Санкт-Петербургский государственный университет

Беляков Кирилл Алексеевич

Выпускная квалификационная работа

Энергетически-эффективная аппроксимация многомерных случайных процессов

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа СВ.5000.2019 «Математика»

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
М.А. Лифшиц

Рецензент:
доцент, к.ф.-м.н.
С.М. Ананьевский

Санкт-Петербург
2023

Contents

Abstract

In the thesis we generalize results on energy of taut strings accompanying Wiener process to the case of multidimensional Wiener process. Most results such as Lq and a.s. convergences of mean energy to some fixed value still hold in multidimensional case. Also growth of this fixed value with dimension is investigated.

Аннотация

В работе мы обобщаем результаты об энергии натянутых струн, сопровождающих Винеровский процесс, на случай многомерного Винеровского процесса. Большенство результатов, такие как Lq и п.н. сходимости средней энергии к некоторой константе, выполнены. Также исследуется рост этой константы в зависимости от размерности.

1. Введение

В одномерном случае натянутая струна определяется следующим образом: Пусть нам дан интервал $[0, T]$ и два непрерывных функциональных ограничения: $g_1(t) \leq g_2(t), 0 \leq t \leq T$. Тогда функция h_* называется натянутой струной, если она минимизирует следующий функционал, для любой выпуклой ϕ:

$$F_\phi(h) = \int_0^T \phi(h'(t))dt$$

по всем абсолютно непрерывным функциям h, удовлетворяющим функциональным неравенствам:

$$g_1(t) \leq h(t) \leq g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Среди возможных функционалов энергия $\int_0^T h'(t)^2 dt$, вариация $\int_0^T |h'(t)|dt$, длина траектории $\int_0^T \sqrt{1 + h'(t)^2}dt$. В работе мы будем рассматривать только энергию. Заметим, что для любой строго выпуклой ϕ минимум функционала F_ϕ существует и единственен, в том числе для энергии.

Данциг в статье [2] упоминает, что натянутые струны обсуждались в 1952 году на Беллмановском семинаре в RAND Corp. в связи с проблемами в оптимальном управлении. Позднее натянутые струны нашли применение в статистике, см. [1] и [6], обработке изображений [8] и теории коммуникации [7, 9].

В работе [4] рассматриваются струны, сопровождающие Винеровский процесс $W(t)$ в полосе постоянной ширины r. В этом случае фунциональные неравенства $g_1(t), g_2(t)$ принимают вид:

$$g_1(t) = W(t) - r,\ g_2(t) = W(t) + r$$

и изучается асимптотическое поведение энергии струны при $T \to \infty$, см. [4, Теоремы 1.1, 1.2]. В статье [5] изучается асимптотическое поведение энергии струн, сопровождающих случайное блуждание, и в [10] обобщаются результаты [4] на полосу переменной ширины.

Мы рассматриваем многомерное обобщение натянутых струн, сопровождающих Винеровский процесс: пусть дан интервал $[0, T]$. Многомерной натянутой струной, сопровождающей многомерный Винеровский процесс $W(t)$ будем называть функцию h_*, минимизирующую следующий функционал:

$$\int_0^T \|h'(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} dt$$

среди всех абсолютно непрерывных $h \in AC([0, T] \to \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $\sup_{0 \le t \le T} \|W(t) - h(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le r$. Про энергию многомерной натянутой струны мы доказываем результаты аналогичные [4, Теоремы 1.1, 1.2]. Также мы устанавливаем некоторые оценки в зависимости от размерности.

2. Основные результаты

Сначала введем основные обозначения. Введем равномерную норму и норму соболевского типа:

$$\|h\|_T := \sup_{0 \le t \le T} \|h(t)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad h \in \mathbb{C}([0, T] \to \mathbb{R}^n),$$

$$|h|^2_T := \int_0^T \|h'(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}\, dt, \quad h \in AC([0, T] \to \mathbb{R}^n),$$

где $AC([0,T] \to \mathbb{R}^n)$ - пространство n-мерных абслолютно непрерывных функций. На пространстве $\mathbb{R}^n$ далее везде мы рассматриваем Евклидову норму $\|.\|_{\mathbb{R}^n}$.

