}{11}d$ соседей, чего не может быть в правильно перестроенном графе. То есть все плохие вершины потенциально способные оказаться в недокрашиваемой компоненте разбиваются по таким кликам. $\square$

Если одна из нераскрашенных компонент окажется лесом Галлаи, то некоторый его блок будет листом её дерева блоков и точек сочленения. В нем все вершины, кроме, может быть, одной, состоят только в одном блоке. При этом их степень в нераскрасшенном графе не меньше $\frac{d}{6}$, то есть этим листом не может быть цикл или клика размера менее $\frac{d}{6}$.

Следствие. Значит, для каждой вершины принадлежащей большой клике, достаточно проверить, что нераскрашенная часть этой клики не окажется частью блока-листа, так как всех остальных ее соседей не больше $2\cdot 10^4\sqrt{d\ln d}<\frac{d}{6}$.

Рассмотрим одну из таких клики H размера $d+1-k$.

Пусть из H существует паросочетание наружу размера хотя бы $56\ln d$. Тогда, два события D дают нам два свободных ребра из H наружу, что означает невозможность ситуации когда незакрашенная часть H будет листом леса Галлаи.

Определение. Назовем вершины имеющие более $14\ln d$ соседей в H *связанными* с H.

Пусть есть m вершин связанных с H, событие D говорит нам, что для таких вершин вероятность не иметь неокрашенного соседа в H менее $\frac{1}{d^7}$.

1) Если $m\geq 14\ln d$, выберем некоторые $14\ln d$ из них и рассмотрим событие I_1: "Окрестность каждой $14\ln d$ связанных с H вершин имеет неокрашенную вершину и одна из них тоже неокрашена". Вероятность невыполнения I_1 не более $\frac{14\ln d+1}{d^7}$. Включим его в локальную лемму и это гарантирует нам возможность докраски H.

2) Если $m\leq 14\ln d$. Рассмотрим событие I_2: "Окрестность каждой связанной с H вершины имеет неокрашенную вершину". Вероятность невыполнения I_2 не более $\frac{14\ln d}{d^7}$. Включим его в локальную лемму.

Утверждение. Вершин в H имеющих не только связанных соседей максимум $14\ln d\cdot 28\ln d=392\ln^2 d$.

Доказательство. Действительно, будем выкидывать их по одной. Каждая из этих вершин имеет степень внутрь H не более $14\ln d$, значит будет забирать с собой не более чем столько соседей. Также шагов забирающих хотя бы одно уникального соседа будет не более $28\ln d$, поскольку нет паросочетания такого размера. $\square$

Множество всех остальных $d - 392\ln^2 d$ вершин обозначим H', они имеют только связанных соседей снаружи. В окрестность H' идут из нее $k|H'| \geq k(d - 392\ln^2 d - 2\cdot 10^4\sqrt{d\ln d})$ ребер, а обратно выходят не более $\frac{10md}{11} + (392(\ln d)^2 - m)14\ln d$. Получаем

$$\frac{10md}{11} + (392(\ln d)^2 - m)14\ln d \geq k\left(d - 392\ln^2 d - 2\cdot 10^4\sqrt{d\ln d}\right)$$

Разделим обе части на d, ослабим неравенство за счет слагаемого с m и перенесем остаточное слагаемое вправо:

$$\frac{10}{11}m \geq k\left(1 - \frac{1}{d}\left(392\ln^2 d + 5488\ln^3 d + 2\cdot 10^4\sqrt{d\ln d}\right)\right) \geq$$

$$\geq k\left(1 - 3\cdot 10^4\sqrt{\frac{\ln d}{d}}\right) > k\left(1 - \frac{1}{121}\right) = k\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11}{12}m > k \Rightarrow m - k > \frac{m}{12} > \frac{k}{11}$$

Условие на доступные цвета из теоремы Бородина говорит нам, что все вершины блока-листа (кроме максимум одной) имеют одинаковый список доступных цветов, следовательно, и одинаковый список запрещенных цветов $\{c_1, c_2, ..., c_k\} \subset \{1, 2, ..., d\}$.

Каждая связанная с H вершина должна получить цвет из этого списка. Оценим вероятность этого. Возьмем одну вершину H' не являющуюся точкой сочленения, ее k связанных соседей получат k разных цветов – те самые $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$, иначе ее список окажется больше степени. Все остальные связанные вершины должны получить один из этих k цветов, вероятность чего не больше $\left(\frac{k}{d}\right)^{m-k} < \left(\frac{k}{d}\right)^{\frac{k}{11}}$.

Рассмотрим несколько случаев:

1) $k \geq 77$, что равносильно $\frac{k}{11} \geq 7$. Заметим, что функция $\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{x}{11}}$ убывает на отрезке $\left[1, \frac{d}{e}\right] \supset \left[1, 2\cdot 10^4\sqrt{d\ln d}\right]$. Следовательно, $\left(\frac{k}{d}\right)^{\frac{k}{11}} \leq \left(\frac{77}{d}\right)^7 < \frac{10^{14}}{d^7}$.

