

Санкт-Петербургский государственный университет

**ГРАНИН Павел Витальевич**  
**Выпускная квалификационная работа**  
**Песочные паттерны**

Уровень образования:  
Направление 01.03.01 «Математика»  
Основная образовательная программа СВ.5000.2019 «Математика»

Научный руководитель:  
профессор,  
Факультет математики  
и компьютерных наук,  
Иванов Сергей Владимирович

Рецензент:  
ассистент-профессор,  
Гуангдонг Технион –  
Израильский Технологический Институт,  
Калинин Никита Сергеевич

Санкт-Петербург  
2023

## Содержание

1	Общие определения, мотивация и план работы	3
2	Существующие результаты для стандартной решётки $\mathbb{Z}^2$	6
3	Множество $\Gamma_8$ и его граница для регулярного графа $G_8$	8
4	Алгоритм для определения принадлежности множеству $\Gamma_8$	11
5	Периодичность $\Gamma_8$ , оценка на среднее количество песка для стабилизируемых матриц	12
6	Примеры паттернов, соответствующих видимым вершинам конусов в $\Gamma_8$	15
7	Гипотезы, основанные на экспериментальных фактах	19
8	Теоретические результаты для конкретной последовательности конусов	22

# 1 Общие определения, мотивация и план работы

Дипломная работа посвящена изучению песочной модели на некотором регулярном графе. Приведем основные определения.

**Определение 1.1.** *Состоянием* песочной модели на графе  $G = (V, E)$  будем называть функцию  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{Z}$ . Мы интерпретируем  $\varphi(x)$  как количество песчинок в вершине  $x \in V$ .

Если для  $x \in V$  верно  $\varphi(x) \geq \deg(x)$  (число песчинок в вершине не менее степени вершины), то мы называем эту вершину *нестабильной* и разрешаем сделать в ней *обвал*. В результате такого обвала получается новое состояние  $\varphi'$  по следующему правилу:

$$\begin{cases} \varphi'(y) = \varphi(y) - \deg(y), & \text{если } y = x, \\ \varphi'(y) = \varphi(y) + 1, & \text{если } (x, y) \in E, \\ \varphi'(y) = \varphi(y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

При обвале происходит перераспределение песка в графе — из нестабильной вершины в каждого соседа уходит по одной песчинке.

Состояние  $\varphi$  называется *стабильным*, если все вершины в графе являются стабильными, то есть для любой вершины  $x \in V$  выполнено  $\varphi(x) < \deg(x)$ .

*Релаксацией* называется выполнение обвалов в вершинах, пока эти обвалы возможны. Результат релаксации состояния  $\varphi$  будем обозначать  $\varphi^\circ$ . Если существует конечная релаксация (а для состояний с конечным суммарным числом песчинок на связном бесконечном графе это всегда так), то состояние  $\varphi$  называется *стабилизируемым* или *релаксируемым* и определена функция числа обвалов, или *одометр*,  $u: V \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , для каждой вершины  $x$  равная количеству обвалов в  $x$  во время релаксации. Несложно показать, что число обвалов в вершине не зависит от порядка выполнения обвалов в вершинах.

Иногда рассматривают песочные модели со «стоками» — выделенными вершинами графа, при попадании в которые песок «исчезает», или, что эквивалентно, в стоках запрещено делать обвалы. Наличие подобных вершин существенно для конечных графов, поскольку иначе процесс релаксации может не закончиться. Например, если суммарное количество песчинок во всех вершинах больше суммарной степени всех вершин. Нашим основным объектом изучения будет песочная модель на связном бесконечном графе (но с конечным суммарным числом песчинок), стоков в нашей модели не будет.

**Определение 1.2.** Пусть дана функция  $f: V \rightarrow \mathbb{Z}$ , определим дискретный лапласиан функции  $f$  на графе  $G$  следующим образом:

$$\Delta_G f(x) = \sum_{y|(y,x) \in E} (f(y) - f(x)) = \sum_{y|(y,x) \in E} f(y) - \deg(x) \cdot f(x).$$

Обычно будет понятно о каком графе идёт речь, поэтому нижний индекс лапласиана мы будем опускать.

