Санкт-Петербургский Государственный Университет

Челпанов Константин Вячеславович

Выпускная квалификационная работа

Об остовных деревьях в двудольном графе

Уровень образования: магистратура
Направление: 01.04.01 "Математика"
Основная образовательная программа: ВМ.5832.2021 "Современная математика"

Научный руководитель:
профессор факультета математики и компьютерных наук СПбГУ,
старший научный сотрудник ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН,
доктор физико-математических наук
Петров Фёдор Владимирович

Рецензент:
старший научный сотрудник ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН,
доктор физико-математических наук
Карпов Дмитрий Валерьевич

Санкт-Петербург
2023 год

Аннотация

В данной работе исследуется гипотеза Эренборга и её различные варианты (сильный – со сравнением коэффициентов, полусильный – с домножением на неотрицательный полином так, чтобы выполнялось покоэффициентное неравенство, числовой – с подстановкой неотрицательных значений переменных). Доказывается, что она верна в классе дистанционно-наследственных графов, причём эта оценка является точной и равенство достигается на графах Феррера-Юнга. Также рассматриваются графы, для которых неверен сильный вариант гипотезы, но выполняются другие варианты (сравнение в неотрицательных точках, покоэффициентное сравнение после домножения на полином). Проверяется, что склеивание графов по ребру сохраняет выполнимость "полусильного"и числового неравенства.

Ключевые слова: остовное дерево, гипотеза Эренборга, полиномиальный метод

Содержание

1 Введение

Оценка количества остовных деревьев графа является одним из главных вопросов алгебраической теории графов. Его исследования берут начало в XIX веке, когда Г. Кирхгоф, изучая электрические цепи, получил формулу для количества остовных деревьев в терминах матричных элементов [1]. В том же веке А. Кэли были получены формулы остовных деревьев в полном и полном двудольном графе [2] (на самом деле числовая формула была получена Борхардтом, однако Кэли обобщил это равенство, доказав его для полиномиального перечислителя остовных деревьев). Также в XX веке Т. Остином [3] были получены формулы для полных многодольных графов.

Наиболее интересным вопросом является гипотеза, сформулированная Эренборгом [4] в 2004 году:

Гипотеза. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф, тогда верно следующее неравенство:

$$\tau(G) \leqslant \frac{\prod\limits_{v \in V(G)} d_G(v)}{|V_1| \cdot |V_2|}$$

Равенство доказано равенство для случая, когда G — граф, построенный по диаграмме Юнга. В дальнейшем были получены альтернативные доказательства этого утверждения, как, например, линейно-алгебраическое [5] или по индукции с вычислением определителя [6].

В 2012 году схожая оценка была доказана Бозкуртом [7]: если граф G двудолен, то справедлива оценка

$$\tau(G) \leqslant \frac{\prod\limits_{v \in V(G)} d_G(v)}{e(G)},$$

причём равенство достигается в том и только том случае, когда граф является полным двудольным.

2 Постановка задачи

В работе предлагается исследовать полиномиальный вариант гипотезы Эренборга:

Гипотеза. Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф, $x_{[1..m]}$ — переменные, соответствующие вершинам доли V_1, $y_{[1..n]}$ — соответствующие вершинам доли V_2. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\tau_{pol}(G) \cdot \left(\sum_i x_i\right) \cdot \left(\sum_j y_j\right) \leqslant \prod_i \left(\sum_{y_k \in N_G(x_i)} y_k\right) \cdot \prod_j \left(\sum_{x_l \in N_G(y_j)} x_l\right)$$

Под неравенством подразуемваются следующие варианты:

- „сильное“: для любого монома коэффициент в левой части не превосходит коэффициента в правой части;
- „полусильное“: существует многочлен с неотрицательными коэффициентами такой, что при домножении обеих частей неравенства на него будет выполняться сильное неравенство;
- „числовое“: неравенство верно при подстановкелюбых неотрицательных чисел вместо каждой переменной.

Мы изучим это неравенство для класса *дистанционно-наследственных графов*, а также проверим её точность на графах Феррера-Юнга. Также мы найдём семейство графов, для которых сильное неравенство не выполняется, но при этом выполняются другие два.

3 Основные определения и обозначения

Определение. *Графом* G будем называть пару (V, E), где V — множество элементов, называемых *вершинами*, а E — множество неупорядоченных пар элементов V, называемых *рёбрами*.

Количество вершин G будем обозначать $v(G)$, а количество рёбер — $e(G)$.

Окрестностью вершины $v \in V(G)$ будем называть множество смежных с v вершин, а обозначать будем $N_G(v)$.

Степенью вершины $v \in V(G)$ будем называть количество инцидентных ей рёбер и будем обозначать $\deg_G(v)$ или $d_G(v)$ (будем опускать индекс графа, если понятно, о каком графе идёт речь).

Определение. Пусть G — граф, $a_1, \ldots, a_n$ — последовательность вершин такая, что для любого $i \in [1..n-1]$ любые две вершины a_i и a_{i+1} соединены ребром e_i. Будем называть её *маршрутом*.

Если маршрут не проходит ни по какому ребру дважды, то такой маршрут будем называть *путём*. Если при этом путь не проходит никакую вершину дважды, то будем называть его *простым*. Вершины a_1 и a_n будем называть *концами путей*, остальные вершины пути будем называть *внутренними*.

Длина пути — количество его рёбер.

Циклом будем называть последовательность вершин $a_1, \ldots, a_n$ и различных рёбер $e_i = a_i a_{i+1}$ (считаем, что $a_{n+1} = a_1$) для любого $i \in [1..n]$. Если все вершины a_i попарно различны, то такой цикл называется *простым*.

Длина цикла — количество его рёбер. Обозначим за C_n простой цикл на n вершинах.

Определение. Граф H является *подграфом* графа G, если $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$. Если все рёбра G между вершинами H содержатся в $E(H)$, то H называется *индуцированным подграфом* G.

Индуцированным циклом графа G будем называть индуцированный подграф, который содержит простой цикл по всем его вершинам и не содержит диагоналей.

Аналогичным образом определяется *индуцированный путь*.

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два множества, внутри которых нет рёбер. Такие множества называются *долями*.

Если любые две вершины из разных долей соединены ребром, то такой граф будем называть *полным двудольным* и обозначать $K_{m,n}$, где m, n — размеры долей.

Предложение 1. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нём нет нечётных циклов.*

Определение. *Деревом* будем называть связный граф (т.е. из любой вершины можно добраться до любой другой по рёбрам графа) без циклов. *Остовным деревом графа* G будем называть дерево, содержащее все вершины G.

Множество остовных деревьев будем обозначать $\mathrm{ST}(G)$, их количество — $\tau(G)$.