Пусть W - n-мерный Винеровский процесс на отрезке $[0,T]$. Определим случайные величины, соотвествующие минимальной энергии требуемой, чтобы приблизить Винеровский процесс:

$$I_W(T,r,n) = \inf\{|h|_T \mid h \in AC([0,T] \to \mathbb{R}^n),\ \|h-W\|_T \le r,\ h(0) = W(0)\},$$

$$I_W^0(T,r,n) = \inf\{|h|_T \mid h \in AC([0,T] \to \mathbb{R}^n),$$
$$\|h-W\|_T \le r,\ h(0) = W(0),\ h(T) = W(T)\}.$$

В случае I_W мы фиксируем только левый конец $h(0) = W(0)$, в случае I_W^0 фиксируем оба конца $h(0) = W(0),\ h(T) = W(T)$.

Далее введем обозначения для одномерных аналогов этих случайных величин:

$$I_W(T,r) := I_W(T,r,1),$$
$$I_W^0(T,r) := I_W^0(T,r,1).$$

Наши основные результаты:

Теорема 2.1. *Многомерное обобщение теоремы [4, Теорема 1.1]. Существует константа* $C_n > 0$, *такая что при* $\frac{r}{\sqrt{T}} \to 0$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T,r,n) \xrightarrow{Lq} C_n,$$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W^0(T,r,n) \xrightarrow{Lq} C_n$$

для любого $q > 0$.

Теорема 2.2. *Многомерное обобщение теоремы [4, Теорема 1.2]. Для любого фиксированного* $r > 0$, *при* $T \to \infty$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T,r,n) \xrightarrow{a.s.} C_n,$$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W^0(T, r, n) \xrightarrow{a.s.} C_n.$$

Введем обозначение $C := C_1$. Далее мы доказываем следующее предложение, устанавливающее рост по размерности

Предложение 2.3. *Существует такая константа $C > 0$, что*

$$nC^2 \leq C_n^2 \leq n^2 C^2.$$

3. Свойства I_W и I_W^0

Здесь мы доказываем основные свойства I_W и I_W^0, которые будут использоваться при доказательстве теорем 2.1, 2.2.

Начнем со свойства монотонности:

Лемма 3.1. *$I_W(T, r, n)$ - не убывает по T, не возрастает по r.*

$I_W^0(T, r, n)$ - не возрастает по r.

Доказательство. Рассмотрим $T_1 \leq T_2$ и h - натянутую струну, соответствующую $I_W(T_2, r, n)$, тогда

$$I_W(T_2, r, n)^2 = |h|_{T_2}^2 \geq |h\big|_{[0,T_1]}|_{T_1}^2 \geq I_W(T_1, r, n)^2.$$

Заметим, что подобное доказательство не работает в случае I_W^0 из-за зафиксированного второго конца. Невозрастание по r обеих случайных величин очевидно. □

3.1. Масштабирование

I_W и I_W^0 удовлетворяют условиям масштабирования по времени:

Лемма 3.2.

$$I_W(T, r, n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} I_W(1, \frac{r}{\sqrt{T}}, n),$$

$$I_W^0(T, r, n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} I_W^0(1, \frac{r}{\sqrt{T}}, n),$$

где $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ обозначает равенство по распределению.

Доказательство. Рассмотрим многомерный Винеровский процесс W и абсолютно непрерывную функцию h, аппроксимирующую его на отрезке $[0, T]$ и отмасштабируем их на отрезок [0, 1].

$$X(s) := \frac{W(sT)}{\sqrt{T}}, \quad g(s) := \frac{h(sT)}{\sqrt{T}}, \quad 0 \le s \le 1.$$

Тогда

$$\|X - g\|_1 = \frac{\|W - h\|_T}{\sqrt{T}},$$

$$|g|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 g_i'(s)^2 ds = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (\frac{h_i'(sT)T}{\sqrt{T}})^2 ds = \sum_{i=1}^{n} \int_0^T h_i'(s)^2 ds = |h|_T^2.$$