Если состояние  $\eta$  стабилизируемо, то для всякого  $x \in V$  будет выполнено  $0 \leq \eta(x) + \Delta u(x) = \eta^\circ(x) < \deg(x)$ .

**Предложение 1.1 (Принцип наименьшего действия).** Если  $\eta: V \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  и  $w: V \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  удовлетворяют условию  $\eta(x) + \Delta w(x) < \deg(x)$  для всякого  $x \in V$ , тогда состояние  $\eta$  стабилизируемо, и его одометр  $u$  удовлетворяет условию  $u \leq w$ .

Рассмотрим граф  $G_8$  — регулярный граф на вершинах  $\mathbb{Z}^2$  степени 8, в котором точки  $(x_1, x_2)$  и  $(y_1, y_2)$  соединены ребром тогда и только тогда, когда  $|x_1 - y_1| \leq 1$  и  $|x_2 - y_2| \leq 1$ .

Известно, что если в начало координат на пустой плоскости насыпать  $n$  песчинок и провести релаксацию, то полученная картинка растёт со скоростью  $\sqrt{n}$ . Поэтому разумно сжать полученное состояние в  $n^{1/2}$  раз, и уже потом переходить к пределу.

**Определение 1.3.** Определим состояние  $\gamma_n: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  следующим образом:

$$\begin{cases} \gamma_n(x_1, x_2) = n, & \text{если } x_1 = x_2 = 0, \\ \gamma_n(x_1, x_2) = 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим за  $s_n$  результат релаксации этого состояния, то есть  $s_n = \gamma_n^\circ$ . Нашей основной мотивацией является описание  $s_n$  (Рис. 1).

Определим функцию  $\bar{s}_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\bar{s}_n(x) = s_n([n^{1/2}x]),$$

где  $[x]$  означает ближайшую целую точку решётки. Если ближайших точек несколько, можно выбрать любую из них, и, поскольку множество

$$\{x \mid n^{1/2}x \text{ имеет несколько ближайших точек решётки}\}$$

имеет меру 0 на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , то наш выбор не повлияет на слабую\* сходимость, о которой далее пойдёт речь.

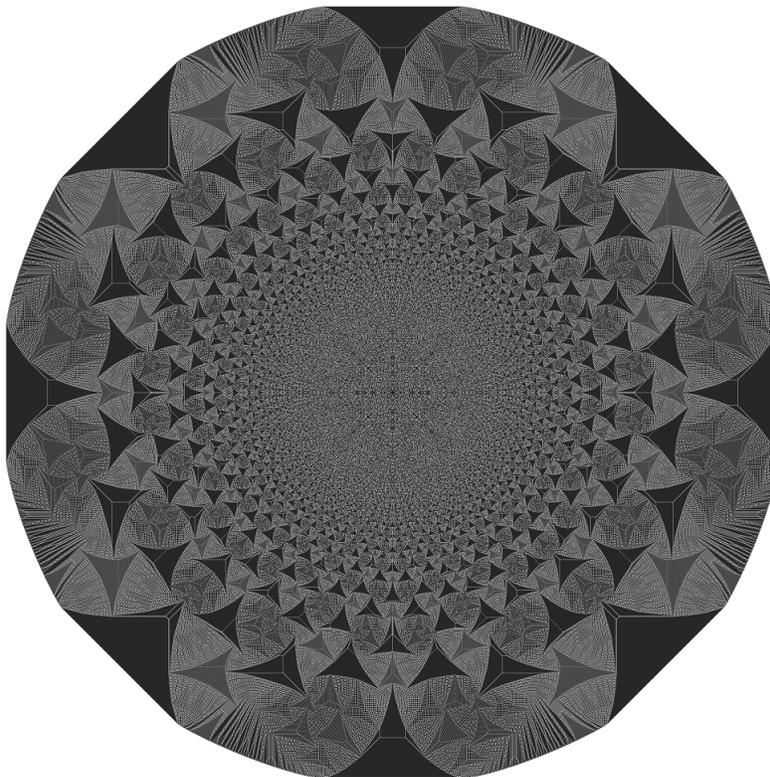


Рис. 1: Результат релаксации состояния с  $10^7$  песчинок в начале координат. Оттенок серого отражает количество песка в вершине. Белому и чёрному цвету сопоставлено 0 и 7 песчинок соответственно.