Энумератором остовных деревьев $\tau_{\mathrm{pol}}(G; x_1, \ldots, x_n)$ графа G с набором вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ будем называть следующий полином:

$$\tau_{pol}(G; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{T \in \mathrm{ST}(G)} \prod_i x_i^{d_T(v_i)-1},$$

где x_i — переменные, соответствующие вершинам v_i.

Замечание. Нетрудно видеть, что $\tau_{pol}(G; 1, \ldots, 1) = \tau(G)$.

Определение. Пусть $P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ — многочлен от n переменных с целыми коэффициентами. Будем называть его *неотрицательным*, если все его коэффициенты неотрицательны. Множество таких многочленов будем обозначать $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}[x_1, \ldots, x_n]$

На $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}[x_1, \ldots, x_n]$ заведём отношение частичного порядка: $P \succ Q$, если существует такой полином $R \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}[x_1, \ldots, x_n]$, что $(P - Q)R \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}[x_1, \ldots, x_n]$.

Также заведём частичный порядок $\gg$: $P \gg Q$, если $P - Q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}[x_1, \ldots, x_n]$.

И ещё один порядок: $P \geqslant Q$, если неравенство выполняется при подстановке любых неотрицательных переменных.

Замечание. Нетрудно видеть, что частичный порядок $\succ$ выдерживает сокращение на неотрицательные многочлены (что нельзя сказать про $\gg$), а также уважает подстановку неотрицательных многочленов вместо соответствующих переменных.

Определение. Пусть G — граф, $x, y \in V(G)$. *Расстоянием* $d_G(x, y)$ между вершинами x и y в графе G будем называть длину кратчайшего пути между ними.

Определение. Назовём граф *дистанционно-наследственным*, если в любом индуцированном связном подграфе расстояние между любыми двумя его вершинами совпадает с расстоянием между ними в исходном графе. Класс таких графов обозначим DH (distance-hereditary).

Нам понадобится следующая характеристика графов из этого класса:

Лемма 3.1. *[8] Все графы класса* DH *получаются следующими операциями:*

- $K_2 \in \mathrm{DH}$*;*
- *операция размножения: пусть* $G \in \mathrm{DH}$*,* $a \in V(G)$ *и* a' *— новая вершина. Определим граф* G' *следующим образом:* $V(G') = V(G) \cup \{a'\}$*,* $E(G') = E(G) \cup \bigcup\limits_{v \in N_G(a)} \{a'v\}$*. Тогда* $G' \in \mathrm{DH}$*;*
- *операция склеивания по вершине: пусть* $G_1, G_2 \in \mathrm{DH}$ *и* $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$*. Определим граф* G*:* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$*,* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$*. Тогда* $G \in \mathrm{DH}$.

Замечание. Очевидно, что все графы, полученные таким образом, являются двудольными. На самом деле в оригинальном определении есть операция размножения с соединением копий размноженных вершин, однако после неё граф теряет двудольность.

Пример. Все деревья принадлежат DH.

Все полные двудольные графы $K_{m,n}$ принадлежат DH. Действительно, все вершины одной из долей имеют одинаковый набор соседей, поэтому достаточно произвести последовательные размножения.

Все двудольные графы, в одной из долей которых не больше двух вершин, принадлежат классу DH. Действительно, пусть в доле A не больше двух вершин (обозначим их x и y). Тогда если убрать все висячие вершины из доли B, то получится полный двудольный граф на долях A и $N_G(x) \cap N_G(y)$.

Больше характеристик дистанционно-наследственных графов можно найти, например, в [8] и [9].

Определение. Назовём *разбиением* числа n представление вида $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, где $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k > 0$.

Диаграммой Юнга, соответствующей разбиению λ, будем называть фигуру, состоящую из квадратиков и выровненную по верхнему и левому краям такую, что количество клеток в i-ой строке равно λ_i.

Определим по диаграмме Юнга λ соответствующий *граф Феррера-Юнга*: это полный двудольный граф, в котором вершины одной доли будут соответствовать строкам, а другой — столбцам, а ребро проводится, если и только если соответствующие строка и столбец имеют общую клетку.

Например, если все слагаемые λ одинаковы, то графом Юнга в этом случае будет являться полный двудольный граф.

4 Изучение гипотезы Эренборга (и её обобщённого варианта)

4.1 Случай дистанционно-наследственного графа

Мы изучим гипотезу Эренборга для дистанционно-наследственных графов. Мы докажем, что она верна для этого класса в „полусильной“ форме.

Очевидно, что для этого достаточно доказать, что неравенство остаётся верным после каждой операции, заложенной в определении класса DH.

Сначала проверим, что операция склеивания уважает данное неравенство.

Пусть даны два двудольных графа $G_1 = (A_1, B_1, E_1)$ и $G_2 = (A_2, B_2, E_2)$, принадлежащие классу DH, причём $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $B_1 \cap B_2 = \{b^*\}$, $A_1 = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $A_2 = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$, $B_1 \backslash \{b^*\} = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $B_2 \backslash \{b^*\} = \{b'_1, \ldots, b'_l\}$; $G = (A, B, E)$ — граф, полученный склеиванием G_1 и G_2 (т.е. $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, $E = E_1 \cup E_2$).

Посмотрим, чему равен перечислитель остовных деревьев после склеивании по вершине.

Утверждение 1. *Если P — энумератор остовных деревьев для графа G_1, Q — для G_2, то энумератор для G равен $b^* \cdot P \cdot Q$.*

Доказательство. Действительно, b^* является в графе G точкой сочленения (т.е. при удалении b^* G теряет связность), поэтому любое остовное дерево G получается склеиванием остовных деревьев G_1 и G_2. Домножение на b^* происходит оттого, что в произведении мономов, соответствующим деревьям в G_1 и G_2, b^* имеет степень $d_{T_1}(b^*) - 1 + d_{T_2}(b^*) - 1 = d_T(b^*) - 2$, а в энумераторе T степень на 1 больше. □

Введём следующие обозначения:

$$R_{A_1} = \prod_{a_i} \left(\sum_{b_j \in N_{G_1}(a_i)} b_j \right); R_{B_1} = \prod_{b_i} \left(\sum_{a_j \in N_{G_1}(b_i)} a_j \right);$$
$$R_{A_2} = \prod_{a'_i} \left(\sum_{b'_j \in N_{G_2}(a'_i)} b'_j \right); R_{B_2} = \prod_{b'_i} \left(\sum_{a'_j \in N_{G_1}(b'_i)} a'_j \right);$$

Запишем неравенства из индукционного предположения:

$$P \cdot (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (b^* + b_1 + \ldots + b_k) \prec R_{A_1} \cdot R_{B_1} \cdot \left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i \right)$$
$$Q \cdot (a'_1 + \ldots + a'_n) \cdot (b^* + b'_1 + \ldots + b'_l) \prec R_{A_2} \cdot R_{B_2} \cdot \left(\sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i \right)$$