Заметим, что $X(s)$ - стандартный Винеровский процесс на отрезке $[0, 1]$. Поэтому

$$I_W(T, r, n) \overset{\mathrm{d}}{=} I_W(1, \frac{r}{\sqrt{T}}, n),$$

$$I_W^0(T, r, n) \overset{\mathrm{d}}{=} I_W^0(1, \frac{r}{\sqrt{T}}, n).$$

□

Из леммы следует, что вместо теоремы 2.1 достаточно доказывать, что при $\epsilon \to 0$

$$\epsilon I_W(1, \epsilon, n) \xrightarrow{Lq} C_n,$$

$$\epsilon I_W^0(1, \epsilon, n) \xrightarrow{Lq} C_n.$$

3.2. Конечность вторых моментов

Мы покажем конечность вторых моментов $I_W(T, r, n)$, $I_W^0(T, r, n)$, используя аналогичный результат в одномерном случае [4, Раздел 2.2]

Для начала выведем следующую вспомогательную лемму, оценивающую $I_W(T, r, n)$ и $I_W^0(T, r, n)$ через $I_W(T, r)$ и $I_W^0(T, r)$ соответственно:

Лемма 3.3.

$$\sum_{i=1}^{n} I_{W_i}(T, r)^2 \le I_W(T, r, n)^2 \le \sum_{i=1}^{n} I_{W_i}(T, \frac{r}{\sqrt{n}})^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} I^0_{W_i}(T,r)^2 \le I^0_W(T,r,n)^2 \le \sum_{i=1}^{n} I^0_{W_i}(T,\frac{r}{\sqrt{n}})^2,$$

где W_i - i-я координата многомерного Винеровского процесса W.

Заметим, что суммы здесь состоят из независимых одинаково распределенных случайных велечин, т.к. координаты W независимы и одинаково распределены.

Доказательство. Пусть W - многомерный Винеровский процесс на $[0,T]$, обозначим W_i - i-ую координату, которая сама является одномерным стандартным Винеровским процессом. Рассмотрим $h_i \in AC([0,T],\mathbb{R})$ по $i = 1,\cdots,n$ - натянутые струны, соответствующие $I_{W_i}(T,\frac{r}{\sqrt{n}})$. Тогда, беря $h = (h_1,\cdots,h_n)^T$, мы получаем

$$\|W-h\|^2_T = \sup_{0\le t\le T} \|W(t)-h(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} = \sup_{0\le t\le T} \sum_{i=1}^{n} (W_i(t)-h_i(t))^2 \le \sum_{i=1}^{n} \|W_i - h_i\|^2_T \le r^2.$$

Отсюда

$$I_W(T,r,n)^2 \le |h|^2_T = \sum_{i=1}^{n} |h_i|^2_T = \sum_{i=1}^{n} I_{W_i}(T,\frac{r}{\sqrt{n}})^2.$$

Теперь рассмотрим h - натянутую струну, соответствующую $I_W(T,r,n)$, h_i - её i-ая координата. Тогда $\|h_i - W_i\|_T \le r$ и

$$I_W(T,r,n)^2 = |h|^2_T = \sum_{i=1}^{n} |h_i|^2_T \ge \sum_{i=1}^{n} I_{W_i}(T,r)^2.$$

Соотношения для I^0_W доказываются аналогичным образом. □

Лемма 3.4. *Конечность вторых моментов*

$$D(T,r,n) := EI_W(T,r,n)^2 < +\infty,$$

$$D^0(T,r,n) := EI^0_W(T,r,n)^2 < +\infty.$$

Доказательство. Из леммы 3.3 вытекает, что

$$EI_W(T,r,n)^2 \le nEI_{W_i}(T,\frac{r}{\sqrt{n}})^2.$$

Далее мы пользуемся конечностью моментов в одномерном случае [4, Раздел 2.2].