Известно, что у  $\bar{s}_n$  есть предел в  $*$ -слабой топологии.

**План.** Моя работа посвящена изучению паттернов на Рис. 1. В следующей секции мы обсудим известные результаты [1, 2, 3] для аналогичной картинке на регулярном графе степени 4 на  $\mathbb{Z}^2$ . Далее, в разделах 3-7 я напомню основные результаты, доказанные в моей предыдущей курсовой работе. Последний раздел будет посвящён доказательству гипотезы, выдвинутой мной ранее.

На Рис. 2 приведены области, замощённые повторяющимися паттернами, для каждой области – свой паттерн (детали ниже). Каждой области соответствует вершина конуса в Рис. 5 и паттерны для некоторых вершин указаны в Таблице 6.

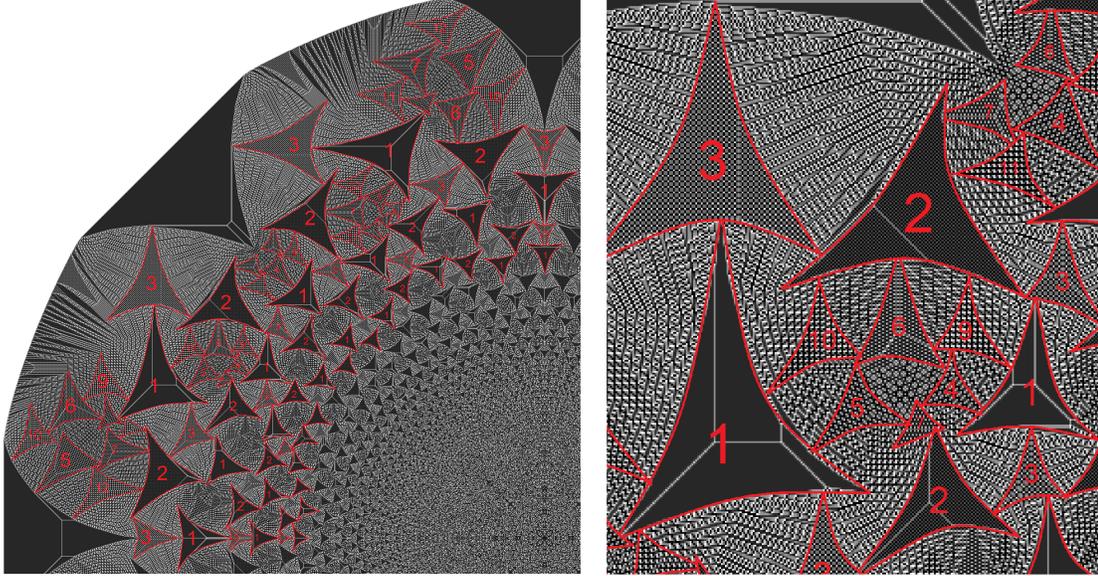


Рис. 2: Результат релаксации состояния с  $10^7$  песчинок в начале координат на  $G_8$  с отмеченными областями с паттернами из Таблицы 6.

## 2 Существующие результаты для стандартной решётки $\mathbb{Z}^2$

В статьях [1, 2, 3] рассматривается граф  $G_4 = (\mathbb{Z}^2, E)$ , вершины  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$  в нём соединены ребром тогда и только тогда, когда  $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1$ .

**Теорема 2.1.** [2] В обозначениях предыдущей главы  $\bar{s}_n$  сходится слабо\* к некоторой  $s_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Более того, выполняются следующие условия: носитель  $s_\infty$  лежит внутри некоторого конечного круга,  $\int_{\mathbb{R}^2} s_\infty dx = 1$ ,  $0 \leq s_\infty \leq 3$ .

Мы наблюдаем, что аналогичный результат верен для графа  $G_8$ .

Предел  $s_\infty$  для  $G_4$  имеет фрактальную структуру, которая была хорошо описана. Для этого рассматривалось множество  $\Gamma_4$  стабилизируемых вещественных симметричных матриц размера  $2 \times 2$ .