Неравенство для всего графа G будет выглядеть следующим образом:

$$b^* \cdot P \cdot Q \cdot (a_1 + \ldots + a_m + a'_1 + \ldots + a'_n) \cdot (b^* + b_1 + \ldots + b_k + b'_1 + \ldots + b'_l) \prec$$
$$\prec R_{A_1} \cdot R_{B_1} \cdot R_{A_2} \cdot R_{B_2} \cdot \left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i + \sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i \right)$$

Если подставить в левую часть неравенства для P и Q и сократить обе части на $R_{A_1} \cdot R_{B_1} \cdot R_{A_2} \cdot R_{B_2}$, то получится, что достаточно доказать следующее неравенство:

$$b^* \cdot \left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i\right) \cdot \left(\sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i\right) \cdot (a_1 + \ldots + a_m + a'_1 + \ldots + a'_n) \cdot (b^* + b_1 + \ldots + b_k + b'_1 + \ldots + b'_l) \ll$$

$$\ll (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (b^* + b_1 + \ldots + b_k) \cdot (a'_1 + \ldots + a'_n) \cdot (b^* + b'_1 + \ldots + b'_l) \cdot \left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i + \sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i\right)$$

В левой части степень при b^* в каждом мономе равна 1 или 2, в правой — 0, 1 или 2. Достаточно сравнить полиномы при каждой фиксированной степени b^*.

Случаи:

1. $\deg(b^*) = 0$

   Очевидно. Полином слева кратен b^* и, соответственно, не может иметь мономов, свободных от этой переменной.

2. $\deg(b^*) = 1$

   Тогда нужно проверить следующее неравенство:

$$\left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i\right) \cdot \left(\sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i\right) \cdot (a_1 + \ldots + a_m + a'_1 + \ldots + a'_n) \cdot (b_1 + \ldots + b_k + b'_1 + \ldots + b'_l) \ll$$

$$\ll (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (a'_1 + \ldots + a'_n) \cdot \left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i + \sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i\right) \cdot (b_1 + \ldots + b_k + b'_1 + \ldots + b'_l)$$

   Сократим обе части на $(b_1 + \ldots + b_k + b'_1 + \ldots + b'_l)$:

$$\left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i\right) \cdot \left(\sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i\right) \cdot (a_1 + \ldots + a_m + a'_1 + \ldots + a'_n) \ll$$

$$\ll (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (a'_1 + \ldots + a'_n) \cdot \left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i + \sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i\right)$$

   В левой части каждый моном имеет коэффициент 1 или 2.

   Рассмотрим мономы первого вида: они имеют вид $a_p^2 a'_q$, $a_p a'^2_q$, $a_p a_q a'_r$ (если $a_p \in N_{G_1}(b^*)$, $a_q \notin N_{G_1}(b^*)$, $a'_r \in N_{G_2}(b^*)$) и $a'_p a'_q a_r$ (если $a'_p \in N_{G_2}(b^*)$, $a'_q \notin N_{G_2}(b^*)$, $a_r \in N_{G_1}(b^*)$). Для первых двух мономов очевидно, поэтому докажем для других двух.

   Пусть есть моном $a_p a_q a'_r$, при этом $a_p \in N_{G_1}(b^*)$, $a_q \notin N_{G_1}(b^*)$, $a'_r \in N_{G_2}(b^*)$. Посмотрим, как он получается в правой части: в первой скобке возьмём переменную a_p, во второй a'_r, в третьей a_q.

   Теперь по мономам второго вида. Они имеют вид $a_p a_q a'_r$ (где $a_p, a_q \in N_{G_1}(b^*)$) и $a'_p a'_q a_r$ (где $a'_p, a'_q \in N_{G_2}(b^*)$). НУО, рассмотрим первый моном. В правой части нужно взять два монома. Во второй скобке правой части возьмём a'_r, в первой — a_p, в третьей a_q (для второго монома поменяем местами эти переменные).

3. $\deg(b^*) = 2$

   Нужно проверить следующее неравенство:

$$\left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i\right) \cdot \left(\sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i\right) \cdot (a_1 + \ldots + a_m + a'_1 + \ldots + a'_n) \ll$$
$$\ll (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (a'_1 + \ldots + a'_n) \cdot \left(\sum_{a_i \in N_{G_1}(b^*)} a_i + \sum_{a'_i \in N_{G_2}(b^*)} a'_i\right)$$

   Далее — см. случай степени 1.

Таким образом, случай склеивания проверен.

Далее проверяем случай размножения вершины. Тут будем использовать результат, доказанный Петровым, Прозоровым и Черкашиным [10]:

Теорема 4.1. *Пусть $G = (A, B, E)$ — двудольный граф, $A = \{a_1, \ldots, a_m\}, B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, G' — граф, полученный из G добавлением вершины a'_1 — копии вершины a_1 (т.е. $N_{G'}(a'_1) = N_G(a_1)$). Тогда верна следующая формула для перечислителя остовных деревьев G':*

$$\tau_{\mathrm{pol}}(G'; a_1, a'_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = \tau_{\mathrm{pol}}(G; a_1 + a'_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \cdot \left(\sum_{b_j \in N_G(a_1)} b_j\right)$$

Проверим, что размножение вершины уважает „сильное“ неравенство. Действительно, запишем его для графа G:

$$\tau_{\mathrm{pol}}(G; a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \cdot (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (b_1 + \ldots + b_n) \ll \prod_{a_i} \left(\sum_{b_j \in N_G(a_i)} b_j\right) \prod_{b_i} \left(\sum_{a_j \in N_G(b_i)} a_j\right)$$

Если вместо одной из переменных подставить многочлен с неотрицательными коэффициентами (в данном случае $a_1 + a'_1$), то неравенство останется верным:

$$\mathrm{ST}_{\mathrm{pol}}(G; a_1 + a'_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \cdot (a'_1 + a_1 + \ldots + a_m) \cdot (b_1 + \ldots + b_n) \ll$$
$$\ll \prod_{a_i} \left(\sum_{b_j \in N_G(a_i)} b_j\right) \prod_{b_i : b_i a_1 \in E(G)} \left(\sum_{a_j \in N_G(b_i)} a_j + a'_1\right) \prod_{b_i : b_i a_1 \notin E(G)} \left(\sum_{a_j \in N_G(b_i)} a_j\right)$$

Домножая обе части на $\left(\sum\limits_{b_i \in N_G(a_1)} b_i\right) = \left(\sum\limits_{b_i \in N_{G'}(a'_1)} b_i\right)$, получим требуемое.

Аналогичным образом получается, что отношения $\prec$ и $\leqslant$ также сохраняются при размножении.