2) $77 > k$ и $m - k \geq 7$. В этом случае $\left(\frac{k}{d}\right)^{m-k} \leq \left(\frac{77}{d}\right)^7 < \frac{10^{14}}{d^7}$.

В обоих этих случаях событие J: "связанные с H вершины получат цвет из некоторого набора размера k", имеет вероятность менее $\frac{10^{14}}{d^7}$.

3) $m - k \leq 6$, следовательно $\frac{12}{11}k \leq m \leq 6 + k$, $k \leq 66$. Рассмотрим $k+1$ вершину с наибольшей степенью в H', пусть $k+1$-ая имеет степень $\frac{d}{\beta}$. Посчитаем количество ребер из H': $kd \leq \frac{10}{11}kd + (m-k)\frac{d}{\beta}$. Так как $m - k \leq 6$, получаем $1 \leq \frac{10}{11} + \frac{6}{k}\cdot\frac{1}{\beta}$ и значит $\beta \leq 66$. То есть существует $k+1$ вершина с хотя бы $\frac{d}{66}$ степенью в H'. Требование **3** к графу теперь говорит нам следующее: рядом с H существует $k+1$ вершина с со степенями не менее $\frac{d}{66}$ и эти вершины образуют K_{k+1}. Следовательно все они связаны с H, но не могут получить цвета из некоторого набора размера k.

2.3.4 Подведение итогов

Для каждой вершины правильно перестроенного графа G мы применяли следующие события. Для каждой из них два раза событие A: в двух вариациях для каждого из образов окрестности в которой мы получаем невырожденность. Для каждой из хороших вершин максимум одно событие делающее её таковой.

Далее мы исключали возникновение леса Галлаи на неокрашенных плохих вершинах с условием Бородина. Сначала гарантировали событие C для всех вершин степени не менее d. Затем взялись за вершину которая потенциально может принадлежать листу в дереве блоков и точек сочленения, и при этом не быть точкой сочленения. Такой лист обязан получаться из большой клики, для остальных невозможность гарантировало событие F. Для вершин больших клик гарантировали одно из событий I_1 или I_2. В первом случае вершина сразу не может попасть в блок-лист. Во втором для нее гарантируется событие J.

Итого, для хороший вершины применилось максимум 2+1=3 события, а для плохой 2+1+1+1+1=6 событий. В обоих случаях меньше 10, как мы и обещали.

Получаем, что из плохих вершин ни одна не может быть внутренней (не точкой сочленения) вершиной блока-листа леса Галлаи с условием Бородина. Следовательно, такая недокрашиваемая компонента связности из плохих вершин в принципе не могла образоваться в результате случайной предраскраски удовлетворяющей этим условиям. Значит, она может быть докрашена до правильно раскраски G и гарантирует невырожденность соответствующей ей правильной раскраски прообраза при перестройке. Тем самым, теорема 1 доказана. ■

3 Связанные замечания

3.1 Пример-органичение сверху

Пусть d – четно. Рассмотрим $\frac{d}{2}$ копий K_{d+1} без одного ребра и одну вершину v, соединенную с концами всех этих антирёбер. Каждая пара вершин из одной клики обязана быть покрашена в один цвет, то есть для v точно $m_v \leq \frac{d}{2}$.

3.2 Простые случаи

В графах с обхватом не менее двух или хотя бы без больших клик ($\omega(G) < d - 2 \cdot 10^4\sqrt{d \ln d}$), правильная перестройка графа не требуется и для них $m_v \sim \frac{d_v}{e^2}$, так как таково матожидание величины T_1.

Аналогичная ситуация с покраской хотя бы $d+1$ цвет. Любая случайная предраскраска продолжается до правильной и правильная перестройка графа не нужна.

Список литературы

[1] Bruce Reed, A Strengthening of Brooks' Theorem, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 76, Issue 2, 1999, Pages 136-149

[2] Hind, H., Molloy, M. & Reed, B. Colouring a graph frugally. Combinatorica 17, 469–482 (1997)

[3] Nikolay Gravin – Non-degenerate colorings in the Brook's Theorem, Diskretnaya Matematika, 2009 N4 pp. 105-128

[4] Д. В. Карпов, Теория графов · Издательство: МЦНМО · ISBN: 978-5-4439-1690-3 · Год издания: 2022

[5] Bruce Reed, χ, Δ, and ω, J. Graph Theory 27 (1998), 177-213

[6] Д. В. Карпов, Динамические правильные раскраски вершин графа, Зап. научн. сем. ПОМИ, 2010, том 381, 47–77

[7] Н. В. Гравин, Д. В. Карпов, "О правильных раскрасках гиперграфов", Комбинаторика и теория графов. III, Зап. научн. сем. ПОМИ, 391, ПОМИ, СПб., 2011, 79–89; J. Math. Sci. (N. Y.), 184:5 (2012), 595–600