Для I_W^0 утверждение доказывается аналогично. □

3.3. Соотношения между I_W и I_W^0

Очевидно, что $I_W(T,r,n) \le I_W^0(T,r,n)$. Далее мы покажем, что некоторого рода обратное соотношение тоже выполняется.

Лемма 3.5. *Для любого $\delta > 0$*

$$EI_W(T,r,n)^2 \ge EI_W^0(T+1,r+\delta,n)^2 - EI_W^0(1,\delta,n)^2 - r^2.$$

Доказательство. Сначала мы приближаем Винеровский процесс на отрезке $[0,1]$ функцией, начинающейся в некотором произвольном $\rho \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\delta > 0$ и h - натянутая струна, соответствующая $I_W^0(1,\delta,n)$. Тогда выполнено $h(0) = W(0) = 0,\ h(1) = W(1),\ \|h - W\|_1 \le \delta$ и $|h|_1 = I_w^0(1,\delta,n)$. Пусть

$$H(t) = \rho + h(t) - \rho t, \quad 0 \le t \le 1.$$

Тогда $H(0) = \rho + h(0) = \rho,\ H(1) = W(1)$.

$$\|H - W\|_1 \le \|h - W\|_1 + \|\rho\|_{\mathbb{R}^n} \max_{0\le t\le 1}|1-t| \le \delta + \|\rho\|_{\mathbb{R}^n},$$

$$|H|_1^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (H_i'(t))^2 dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (h_i'(t) - \rho_i)^2 dt =$$
$$|h|_1^2 + \|\rho\|^2 - 2\rho^T(h(1) - h(0)) = |h|_1^2 + \|\rho\|^2 - 2\rho^T W(1).$$

Теперь перейдем к нижней оценке для $I_W(T,r,n)$. Зафиксируем r,δ,T и будем приближать Винеровский процесс на отрезке $[0,T+1]$ с фиксированными концами. Сначала возьмем $\hat{h}(t), 0 \le t \le T$ - натянутую струну, соответствующую $I_W(T,r,n)$. Обозначим $\rho = \hat{h}(T) - W(T)$ и заметим, что $\|\rho\|_{\mathbb{R}^n} \le r$. Теперь мы приближаем Винеровский процесс с момента времени T, используя приближение H:

$$\tilde{W}_T(s) := W(T+s) - W(T),\ 0 \le s \le 1.$$

Обозначим

$$\hat{h}(T+s) := W(T) + H(s),\ 0 \le s \le 1.$$

Тогда $\hat{h}$ будет приближением W на $[0, T+1]$ с фиксированными концами.

$$\|W(T+s) - \hat{h}(T+s)\|_{\mathbb{R}^n} = \|\tilde{W}_T(s) + W(T) - W(T) - H(s)\|_{\mathbb{R}^n} \le \\ \delta + \|\rho\|_{\mathbb{R}^n} \le \delta + r,$$

$$|\hat{h}|^2_{T+1} = |\hat{h}|^2_T + |H|^2_1 = I_W(T,r,n)^2 + I^0_{\tilde{W}_T}(1,\delta,n)^2 + \|\rho\|^2 - 2\rho^T\tilde{W}_T(1) \le \\ I_W(T,r,n)^2 + I^0_{\tilde{W}_T}(1,\delta,n)^2 + r^2 - 2\rho^T\tilde{W}_T(1).$$

Тогда

$$I_W(T,r,n)^2 \ \ge\ I^0_W(T+1, r+\delta, n)^2 - I^0_{\tilde{W}_T}(1,\delta,n)^2 - r^2 + 2\rho^T\tilde{W}_T(1). \quad (1)$$

Переходя к математическому ожиданию, получаем утверждение леммы. □

3.4. Концентрация

Сперва докажем липшецевость функционалов I_W и I^0_W, а именно:

Лемма 3.6. *Для любых $w \in \mathbb{C}([0,T] \to \mathbb{R}^n)$, $g \in AC([0,T] \to \mathbb{R}^n)$*

$$|I_{w+g}(T,r,n) - I_w(T,r,n)| \le |g|_T,$$

$$|I^0_{w+g}(T,r,n) - I^0_w(T,r,n)| \le |g|_T.$$

Доказательство. Пусть h - натянутая струна, соответствующая $I_w(T,r,n)$.