Мы получили, что неравенство уважает обе операции, следовательно, оно выполнено для всех графов из класса DH.

Таким образом, получаем следующий вывод:

- операция размножения уважает все виды неравенств: „сильное“, „полусильное“, „числовое“;

- операция склеивания по вершине уважает „полусильное“ и „числовое“ неравенства.

4.1.1 Точность оценки

Проверим теперь, что оценка точна.

Нетрудно видеть, что операция размножения уважает покоэффициентное равенство. Теперь нужно проверить, когда операция склеивания сохраняет равенство. А именно, нужно проверить, когда верно равенство

$$\left(\sum_{a_i\in N_{G_1}(b^*)} a_i\right)\cdot\left(\sum_{a_i'\in N_{G_2}(b^*)} a_i'\right)\cdot(a_1+\ldots+a_m+a_1'+\ldots+a_n') =$$
$$=(a_1+\ldots+a_m)\cdot(a_1'+\ldots+a_n')\cdot\left(\sum_{a_i\in N_{G_1}(b^*)} a_i+\sum_{a_i'\in N_{G_2}(b^*)} a_i'\right)$$

Пусть b^* имеет p соседей в G_1 и q соседей в G_2. Тогда $p\leqslant m, q\leqslant n$. Если подставить единицу вместо всех переменных, задействованных в равенстве, получим следующее: $pq(m+n)=mn(p+q)$, т.е. $mp(q-n)=qn(m-p)$. Левая часть неположительна, правая неотрицательна, значит они обе равны нулю, т.е. $q=n, p=m$, откуда следует, что вершина b^* соединена со всеми вершинами противоположной доли.

Кроме того, если рассмотреть неравенство, которое изначально планировалось доказать, то мы получаем, что в правой части не должно быть мономов, свободных от b^*. Это значит, что один из графов, задействованных в операции склеивания, содержит в доле B ровно одну вершину b^*. Таким образом, равенство сохраняется, если и только если к графу была приклеена „клешня“ $K_{1,n}$, причём приклеена она к той вершине, которая соединена со всеми остальными из противоположной доли.

Проверим, что графы, полученные размножениями и приклеиваниями клешней, это в точности все графы на диаграммах Юнга. Действительно, размножение — это добавление строчки/столбца того же размера, а приклеивание клешни — это добавление нескольких клеток в конец строчки/столбца. Очевидно, что такими операциями можно получить любую диаграмму Юнга (и только её).

Итого, доказан следующий результат:

Теорема 4.2. *Пусть G — дистанционно-наследственный граф. Тогда для него выполнено неравенство Эренборга, причём равенство достигается в том и только том случае, когда G — граф, построенный по диаграмме Юнга.*

Если $G=(A,B,E)$ — граф Юнга, $A=\{x_{[1..m]}\}$, $B=\{y_{[1..n]}\}$, причём x_1 соединена со всеми вершинами B, а y_1 — со всеми вершинами A, то справедлива следующая формула:

$$\tau_{\mathrm{pol}}(G)=\prod_{v\neq x_1,y_1}\left(\sum_{w\in N_G(v)} w\right)$$

Следствие. В частности, если граф не содержит индуцированного пути длины 3, то он получается из K_2 последовательностью размножений и, следовательно, удовлетворяет обобщённому Эренборгу (в частности, имеет место равенство). [9]

4.2 Случай, когда граф не дистанционно-наследственный

Рассмотрим граф C_{2n} и представим его в виде двудольного графа (A,B,E), где $A=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $B=\{y_1,\ldots,y_n\}$, $E=\bigcup_{i\in[1..n]}(\{x_iy_i\}\cup\{y_ix_{i+1}\})$. Тогда нетрудно видеть, что перечислитель остовных деревьев такого графа равен следующему:

$$\tau_{\mathrm{pol}}(G)=x_1\cdot\ldots\cdot x_n\cdot y_1\cdot\ldots\cdot y_n\cdot\left(\sum_{x_ky_l\in E}\frac{1}{x_ky_l}\right)$$

Тогда если сосчитать коэффициент при $x_1 \cdot \ldots x_n \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$ в левой части неравенства из гипотезы, то он будет равен $2n$ (потому что заполнить пропущенные одночлены у фиксированного монома степени $2n-2$ можно единственным образом). С другой стороны, посмотрим на правую часть. Она равна $\prod\limits_{i \in [1..n]} ((x_i + x_{i+1}) \cdot (y_i + y_{i+1}))$. Посмотрим, как этот моном получается. Предположим, что из скобки $(x_1 + x_2)$ была взята переменная x_2. Тогда из следующей скобки $(x_2 + x_3)$ должен быть взята переменная x_3, и т.д. Случай, когда была взята переменная x_1, разбирается аналогично. Таким образом, в части многочлена, содержащей x_i, коэффициент при $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ равен 2, аналогично для y_i. В итоге коэффициент равен 4, что при $n \geqslant 3$ меньше, чем $2n$.

Очевидно, что цикл не является дистационно-наследственным: в самом деле, если бы он был таким, то рассмотрим последнюю операцию в цепочке получения из K_2. Она не может быть склеиванием, т.к. цикл двусвязен, и не может быть размножением, т.к. в этом случае должны быть две вершины с одинаковым набором соседей, что не так.

Таким образом, получается, что обобщённая гипотеза Эренборга, когда любой коэффициент левой части не больше соответствующего коэффициента правого, оказывается неверной.

Теперь возьмём граф „домино" — это C_6 с одной главной диагональю, т.е. $E(G) = E(C_6) \cup \{x_1 y_2\}$. Такой граф также не является дистанционно-наследственным в силу отсутствия пары вершин с одинаковым набором соседей.

Перечислитель такого графа будет выглядеть следующим образом:

$$\tau_{\mathrm{pol}}(G) = y_2x_3(x_1+x_2)(y_1+y_2)+x_1y_3(x_1+x_2)(y_1+y_2)+x_1y_2(x_1+x_2)(y_1+y_2)+x_3y_3(x_1y_2+x_2y_2+x_1y_1)$$

В левой и правой части неравенства будут произведения $(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$, поэтому после сокращения на них достаточно сравнить энумератор и произведение $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(y_1+y_2)(y_2+y_3)$. Нетрудно видеть, что их разность равна $x_2x_3y_1y_3$. Поэтому покоэффициентное неравенство остаётся верным при умножении обеих частей на $(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$.

То есть получается, что такой граф удовлетворяет „сильному" неравенству Эренборга.

В частности, любой граф, который получается из доминошки размножениями, удовлетворяет „сильному" неравенству.

5 Полусильный вариант неравенства для других графов

В предыдущем пункте рассматривались графы, для которых „сильная“ гипотеза неверна — это длинные циклы. А что насчёт других типов неравенств?