**Определение 2.1.** Матрица  $A$  называется *стабилизируемой*, если существует целозначная функция  $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  такая, что

$$u(x) \geq \frac{1}{2} x^t A x, \quad \Delta u(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2,$$

где  $\Delta$  — дискретный лапласиан на графе  $G_4$ .

Если задавать симметричные матрицы  $2 \times 2$  тремя параметрами следующим образом:

$$M_4(a, b, c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c + a & b \\ b & c - a \end{pmatrix},$$

то множество  $\Gamma'_4 = \{(a, b, c) \mid M_4(a, b, c) \in \Gamma_4\}$  является объединением замкнутых конусов над ковром Аполлония, см. Рис. 3.

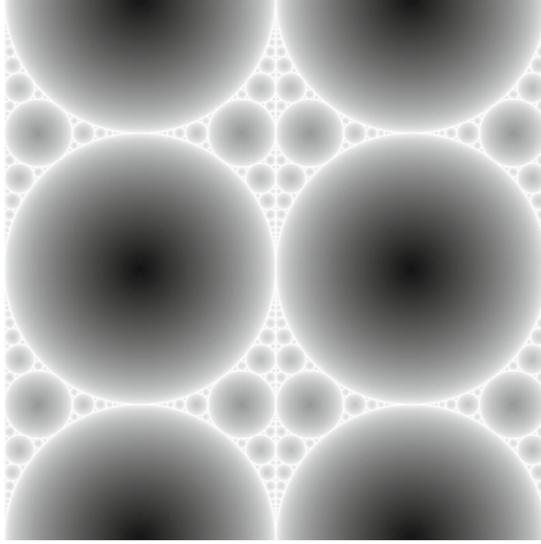


Рис. 3: Граница множества  $\Gamma'_4$ . Оттенок серого в точке  $(a, b) \in [0, 4] \times [0, 4]$  отражает наибольшее  $c \in [2, 3]$  такое, что  $(a, b, c) \in \Gamma'_4$ . Белый и чёрный цвет соответствуют значениям  $c = 2$  и  $c = 3$  соответственно.

Обозначим за  $P_4$  множество троек чисел  $(a, b, c)$ , соответствующих пикам конусов. Каждой тройке  $(a, b, c) \in P_4$  соответствует область предела  $s_\infty$ , и на этой области предел  $s_\infty$  будет выглядеть как периодичный паттерн, определяемый функцией вида  $\Delta[\frac{1}{2}x^t M_4(a, b, c)x + b_{(a,b,c)}x]$ , где  $b_{a,b,c}x$  — некоторая линейная функция.

Если же пересечь все конуса из множества  $\Gamma'_4$  с плоскостью  $z = 2$ , то получится замощение плоскости кругами Аполлония. Множество этих кругов обозначим за  $\mathcal{B}$ .

**Определение 2.2.** Будем называть матрицу  $A$  *целой супергармонической*, если существует функция  $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  такая, что

$$g(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + o(|x|^2) \text{ и } \Delta g(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{Z}^2.$$

В таком случае функцию  $g$  мы будем называть *целым супергармоническим представлением* матрицы  $A$ .

Следующая теорема — это один из основных результатов статьи [3], к доказательству аналога которого мы стремимся.

**Теорема 2.2.** Для всякого круга  $C \in \mathcal{B}$  с центром  $(x, y)$  и радиусом  $r$  существует целое супергармоническое представление  $g_C$  для матрицы  $A_C = M_4(x, y, r)$ , удовлетворяющее условию периодичности

$$g_C(x + v) = g_C(x) + x^T A_C v + g_C(v)$$

для всех  $x \in \mathbb{Z}^2$  и таких  $v \in \mathbb{Z}^2$ , что  $A_C v \in \mathbb{Z}^2$ .

Более того, функция  $g_C$  максимальна в том смысле, что если функция  $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  удовлетворяет условиям  $\Delta g \leq 1$  и  $g \geq g_C$ , то разность  $g - g_C$  будет ограниченной функцией.

### 3 Множество $\Gamma_8$ и его граница для регулярного графа $G_8$

В дальнейшем мы рассматриваем только граф  $G_8$ .