Тогда выполнено $\|h-w\|_T \le r,\ |h|_T = I_w(T,r,n)$. Тогда $\|(h+g)-(w+g)\|_T \le r$ и

$$I_{w+g}(T,r,n) \le |h+g|_T \le I_w(T,r,n) + |g|_T.$$

Обратное неравенство следует аналогичным образом. Для I_w^0 доказательство аналогично и его мы здесь не приводим. $\square$

Дальше в разделе мы будем считать T, r и n фиксироваными и использовать обозначения I_W, I_W^0, опуская T, r, n. Обозначим за m, m^0 медианы случайных величин I_W и I_W^0 соответственно.

Только что доказанная лемма позволяет нам воспользоваться знаменитым Концентрационным нервенством для липшецевых функционалов от случайных гауссовских векторов [3, Теорема 6.2.], которая дает, что для любого $\rho > 0$

$$\mathbb{P}(I_W \ge m+\rho) \le \mathbb{P}(N \ge \rho),$$

$$\mathbb{P}(I_W \le m-\rho) \le \mathbb{P}(N \ge \rho),$$

где N - стандартная гауссовская величина.

Пользуясь Концентрационным неравенством, мы выводим следующие леммы:

Лемма 3.7.

$$m - 1 \le \sqrt{E[I_W^2]} \le m + 2,$$

$$m^0 - 1 \le \sqrt{E[(I_W^0)^2]} \le m^0 + 2.$$

Доказательство. Сначала получим оценку дисперсии I_W:

$$VarI_W = \inf_y E(I_W - y)^2 \le E(I_W - m)^2 = 2\int_0^\infty \rho\mathbb{P}(|I_W - m| \ge \rho)d\rho \le$$
$$2\int_0^\infty \rho\mathbb{P}(|N| \ge \rho)d\rho = E|N|^2 = 1.$$

Также верно

$$|EI_W - m| \le E|I_W - m| \le \sqrt{E(I_W - m)^2} \le 1,$$

$$EI_W \le \sqrt{EI_W^2} \le \sqrt{(EI_W)^2 + VarI_W} \le \sqrt{(EI_W)^2 + 1} \le EI_W + 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$m - 1 \le \sqrt{E[I_W^2]} \le m + 2.$$

Для I_W^0 неравенства доказываются также. $\square$

Лемма 3.8. *Для любого* $q > 0$

$$E|I_W - m|^q \le E|N|^q,$$

$$E|I_W^0 - m^0|^q \le E|N|^q.$$

Доказательство.

$$E|I_W - m|^q = q\int_0^\infty \rho^{q-1}\mathbb{P}(|I_W - m| \ge \rho)d\rho \le$$
$$q\int_0^\infty \rho^{q-1}\mathbb{P}(|N| \ge \rho)d\rho = E|N|^q.$$

Для I_W^0 доказательство аналогично. $\square$

4. Асимптотика

Введем обозначения

$$D(T, r, n) := EI_W(T, r, n)^2,$$

$$D^0(T, r, n) := EI_W^0(T, r, n)^2.$$

Докажем сходимость в среднем для D, D^0:

Лемма 4.1. *Существует константа* $0 \le C_n < \infty$, *такая что при* $\frac{r}{\sqrt{T}} \to 0$

$$\frac{r^2}{T}D(T, r, n) \to C_n^2, \tag{2}$$

$$\frac{r^2}{T}D^0(T, r, n) \to C_n^2. \tag{3}$$

Доказательство. Сначало выведем субаддитивность $D^0(T,r,n)$ по времени. Для I_W^0, для любых $r, T_1 > 0, T_2 > 0$ выполнено:

$$I_W^0(T_1+T_2,r,n)^2 \le I_W^0(T_1,r,n)^2 + I_{\tilde{W}_{T_1}}^0(T_2,r,n)^2,$$

где $\tilde{W}_{T_1} := W(T_1+s) - W(T_1)$ - Винеровский процесс с момента времени T_1. Эта оценка получается, если склеить натянутые струны на $[0,T_1]$ и $[T_1, T_1+T_2]$. Заметим, что для I_W такую оценку вывести не удается.