Пусть $G = x_1y_1x_2y_2 \ldots x_ny_nx_1$ (рёбра в таком порядке). Выпишем, как выглядит неравенство:

$$(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \cdot P(x_{[1..n]}, y_{[1..n]}) \leqslant (x_1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (x_n + x_1) \cdot (y_1 + y_2) \cdot \ldots \cdot (y_n + y_1),$$

где $P(x_{[1..n]}, y_{[1..n]}) = x_1 \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_n \cdot (\frac{1}{x_1y_1} + \frac{1}{y_1x_2} + \ldots + \frac{1}{y_nx_1})$ — энумератор остовных деревьев цикла.

Рассмотрим, какие мономы могут присутствовать в обеих частях. Нетрудно видеть, что в каждом мономе степень каждой переменной не больше 2, причём в мономах из левой части таких переменных может быть не больше 2 (поскольку в энумераторе остовных деревьев цикла каждая переменная имеет степень не более 1).

- мономы $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$

  Моном, в котором все переменные различные, встречается в энумераторе ровно 1 раз. В нём не хватает двух переменных из разных долей. Их можно выбрать ровно одним способом. Итого, коэффициент равен количеству остовных деревьев цикла, т.е. $2n$. В правой части коэффициент равен 4 (см. выше).

- мономы вида $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \cdot \frac{y_k}{y_l}$ $(k \neq l)$ (аналогично $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \frac{x_k}{x_l} \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$), т.е. все переменные одной из долей имеют степень 1, а во второй доле какая-то переменная имеет степень 2 (причём ровно одна)

  Не умаляя общности, пусть $k = 1, l = 2$. Рассмотрим часть, соответствующую переменным из второй доли. В мономе отсутствует переменная y_2, следовательно, в остовном дереве, получившемся из такого монома, вершина y_2 является листом. Таким образом, в дереве отсутствует одно из двух рёбер: x_2y_2 или y_2x_3. В первом случае мы имеем моном $\frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}{x_2y_2}$, который можно дополнить до нужного переменными x_2 и y_1, а во втором $\frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}{y_2x_3}$, который дополняется переменными x_3 и y_1. Таким образом, коэффициент в левой части при таком мономе будет равным 2.

  Посмотрим теперь на правую часть. Как было выяснено ранее, коэффициент при $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ равен 2, теперь смотрим на коэффициент при $y_1^2 \cdot y_3 \cdot \ldots \cdot y_n$. Из множителей $(y_1 + y_2)$ и $(y_n + y_1)$ выбирается переменная y_1. Далее из $(y_2 + y_3)$ выбирается y_3 (потому что y_2 отсутствует), следом из $(y_3 + y_4)$ — y_4, и т.д., в конце из $(y_{n-1} + y_n)$ — y_n. Таким образом, коэффициент при части, соответствующей второй доле, равен 1, а коэффициент при всём мономе равен 2.

- мономы вида $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \frac{x_{k_1}}{x_{l_1}} \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \cdot \frac{y_{k_2}}{y_{l_2}}$ $(k_1 \neq l_1, k_2 \neq l_2)$

  Понятно, что в таком мономе отсутствует ровно одна переменная первой доли и ровно одна второй. Если такой моном присутствует в левой части, то отсутствующие переменные соответствуют висячим вершинам, которых ровно две. Копии переменных, чья степень равна 2, берутся из множителей $(x_1 + \ldots + x_n)$ и $(y_1 + \ldots + y_n)$. Оставшийся множитель берётся из энумератора, причём сделать это можно не более чем единственным образом.

  Рассмотрим случай, когда это сделать невозможно. Это значит, что вершины, соответствующие отсутствующим в мономе переменным, не могут быть смежными. Выбрать пару несмежных вершин из разных долей можно $n^2 - 2n$ способами. Далее нужно выбрать переменные, которые будут иметь степень 2. В каждой доле ровно один лист, поэтому это можно сделать $(n-1) \cdot (n-1) = (n-1)^2$ способами. Итого имеем $(n^2 - 2n)(n-1)^2$ слагаемых, которые не встречаются в левой части.

Обозначим их сумму за S. Нетрудно видеть, что S является однородным многочленом по переменным каждой доли. Следовательно, можно применить неравенство о средних. Произведение слагаемых S будет равно $(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n)^k$, т.е. нужно решить уравнение $2n \cdot k = n(n-2)(n-1)^2 \cdot 2n$, т.е. $k = n(n-2)(n-1)^2$. Таким образом, по неравенству о средних $S \geqslant n(n-2)(n-1)^2 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$, и в этом случае достаточно доказать, что $n(n-2)(n-1)^2 \geqslant 2n-4$. При $n \geqslant 2$ это неравенство верно.

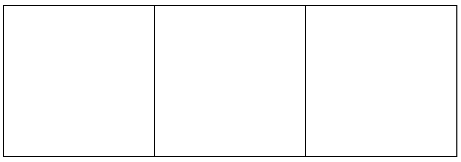
Таким образом, получено, что хоть и обобщённый полиномиальный Эренборг не верен, зато верен Эренборг в неотрицательных точках. Тем самым, к циклу можно применять операции склеивания и размножения и получать граф, который будет удовлетворять числовому неравенству.

Теперь покажем, что верно „полусильное“ неравенство: а именно, будем использовать, что $P^2 + Q^2 \succ (2-\varepsilon)PQ$ для любого $\varepsilon > 0$ (это значит, что можно домножить обе части на неотрицательный многочлен так, что будет верно покоэффициентное неравенство, следствие из [11]). Среди мономов вида $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \frac{x_{k_1}}{x_{l_1}} \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \cdot \frac{y_{k_2}}{y_{l_2}}$ будем рассматривать те, в которых $x_{k_1}y_{k_2}, x_{l_1}y_{l_2} \notin E(G)$. Первую пару можно выбрать $n(n-2)$ способами, посмотрим теперь на вторую. Индекс l_1 можно выбрать $(n-1)$ способами, а l_2 — хотя бы $n-3$ способами, потому что максимум два запрета (смежные вершины). Итого, таких слагаемых хотя бы $n(n-1)(n-2)(n-3)$, и их сумму можно сделать хотя бы $(n(n-1)(n-2)(n-3)-\varepsilon)x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$. При $n \geqslant 4$ неравенство $n(n-1)(n-2)(n-3) \geqslant 2n-4$ выполняется, осталось понять, что происходит при $n = 3$ (при $n = 2$ равенство покоэффициентное). Выделим в правой части слагаемые $x_1^2x_2y_2^2y_3$, $x_2^2x_3y_3^2y_1$ и $x_3^2x_1y_1^2y_2$. Их сумма хотя бы $(3-\varepsilon)x_1x_2x_3y_1y_2y_3$ (относительно порядка $\succ$), что больше, чем 2.