Матрицы размера  $2 \times 2$  мы параметризуем иначе:

$$M_8(a, b, c) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} c + a & b \\ b & c - a \end{pmatrix}.$$

Константа  $1/6$  выбрана таким образом, чтобы получить удобную формулировку Теоремы 5.1.

Мы построим аналогичное множество  $\Gamma_8$  стабилизируемых матриц и предъявим аналогичные гипотезы.

**Определение 3.1.** Будем называть матрицу  $A$  стабилизируемой, если существует функция  $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  такая, что

$$u(x) \geq \frac{1}{2} x^t A x, \quad \Delta u(x) \leq 7 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Здесь и далее под  $\Delta$  подразумевается  $\Delta_{G_8}$ , определённый в Разделе 1.

Пусть  $\Gamma_8$  — множество вещественных симметричных стабилизируемых матриц  $2 \times 2$ .

**Определение 3.2.** Пусть  $q: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда за  $\lceil q \rceil$  будем обозначать функцию на  $\mathbb{Z}^2$ , определённую следующим образом

$$\lceil q \rceil(x_1, x_2) = \lceil q(x_1, x_2) \rceil,$$

где  $\lceil \cdot \rceil$  — это округление до целого числа вверх.

**Лемма 3.1.**  $A \in \Gamma_8$  тогда и только тогда, когда состояние  $\Delta \lceil q_A \rceil$  стабилизируемо, где

$$q_A(x) = \frac{1}{2}x^t A x.$$

*Доказательство.* Пусть  $A \in \Gamma_8$ , тогда существует  $u$ , удовлетворяющая Определению 3.1. Подставим в Предложение 1.1  $\eta = \Delta \lceil q_A \rceil$ ,  $w = u - \lceil q_A \rceil$ , и сразу получим, что  $\eta$  стабилизируемое состояние.

Пусть состояние  $\Delta \lceil q_A \rceil$  стабилизируемо, пусть  $v$  — его одометр. Тогда функция  $u = v + \lceil q_A \rceil$  подходит под условие Определения 3.1, а значит  $A \in \Gamma_8$ .  $\square$

**Определение 3.3.** Рассмотрим порядок на матрицах:  $A \leq B$  тогда и только тогда, когда  $x^t A x \leq x^t B x$  для любого  $x$ .

**Предложение 3.1.** Если  $B \in \Gamma_8$  и  $A \leq B$ , то  $A \in \Gamma_8$ .

*Доказательство.*  $B \in \Gamma_8$ , значит состояние  $\Delta \lceil q_B \rceil$  стабилизируемо, то есть существует  $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  такая, что  $0 \leq \Delta \lceil q_B \rceil + \Delta u < 8$ . Но

$$\Delta \lceil q_B \rceil + \Delta u = \Delta (\lceil q_B \rceil + u) = \Delta \lceil q_A \rceil + \Delta (u + \lceil q_B \rceil - \lceil q_A \rceil),$$

при этом  $\lceil q_B \rceil - \lceil q_A \rceil \geq 0$ , так как  $B \geq A$ , а значит состояние  $\Delta \lceil q_A \rceil$  релаксируемо по Предложению 1.1.  $\square$

**Определение 3.4.** Определим множество  $\Gamma'_8 = \{(a, b, c) \mid M_8(a, b, c) \in \Gamma_8\} \subset \mathbb{R}^3$ .

**Предложение 3.2.** Если  $(a, b, c) \in \Gamma'_8$ , то для любых  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $r > 0$  выполнено  $(a + r \cos(\varphi), b + r \sin(\varphi), c - r) \in \Gamma'_8$ , а также  $(a, b, c - r) \in \Gamma'_8$ .

Первое условие говорит о том, что если  $(a, b, c)$  лежит в  $\Gamma'_8$ , то в  $\Gamma'_8$  лежит и граница конуса с вертикальной осью, углом  $\pi/2$  и вершиной  $(a, b, c)$ . Второе условие гарантирует то, что вместе с точкой  $(a, b, c)$  лежит не только граница, но и весь конус.

