Отзыв на магистерскую работу Петра Куликова
“Duality Approach to the Regularity Problem
for the Navier-Stokes Equations”

В 2007 году Г.А. Серегиным и В. Швераком был предложен подход к исследованию локальных особенностей слабых решений уравнений Навье–Стокса, связывающий возникновение таких особенностей с существованием нетривиальных ограниченных античных решений уравнений Навье–Стокса. Ранее подобный подход успешно применялся для самых разных нелинейных уравнений в частных производных эволюционного типа, таких как геометрические потоки (потоки средней кривизны, потоки Риччи и др.), полулинейные уравнения, задачи со свободными границами итд.

Таким образом, один из возможных подходов к изучению проблемы гладкости решений уравнений Навье–Стокса основан на доказательстве отсутствия нетривиальных ограниченных античных решений соответствующих уравнений. Поскольку античные решения являются глобальными решениями (т.е. определенными во всем пространстве по пространственным переменным и обратно по времени), тривиальность таких решений может быть установлена на основе теорем лиувиллевского типа (глобально ограниченные решения различных дифференциальных уравнений в частных производных суть константы).

Разработанные на сегодняшний день различные методы доказательства теорем лиувиллевского типа основаны, как правило, на принципе максимума. В основном, эти методы позволяют получать соответствующие результаты для скалярных уравнений и оказываются неприменимыми для систем (каковой является система уравнений Навье–Стокса). Поэтому возникает необходимость разработки таких методов доказательства теорем лиувиллевского типа, которые не использовали бы скалярной специфики задачи.

Одним из таких методов является подход, основанный на доказательстве теорем лиувиллевского типа на основе теории двойственности. Этот подход впервые был успешно применен в 2014 году Г.А. Серегиным к доказательству теоремы Лиувилля для античных решений двумерных уравнений Навье-Стокса в полупространстве (в случае полупространства сведение двумерной системы Навье-Стокса к скалярному уравнению для ротора “не работает”, поскольку ротор “забывает” краевые условия). Далее этот подход был развит в работе Г.А. Серегина и М. Шонбек. Суть этого подхода заключается в том, что теорему Лиувилля для античного решения можно установить, есть удается доказать соответствующее убывание по времени тех или иных норм решений двойственной задачи Стокса с младшими членами, в которой исходное античное решение выступает в качестве дрифта (т.е. заданной скорости сноса). К сожалению, оценки убывания норм решений сопряженной задачи, найденные в работе Г.А. Серегина и М. Шонбек, не позволили получить принципиально новых результатов, касающихся новых теорем Лиувилля для особенностей типа I (т.е. особенностей с конечными критическими нормами решений). Поэтому в 2022 году Г.А. Серегиным была предложена модификация метода двойственности, при которой исследование асимптотики по времени решений двойственной задачи с ненулевой правой частью и нулевым начальным данным заменяется на изучение соответствующей асимптотики для решений задачи Коши (с нулевой правой частью и ненулевыми начальными данными).

Поскольку получение точных (скажем, подтвержденных контрпримерами) оценок поведения по времени тех или иных норм решений задачи Стокса с дрифтом, по-видимому, является задачей чрезвычайно сложной (впрочем, как и все, что связано с теорией уравнений Навье–Стокса), представляет интерес вопрос о возможности доказательства методом двойственности тех результатов теории уравнений Навье–Стокса, которые ранее были установлены другими методами. Такая "проверка эффективности" метода двойственности была осуществлена в работе Г.А. Серегина и М. Шонбек, где было доказано отутствие у уравнений Навье-Стокса особенностей типа I в случае, если критическая норма решения мала по величине. Аналогичная "проверка эффективности" варианта метода двойственности, предложенного Г.А. Серегиным в 2022 году, была поручена П. Куликову в качестве выпускной магистерской работы.

Петр Куликов в полной мере справился с предложенной ему задачей. Им было установлено, что варианты метода двойственности, связанного с выбором в качестве "свободного параметра задачи" либо начального данного, либо финитной правой части, по-сути, являются равноценными (асимптотическое поведение по времени соответствующих норм решений в обоих случаях одинаково). Для специалистов по теории Навье–Стокса данное заключение представляет несомненный интерес. Альтернативно, полученные им результаты можно рассматривать как найденное новое доказательство ранее известного факта в теории уравнений Навье–Стокса (что, на мой взгляд, менее интересно, чем вывод об эквивалентности вариантов метода двойственности). Считаю, что работа заслуживает оценки "отлично".

научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор факультета математики и компьютерных наук
Санкт-Петербургского государственного университета
Ф. В. Петров
Петр