В итоге получается, что все графы, полученные из любого чётного цикла склеиваниями и размножениями, удовлетворяют „полусильному“ и числовому неравенству.

Рассмотрим теперь граф-„лесенку“: последовательность графов G_i строится следующим образом:

- $G_0 = K_2, G_1 = C_4$;
- G_{n+1} получается из G_n соединением смежных вершин степени 2 путём длины 3.



Вершины G_n занумеруем естественным образом: $V(G) = \{x_{[1..n+1]}, y_{[1..n+1]}\}$.

Посчитаем, чему равно $t_n = \tau(G_n)$. Пусть T — какое-то остовное дерево G_n. Разберём несколько случаев:

- $d_T(x_{n+1}) = d_T(y_{n+1}) = 1$

  Вершины x_{n+1} и y_{n+1} являются листьями в T, и их удаление даёт остовное дерево G_{n-1}. Получаем вклад t_{n-1}.

- $d_T(x_{n+1}) = 2$, $d_T(y_{n+1}) = 1$

  Удаление листа y_{n+1} делает x_{n+1} листом, в свою очередь, удаление x_{n+1} даёт остовное дерево G_{n-1}. Снова получаем вклад t_{n-1}.

- $d_T(x_{n+1}) = 1$, $d_T(y_{n+1}) = 2$

  Аналогично предыдущему случаю, вклад равен t_{n-1}.

- $d_T(x_{n+1}) = d_T(y_{n+1}) = 2$

  Получаем, что в дереве отсутствует ребро $x_n y_n$, иначе получился бы цикл $x_n y_n x_{n+1} y_{n+1}$. Заменим путь $x_n y_{n+1} x_{n+1} y_n$ на ребро $x_n y_n$ и получим остовное дерево G_{n-1}, содержащее ребро $x_n y_n$. Надо посчитать количество таких деревьев. Оно равно разности количества всех остовных деревьев G_{n-1} (которое равно t_{n-1}) и тех, что не содержат $x_n y_n$ (их количество равно t_{n-2}), что даёт вклад $t_{n-1} - t_{n-2}$.

Таким образом, получаем следующую рекурренту: $t_n = 4t_{n-1} - t_{n-2}$, начальные данные $t_0 = 1$, $t_1 = 4$.

Как такие рекурренты решать? Для этого нужно найти характеристический многочлен рекурренты. Он будет равен $t^2 - 4t + 1$. Его корни равны $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Общее решение уравнения будет иметь вид $t_n = A(2-\sqrt{3})^n + B(2+\sqrt{3})^n$. Наконец, осталось найти коэффициенты в соответствии с начальными данными. Имеем следующую систему:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A(2-\sqrt{3}) + B(2+\sqrt{3}) = 4 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$, $B = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$. Таким образом, имеем решение: $t_n = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Как будет выглядеть числовая гипотеза Эренборга для такого графа? Если $A = \{x_{[1..n+1]}\}$, $B = \{y_{[1..n+1]}\}$ то имеем следующее неравенство:

$$\left(\sum_{T \in \mathrm{ST}(G_n)} \prod_{k \in [1..n]} x_k^{d_T(x_k)-1} y_k^{d_T(y_k)-1}\right) \cdot \left(\sum_{k \in [1..n+1]} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k \in [1..n+1]} y_k\right) \leqslant \prod_{k \in [1..n+1]} \left(\sum_{x_l \in N_G(y_k)} x_l\right) \left(\sum_{y_l \in N_G(x_k)} y_l\right.$$

Произведение в правой части будет равно $(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1}+x_n+x_{n+1})(x_n+x_{n+1})(y_1+y_2)(y_1+y_2+y_3) \cdot \ldots \cdot (y_{n-1}+y_n+y_{n+1})(y_n+y_{n+1})$.

Будем доказывать неравенство индукцией по n.

База $n = 1, 2$ выполнена.

Переход: пусть неравенство доказано для G_k с $k \leqslant n-1$, доказываем для $k = n$.

Рассмотрим остовное дерево T графа G_n. Рассмотрим, какие в нём могут быть степени вершин x_{n+1} и y_{n+1}:

- $d_T(x_{n+1}) = d_T(y_{n+1}) = 1$

  Тогда $T \setminus (x_{n+1}, y_{n+1})$ является остовным деревом G_{n-1}, и такие деревья дают вклад $x_n y_n \tau_{\text{pol}}(G_{n-1})$.

- $d_T(x_{n+1}) = 2, d_T(y_{n+1}) = 1$

  Как и в предыдущем случае, $T \setminus (x_{n+1}, y_{n+1})$ является остовным деревом G_{n-1}, и такие деревья дают вклад $y_n x_{n+1} \tau_{\text{pol}}(G_{n-1})$.

- $d_T(x_{n+1}) = 1, d_T(y_{n+1}) = 2$

  Аналогично предыдущему случаю, такие деревья дают вклад $x_n y_{n+1} \tau_{\text{pol}}(G_{n-1})$.

- $d_T(x_{n+1}) = d_T(y_{n+1}) = 2$

  Тогда T содержит путь $x_n y_{n+1} x_{n+1} y_n$ длины 3 и не содержит ребро $x_n y_n$. Если заменить путь на ребро, то получится остовное дерево G_{n-1}, содержащее ребро $x_n y_n$. В итоге вклад от таких деревьев будет не больше, чем $x_{n+1} y_{n+1} \tau_{\text{pol}}(G_{n-1})$.

Итого, имеем следующее неравенство:

$$\tau_{pol}(G_n) \leqslant \tau_{pol}(G_{n-1}) \cdot (x_n y_n + x_n y_{n+1} + y_n x_{n+1} + x_{n+1} y_{n+1}) = (x_n + x_{n+1})(y_n + y_{n+1}) \tau_{pol}(G_{n-1})$$

Используя индукционное предположение, запишем следующее:

$$\begin{aligned}
&\tau_{pol}(G_n)(x_1 + \ldots + x_{n+1})(y_1 + \ldots + y_{n+1}) \leqslant \tau_{pol}(G_{n-1})(x_n + x_{n+1})(y_n + y_{n+1}) \cdot \\
&\cdot (x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1})(y_1 + \ldots + y_n + y_{n+1}) \leqslant \\
&\leqslant \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3) \ldots (x_{n-2} + x_{n-1} + x_n)(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_{n+1})(x_1 + \ldots + x_{n+1})}{(x_1 + \ldots + x_n)} \cdot \\
&\cdot \frac{(y_1 + y_2)(y_1 + y_2 + y_3) \ldots (y_{n-2} + y_{n-1} + y_n)(y_{n-1} + y_n)(y_n + y_{n+1})(y_1 + \ldots + y_{n+1})}{(y_1 + \ldots + y_n)}
\end{aligned}$$

Достаточно доказать, что первый множитель не превосходит $(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} + x_n + x_{n+1})(x_n + x_{n+1})$, что после сокращения и домножения на знаменатель равносильно неравенству $(x_{n-1} + x_n)(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}) \leqslant (x_1 + \ldots + x_n)(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$. В обеих частях стоит сумма двух множителей с одинаковой суммой, и поскольку множитель $x_1 + \ldots + x_{n+1}$ не меньше трёх остальных, то получаем, что неравенство верно (при сдвиге двух чисел с фиксированной суммой произведение увеличивается).