Переходя к математическому ожиданию, мы выводим свойство субаддитивности:

$$D^0(T_1+T_2,r,n) \le D^0(T_1,r,n) + D^0(T_2,r,n).$$

Заметим, что $D^0(T,r,n)$ не возрастает по r по лемме 3.1, также по свойству масшатибируемости (лемма 3.2) $D^0(T,r,n) = D^0(1,\frac{r}{\sqrt{T}},n)$. И т.к. D^0 не возрастает по r, то оно не убывает по T.

Далее давайте считать r фиксированным. Давайте теперь зафиксируем некоторое $T_0 > 0$ и используем свойство масштабируемости:

$$\begin{aligned}\limsup_{T\to\infty} \frac{D^0(T,r,n)}{T} = \limsup_{k\to\infty} \max_{0\le\tau\le T_0} \frac{D^0(kT_0+\tau,r,n)}{kT_0+\tau} \le \\ \limsup_{k\to\infty} \frac{D^0((k+1)T_0,r,n)}{kT_0} \le \\ \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)D^0(T_0,r,n)}{kT_0} = \frac{D^0(T_0,r,n)}{T_0}.\end{aligned}$$

Минимизируя правую часть по T_0, получаем

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{D^0(T,r,n)}{T} \le \inf_{T>0} \frac{D^0(T,r,n)}{T} \le \liminf_{T\to\infty} \frac{D^0(T,r,n)}{T}.$$

Отсюда следует существование предела

$$\lim_{T\to\infty} \frac{D^0(T,r,n)}{T} = \inf_{T>0} \frac{D^0(T,r,n)}{T} := C_{n,r}.$$

Используя масштабированность, мы находим предел:

$$C_n^2 := \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^2 D^0(1,\epsilon,n) = r^2 \lim_{T\to\infty}\frac{D^0(T,r,n)}{T} = C_{n,r}^2 r^2.$$

Используя масшабированность еще один раз, мы получаем утверждение (3) из леммы.

Для фиксированного r с помощью оценки $I_W(T,r,n) \le I_W^0(T,r,n)$ мы выводим

$$\lim_{T\to\infty}\sup\frac{D(T,r,n)}{T} \le \lim_{T\to\infty}\frac{D^0(T,r,n)}{T} = C_{n,r} = C_n^2 r^{-2}.$$

В обратную сторону, используя лемму 3.5, мы получаем для любого фиксированного $\delta > 0$

$$\lim_{T\to\infty}\inf\frac{D(T,r,n)}{T} \ge \lim_{T\to\infty}\frac{D^0(T,r+\delta,n)}{T} = C_n^2(r+\delta)^{-2}.$$

Устремляя $\delta \to 0$, получаем для любого фиксированного r

$$\lim_{T\to\infty}\frac{D(T,r,n)}{T} = C_n^2 r^{-2}.$$

Используя аргументы как для D^0, понимаем, что мы можем варировать r. □

Следствие 4.2. *При* $\frac{r}{\sqrt{T}} \to 0$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} m(T,r,n) \to C_n,$$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} m^0(T,r,n) \to C_n.$$

Доказательство. Утверждение напрямую следует из леммы 3.7 и предыдущей леммы. □

4.1. Lq сходимость

Доказательство теоремы 2.1. Для любого $q > 0$ при $\frac{r}{\sqrt{T}} \to 0$ верно

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T,r,n) \xrightarrow{Lq} C_n, \tag{4}$$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I^0_W(T,r,n) \xrightarrow{Lq} C_n. \tag{5}$$

