Отзыв научного руководителя о выпускной квалификационной работе
Константина Вячеславовича Челпанова
"Об остовных деревьях в двудольном графе"

Знаменитая гипотеза Эренборга утверждает, что количество остовных деревьев двудольного графа не превосходит произведения степеней его вершин делить на произведение размером долей. Во многом интерес к этой гипотезе вызван тем, что имеется богатый класс графов, lzk которых достигается равенство — это все так называемые грфы Феррера: вершины суть строки и столбцы диаграммы Феррера (другая терминология — диаграммы Юнга), рёбра соответствуют тому что строка и столбец пересекаются.

Один из подходов к перечислению остовных деревьев в графе G — рассмотрение перечисляющего многочлена

$$p_G := \sum_T \prod x_i^{\deg_T(i)-1},$$

где x_i — переменная, сопоставленная вершине i, $\deg(i)$ — её степень в дереве T. Эта сумма может быть выражена как определитель в духе матричной теоремы о деревьях Кирхгофа.

Работа Константина Челпанова посвящена вариантам гипотезы Эренборга, связанным с неравенствами на значения и коэффициенты многочлена p_G. Если обозначит $f_G := \prod_i \sum_{j\in N(i)} x_j$, A_G, B_G — суммы переменных в долях графа G, то гипотеза Эренборга сравнивает значения многочленов $A \cdot B \cdot p_G$ и f_G в точке, в которой все переменные принимают значения 1. Эти же многочлены можно сравнивать и другими способами, из каковых в работе вводятся три: поточечно при неотрицательных значениях переменных; покоэффициентно; покоэффициентно после домножения на подходящий многочлен с неотрицательными коэффициентами — в духе теоремы Пойа. Отмечу, равенство для графов Феррера сохраняется и в полиномиальной версии.

Идея рассмотрения полиномиальноё версии в том, что более общее и гибкое утверждение часто проще доказывать (например, по индукции). Индукцию было бы особенно приятно вести для сильной (покоэффициентной) версии — но она, к сожалению, верна не всегда. Константин высказывает интересную гипотезу о том, что она верна в точности для графов без индуцированных длинных циклов.

Для более слабых полиномиальных версий контрпример не находится, возможно, что они верны всегда. Достижения Константина в том, что он устанавливает ряд операций для графов, которые сохраняют выполнимость этих гипотез: склеивание по вершине, склеивание по ребро, приклеивание пути нечётной длины к смежным вершинам, добавление копии вершины. Это позволяет установить гипотезу(обобщённую, а следовательно и исходную) для весьма широкого класса графов, включающего, например, все дистанционно наследственные графы — но далеко не только их.

Отмечу, что Коснтантин работал совершенно самостоятельно, моя роль состояла в постановке вопросов и направлении исследований.

Считаю, что в работе получены содержательные результаты в актуальной области, что позволяет оценить её на “отлично”.

научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор факультета математики и компьютерных наук
Санкт-Петербургского государственного университета
Ф. В. Петров
Петр