Таким образом, получено, что числовой Эренборг выполняется для лесенки. Следовательно, для графов, которые получаются из него размножениями, тоже.

Таким образом, можно сформулировать следующее, более общее утверждение:

Утверждение 2. *Пусть G — двудольный граф, удовлетворяющий числовой гипотезе Эренборга, $xy \in E(G)$, G' — граф, полученный из G добавлением пути $xy_1x_1 \dots y_nx_ny$ (где $x_{[1..n]}, y_{[1..n]}$ — новые вершины). Тогда G' также удовлетворяет числовой гипотезе Эренборга.*

Доказательство. Запишем, как выглядит неравенство для исходного графа G:

$$\tau_{pol}(G) \cdot (x + A) \cdot (y + B) \leqslant R \cdot K \cdot L,$$

где K — сумма переменных, соответствующих соседям x в G, L — сумма переменных, соответствующих соседям y в G, A — сумма переменных, соответствующих вершинам доли G, в которой содержится x, кроме x, а B — сумма переменных, соответствующих вершинам доли G, в которой содержится y, кроме y. R — произведение по всем остальным вершинам G сумм переменных, соответствующих соседям этих вершин в G. Как будет выглядеть неравенство для G'?

$$\tau_{pol}(G) \cdot (x + x_1 + \ldots + x_n + A) \cdot (y + y_1 + \ldots + y_n + B) \leqslant R \cdot (K + y_1) \cdot (L + x_n) \cdot \\ \cdot (x + x_1)(x_1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} + x_n) \cdot (y_1 + y_2)(y_2 + y_3) \cdot \ldots \cdot (y_n + y),$$

Подставляя неравенство для $\tau_{pol}(G)$ и сокращая на R, получаем, что достаточно доказать следующее:

$$K \cdot L \cdot x_1 \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_n \cdot x \cdot y \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xy_1} + \ldots + \frac{1}{x_ny} \right) \cdot (x + x_1 + \ldots + x_n + A)(y + y_1 + \ldots + y_n + B) \\ \leqslant (K + y_1)(L + x_n)(x + x_1) \ldots (x_{n-1} + x_n) \cdot (y_1 + y_2) \ldots (y_n + y)(x + A)(y + B),$$

Применяя оценку для цикла, получаем следующее:

$$x_1 \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot y_n \cdot x \cdot y \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xy_1} + \ldots + \frac{1}{x_ny} \right) \leqslant \frac{(x + x_1) \ldots (x_n + x)(y + y_1) \ldots (y_n + y)}{(x + x_1 + \ldots + x_n)(y + y_1 + \ldots + y_n)}$$

Подставляя её в предыдущее неравенство и сокращая на $(x+x_1) \ldots (x_{n-1}+x_n)(y_1+y_2) \ldots (y_n+y)$, получаем

$$KL(x_n + x)(y + y_1)(x + x_1 + \ldots + x_n + A)(y + y_1 + \ldots + y_n + B) \leqslant \\ \leqslant (K + y_1)(L + x_n)(x + x_1 + \ldots + x_n)(y + y_1 + \ldots + y_n)(x + A)(y + B)$$

Достаточно доказать неравенство с переменными одной из долей, а именно

$$L(x_n + x)(x + x_1 + \ldots + x_n + A) \leqslant (L + x_n)(x + x_1 + \ldots + x_n)(x + A)$$

Заметим, что $(x_n+x)(x+x_1+\ldots+x_n+A) \leqslant (x_n+x+A)(x+x_1+\ldots+x_n)$, а посему достаточно доказать, что $L(x_n+x+A) \leqslant (L+x_n)(x+A)$. $L(x+A)$ в обеих частях сокращается, остаётся $Lx_n \leqslant x_n(x + A)$. А это верно по определению L и A (т.к. L — все соседи y в G, а $x + A$ — сумма всех вершин первой доли G).

Аналогично доказывается неравенство для вершин из второй доли. □

Теперь попробуем обобщить утверждение. Что если мы приклеиваем не цикл, а какой-то другой граф?

Утверждение 3. *Пусть G_1, G_2 — двудольные графы, удовлетворяющие числовой (полусильной) гипотезе Эренборга, $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x, y\}$, $E(G_1) \cap E(G_2) = \{xy\}$, G — граф, полученный из G_1 и G_2 склеиванием по ребру xy. Тогда он также удовлетворяет числовой (полусильной) гипотезе Эренборга.*

Доказательство. Пусть A_1 — сумма переменных, соответствующим вершинам первой доли G_1, кроме x, B_1 — сумма переменных, соответствующих вершинам второй доли G_1, кроме y. Аналогичным образом определяем A_2 и B_2. За R_1 обозначим произведение по всем вершинам G_1, кроме x и y, сумм соседей этих вершин, за R_2 — произведение по всем вершинам G_2, кроме x и y, сумм соседей этих вершин. За K_1 обозначим сумму всех соседей x в G_1, кроме y, за K_2 — сумму всех соседей y в G_1, кроме x. Аналогичным образом определяем K_2 и L_2.

Запишем, как будут выглядеть неравенства для G_1 и G_2:

$$\tau_{pol}(G_1)(x + A_1)(y + B_1) \prec R_1 \cdot (K_1 + y) \cdot (L_1 + x) \tag{1}$$
$$\tau_{pol}(G_2)(x + A_2)(y + B_2) \prec R_2 \cdot (K_2 + y) \cdot (L_2 + x) \tag{2}$$

Хотим доказать следующее:

$$\tau_{pol}(G)(x + A_1 + A_2)(y + B_1 + B_2) \prec R_1 \cdot R_2 \cdot (K_1 + K_2 + y) \cdot (L_1 + L_2 + x)$$

Пусть $\tau_{pol}(G_1) = P_1+Q_1$, где P_1 — энумератор остовных деревьев, в которых присутствует ребро xy, Q_1 — в которых xy отсутствует. Аналогичным образом определим $\tau_{pol}(G_2) = P_2+Q_2$.

Пусть T — остовное дерево G. Если оно содержит ребро xy, то сужения этого дерева на G_1 и G_2 также являются деревьями. Такие деревья дадут вклад, равный $P_1 \cdot P_2$.