Благодаря следствию 4.2 сходимость (4) равносильна

$$\frac{r}{\sqrt{T}}\big(I_W(T,r,n) - m(T,r,n)\big) \xrightarrow{Lq} 0.$$

Далее из леммы 3.8 следует

$$\Big(\frac{r}{\sqrt{T}}\Big)^q E|I_W(T,r,n) - m(T,r,n)|^q \le \Big(\frac{r}{\sqrt{T}}\Big)^q E|N|^q \to 0$$

и (4) следует. (5) выводится аналогично. □

4.2. Сходимость почти наверное

Доказательство теоремы 2.2. Для любого фиксированного $r > 0$, при $T \to \infty$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T,r,n) \xrightarrow{a.s} C_n, \tag{6}$$

$$\frac{r}{\sqrt{T}} I^0_W(T,r,n) \xrightarrow{a.s} C_n. \tag{7}$$

Рассмотрим экспоненциальную последовательность $T_k := a^k$ с фиксированным $a > 1$. Из оценки на моменты 3.8 и неравенства Чебышева для любого

$\epsilon > 0$ выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k^{-\frac{1}{2}} |I_W(T_k, r, n) - m(T_k, r, n)| > \epsilon) \leq$$

$$\epsilon^{-q} \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{-\frac{q}{2}} E|I_W(T_k, r, n) - m(T_k, r, n)|^q \leq$$

$$\epsilon^{-q} E|N|^q \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{-\frac{q}{2}} < \infty.$$

Тогда по лемме Бореля-Кантелли

$$\lim_{k \to \infty} T_k^{-1/2} \big(I_W(T_k, r, n) - m(T_k, r, n) \big) = 0 \quad \text{п.н.}$$

В силу сходимости медиан (Следствие 4.2) получаем

$$\lim_{k \to \infty} \frac{r}{T_k^{-1/2}} I_W(T_k, r, n) = C_n.$$

В силу того, что I_W монотонна по T, для любого $T \in [T_k, T_{k+1}]$ верна цепочка неравенств

$$\frac{rI_W(T_k, r, n)}{(aT_k)^{1/2}} = \frac{rI_W(T_k, r, n)}{T_{k+1}} \leq \frac{rI_W(T, r, n)}{T^{1/2}} \leq$$

$$\frac{rI_W(T_{k+1}, r, n)}{T_k^{1/2}} = \frac{rI_W(T_{k+1}, r, n)}{(T_{k+1}/a)^{1/2}}.$$

Отсюда

$$a^{-1/2} C_n \leq \liminf_{T \to \infty} \frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T, r, n) \leq \limsup_{T \to \infty} \frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T, r, n) \leq a^{1/2} C_n \quad \text{п.н.}$$

Устремляя a к 1, получаем

$$\lim_{T \to \infty} \frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T, r, n) \to C_n \quad \text{п.н.}$$

Для $I_W^0(T,r,n)$ легко показать следующую нижнюю оценку

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{r}{\sqrt{T}} I_W^0(T,r,n) \geq \lim_{T\to\infty} \frac{r}{\sqrt{T}} I_W(T,r,n) = C_n \quad \text{п.н.}$$

В обратную сторону мы используем неравенство (1), для любых $r>0, \delta>0$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{r^2}{T} I_W^0(T+1, r+\delta, n)^2 \leq$$
$$\limsup_{T\to\infty} \frac{r^2}{T}\big(I_W(T,r,n)^2 + I^0_{\tilde{W}_T}(1,\delta,n)^2 + r^2 + 2r\|\tilde{W}_T(1)\|_{\mathbb{R}^n}\big) \leq$$
$$C_n^2 + \limsup_{T\to\infty} \frac{r^2}{T} I^0_{\tilde{W}_T}(1,\delta,n)^2 + 2r \limsup_{T\to\infty} \frac{r^2}{T} \|\tilde{W}_T(1)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Теперь мы покажем, что остаточные пределы исчезают.

$$\|\tilde{W}_T(1)\|^2_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n (\tilde{W}_{T,i})^2.$$

Далее используем широко известный факт

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{|\tilde{W}_{T,i}(1)|}{\sqrt{2\ln T}} = \limsup_{T\to\infty} \frac{|W_i(T+1) - W_i(T)|}{\sqrt{2\ln T}} = 1.$$