Если же ребра xy в T нет, то сужение на один из графов $G_{1,2}$ является деревом, а на второй — лес из двух деревьев. Пусть сужение T на G_1 является деревом. Тогда такие деревья дают вклад Q_1, в то время как сужение на G_2 даёт вклад P_2 (при добавлении xy получается остовное дерево, содержащее xy), итоговый вклад равен Q_1P_2. Аналогично, если сужение T на G_2 является деревом, то получаем вклад P_1Q_2.

Таким образом, $\tau_{pol}(G) = P_1P_2 + P_1Q_2 + Q_1P_2 \ll (P_1 + Q_1)(P_2 + Q_2) = \tau_{pol}(G_1)\tau_{pol}(G_2)$.

Используя неравенства для $G_{1,2}$, получаем следующее:

$$\tau_{pol}(G) \prec \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot (K_1 + y)(K_2 + y) \cdot (L_1 + x)(L_2 + x)}{(x + A_1)(x + A_2)(y + B_1)(y + B_2)}$$

Сравнивая правую часть полученного неравенства с правой частью того, что нам нужно доказать, и переходя к переменным одной из долей, получаем, что достаточно доказать следующее:

$$(x + L_1)(x + L_2)(x + A_1 + A_2) \ll (x + A_1)(x + A_2)(x + L_1 + L_2)$$

Учитывая, что $A_1 + A_2 \geqslant L_1 + L_2$ по определению, а также то, что при сдвиге с сохранением суммы произведение не уменьшается, имеем следующее:

$$(x + L_1)(x + A_1 + A_2) \leqslant (x + A_1)(x + L_1 + A_2)$$

То есть достаточно доказать

$$(x + L_2)(x + L_1 + A_2) \leqslant (x + A_2)(x + L_1 + L_2)$$

Опять же, это верно, поскольку в обеих частях стоят произведения двух множителей с фиксированной суммой, и $L_1 + A_2$ не меньше каждого из трёх чисел $L_2, A_2, L_1 + L_2$.

Более того, неравенство верно покоэффициентно: действительно, коэффициенты при x^3 и x^2 совпадают (при последнем они равны $L_1 + L_2 + A_1 + A_2$. Сравниваем при x: в левой части будет $(L_1+L_2)(A_1+A_2)+L_1L_2$, в правой $(L_1+L_2)(A_1+A_2)+A_1A_2$. То есть достаточно сравнить L_1L_2 и A_1A_2. Поскольку $L_1 \prec A_1$, $L_2 \prec A_2$, то это верно. Наконец, сравниваем свободные члены: $L_1L_2(A_1 + A_2) \prec A_1A_2(L_1 + L_2)$. Поскольку $L_1 \prec A_1$, то $L_1L_2A_2 \prec L_2A_1A_2$, а поскольку $L_2 \prec A_2$, то $L_1L_2A_1 \prec L_1A_1A_2$. Складываем и получаем то, что нужно.

Неравенство $(y + K_1)(y + K_2)(y + B_1 + B_2) \prec (y + B_1)(y + B_2)(y + K_1 + K_2)$ доказывается аналогично. □

6 Заключение

В работе была доказана гипотеза Эренборга для класса дистанционно-наследственных графов, из неё выведено ещё одно доказательство формулы Эренборга для графов, построенных по диаграммам Юнга. Кроме того показано, что данная оценка точна в этом классе (т.е. равенство для дистанционно-наследственного графа достигается в том и только том случае, если граф является графом Феррера-Юнга).

Также приведены примеры графов, для которых „сильная" гипотеза Эренборга неверна — это чётные циклы длины хотя бы 6, а также графы, для которых гипотеза верна, но при этом они не являются дистанционно-наследственными — например, граф „домино". Однако было доказано, что чётные циклы длины хотя бы 6 удовлетворяют „полусильному" неравенству Эренборга (и даже строгому), следовательно, все графы, получаемые из длинных циклов склеиваниями и размножениями, будут удовлетворять „полусильному" неравенству. Для числового неравенства аналогично.

Также показано, что склеивание графов по ребру сохраняет „полусильное" и „числовое" неравенства Эренборга.

7 Дальнейшие планы

Одним из критериев того, что двудольный граф дистанционно-наследственный, является отстутствие циклов длины хотя бы 6 и „домино" в качестве индуцированных. Учитывая, что длинные циклы не удовлетворяют обобщённому неравенству Эренборга, в отличии от „домино", в дальнейшем хотелось бы доказать (или опровергнуть) следующее утверждение:

Гипотеза. Двудольный граф G удовлетворяет обобщённому полиномиальному неравенству Эренборга, если и только если он не содержит длинных индуцированных циклов (длины хотя бы 6).

Следствие. Если в таком графе размеры долей равны, то выполнено следующее неравенство: $hp(G) \leqslant pm^2(G)$, где $hp(G)$ — количество гамильтоновых путей G (путей, которые проходят по каждой вершине графа), $pm(G)$ — количество совершенных паросочетаний G.

Доказательство. Надо посчитать, чему равны коэффициенты при мономе, в котором все переменные входят в первой степени. $\square$

Список литературы

[1] G. Kirchhoff, *Ueber die Auflosung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Strome gefuhrt wird*, Ann. Phys. 148 (1847), pp. 497–508.

[2] A. Cayley, *A theorem on trees*. Quart. J. Pure Appl. Math. 23: 376–378, 1889.

[3] T. I. Austin, *The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees*, Canad. J. Math. 12 (1960), 535-545.

[4] R. Ehrenborg, S. van Willigenburg, *Enumerative properties of Ferrers graphs*, Discrete Comput. Geom. 32 (2004), 481–492.

[5] S. Klee, M. T. Stamps, *Linear algebraic techniques for spanning tree enumeration*, The American Mathematical Montly, 127(4):297-307.

[6] A. Volkova, *On the number of spanning trees in bipartite graphs*, arXiv:2009.06688v1, 2020.

[7] B. Bozkurt, *Upper bounds for the number of spanning trees of graphs*, J. Inequal. Appl. (2012), 2012:269.

[8] H.-J. Bandelt, H. M. Mulder, *Distance-hereditary graphs.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, 41(2):182–208, 1986.

[9] D. G. Corneil, H. Lerchs, L. Stewart Burlingham, *Complement reducible graphs.* Discrete Appl. Math. 3 (1981), 163–174.

[10] D. Cherkashin, F. Petrov, P. Prozorov, *On stability of the spanning trees enumerator*, arXiv:2209.04413, 2022.

[11] G. Polya, *Über positive Darstellung von Polynomen*, Vierteljahrschrift Naturforsch. Ges. Zürich 73, 141–145. in Collected Papers 2 (1974), MIT Press, 309–313.