Тогда

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\|\tilde{W}_T(1)\|_{\mathbb{R}^n}}{T} = 0.$$

Переходя к $I^0_{\tilde{W}_T}(1,\delta,n)^2$, мы сначала сводим ситуацию к одномерному случаю, используя лемму 3.3

$$I^0_{\tilde{W}_T}(1,\delta,n)^2 \leq \sum_{i=1}^n I^0_{\tilde{W}_{T,i}}(1, \frac{\delta}{\sqrt{n}})^2.$$

Далее мы используем доказательство в одномерном случае [4, Раздел 3.3], где доказано что

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{r^2}{T} I^0_{\tilde{W}_{T,i}}(1,\delta)^2 = 0$$

для любого $\delta > 0$. В конечном итоге мы получаем

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{r^2}{T} I_W^0(T+1, r+\delta, n)^2 \le C_n^2.$$

Устремляя $\delta \to 0$, получаем сходимость (7). $\square$

4.3. Рост по n

Здесь мы доказываем утверждение, устанавливающее зависимость C_n от n.

Доказательство предложения 2.3. Воспользуемся леммой 3.3

$$\sum_{i=1}^{n} I_{W_i}(T, r)^2 \le I_W(T, r, n)^2 \le \sum_{i=1}^{n} I_{W_i}(T, \frac{r}{\sqrt{n}})^2.$$

Домножая на $\frac{r^2}{T}$ и переходя к матожиданию, получаем

$$n\frac{r^2}{T} D(T, r)^2 \le \frac{r^2}{T} D(T, r, n) \le n^2 \frac{r^2}{nT} D(T, \frac{r}{\sqrt{n}}).$$

Переходя к пределу при $\frac{r}{\sqrt{T}} \to 0$, получаем искомое утверждение. $\square$

5. Заключение

Для натянутой струны, сопровождающей одномерный Винеровский процесс, были известны результаты, такие как Lq и п.н. сходимости [4][Теоремы 1.1, 1.2]. В работе мы обобщили их на многомерный Винеровский процесс. Также мы изучили зависимость средней энергии от размерности.

Список литературы

[1] R.E. Barlow, D.J. Bartholomew, J.M. Bremner, and H.D. Brunk. Statistical inference under order restrictions: The theory and application of isotonic regression. *Wiley series in probability and mathematical statistics*, no.8, 1972.

[2] George Dantzig. A control problem of Bellman. *Manage. Sci.*, 17(9):542–546, 1971.

[3] Mikhail Lifshits. *Lectures on Gaussian Processes*. Springer, Heidelberg, 2012.

[4] Mikhail Lifshits and Eric Setterqvist. Energy of taut strings accompanying wiener process. *Stoch. Process. Appl.*, 125:401–427, 2014.

[5] Mikhail Lifshits and Anatoly Siuniaev. Energy of taut strings accompanying random walk. *Prob. and Math.Statistics*, 41:9–23, 2021.

[6] E. Mammen and S. van de Geer. Locally adaptive regression splines. *Ann. Statist.*, 25:387–413, 1997.

[7] J.D. Salehi, Z.L. Zhang, J. Kurose, and D. Towsley. Supporting stored video: Reducing rate variability and end-to-end resource requirements through optimal smoothing. *IEEE/ACM Trans. Networking*, 6:397–410, 1998.

[8] O. Scherzer, M. Grasmair, H. Grossauer, M. Haltmeier, and F. Lenzen. *Variational Methods in Imaging*. Springer, New York, 2009.

[9] E. Setterqvist and R. Forchheimer. Real-time communication systems based on taut strings. *Journal of Communications and Networks*, 20:207–218, 2018.

[10] Д.И. Блинова и М.А. Лифшиц. Энергия натянутых струн, сопровождающих винеровский процесс и случайное блуждание в полосе переменной ширины. *Записки научных семинаров ПОМИ*, 495:64–86, 2020.