*Доказательство.* Для начала используем результат Предложения 3.1, тогда достаточно доказать, что для всякого  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$  верно

$$x^t \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix} x \geq x^t \begin{pmatrix} c-r+a+r\cos(\varphi) & b+r\sin(\varphi) \\ b+r\sin(\varphi) & c-r-a-r\cos(\varphi) \end{pmatrix} x,$$

это равносильно

$$x_1^2(r-r\cos(\varphi)) - 2x_1x_2(r\sin(\varphi)) + x_2^2(r+r\cos(\varphi)) \geq 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \left( x_1\sqrt{1-\cos(\varphi)} \pm x_2\sqrt{1+\cos(\varphi)} \right)^2 = \\ & x_1^2(1-\cos(\varphi)) \pm 2x_1x_2|\sin(\varphi)| + x_2^2(1+\cos(\varphi)), \end{aligned}$$

а значит мы получили нужное неравенство.

Разберёмся со вторым утверждением, для него нам необходимо показать

$$x^t \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix} x \geq x^t \begin{pmatrix} c-r+a & b \\ b & c-r-a \end{pmatrix} x,$$

а это равносильно условию

$$x_1^2r + x_2^2r \geq 0.$$

□

**Предложение 3.3.** Граница множества  $\Gamma'_8$  непрерывна.

*Доказательство.* Для начала отметим, что  $\partial\Gamma'_8$  непусто. Это так, поскольку  $(0, 0, 0) \in \Gamma'_8$ ,  $(0, 0, 60) \notin \Gamma'_8$ .

Пусть  $(a_0, b_0, c_0) \in \partial\Gamma'_8$ . Докажем, что множество

$$V_{(a_0, b_0, c_0)} = \{(a, b, c) \mid c > c_0, (a-a_0)^2 + (b-b_0)^2 < (c-c_0)^2\}$$

не пересекается с  $\Gamma'_8$ . Множество  $V_{(a_0, b_0, c_0)}$  — это открытый конус с углом  $\pi/2$ , направленный вверх по оси  $z$ , с вершиной  $(a_0, b_0, c_0)$ . Пусть это не так и существует  $(x, y, z) \in V_{(a_0, b_0, c_0)} \cap \Gamma'_8$ . Тогда, по Предложению 3.2, во множестве  $\Gamma'_8$  целиком лежит конус

$$\Lambda_{(x, y, z)} = \{(a, b, c) \mid c < z, (a-x)^2 + (b-y)^2 \leq (c-z)^2\}.$$

Но из  $(x, y, z) \in V_{(a_0, b_0, c_0)}$  следует, что  $(a_0, b_0, c_0) \in \text{int } \Gamma'_8$ . В таком случае точка  $(a_0, b_0, c_0)$  не могла лежать на границе  $\Gamma'_8$ , пришли к противоречию.

По аналогичным соображениям из условия  $(a_0, b_0, c_0) \in \partial\Gamma'_8$  можно вывести, что открытый конус

$$\Lambda_{(a_0, b_0, c_0)} = \{(a, b, c) \mid c < c_0, (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 < (c - c_0)^2\}$$

принадлежит множеству  $\Gamma'_8$ .

Из этих двух фактов мы получаем, что для всяких  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  существуют  $Z_0, Z_1 \in \mathbb{R}$  такие, что  $\forall z < Z_0 (x, y, z) \in \Gamma'_8, \forall z > Z_1 (x, y, z) \notin \Gamma'_8$ . Определим  $z_0 = \sup\{z \mid (x, y, z) \in \Gamma'_8\}$ . Понятно, что  $(x, y, z_0) \in \partial\Gamma'_8$ , более того, не существует  $z_1 \neq z_0$  такого, что  $(x, y, z_1) \in \partial\Gamma'_8$ . Пусть существует, пусть, не умаляя общности,  $z_0 < z_1$ , тогда множеству  $\Gamma'_8$  принадлежит открытый конус

$$\Lambda_{(x, y, z_1)} = \{(a, b, c) \mid c < z_1, (a - x)^2 + (b - y)^2 < (c - z_1)^2\}.$$

Но  $(x, y, z_0) \in \Lambda_{(x, y, z_1)} \subset \text{int } \Gamma'_8$ , пришли к противоречию с тем, что  $(x, y, z_0) \in \partial\Gamma'_8$ .

Таким образом мы показали, что  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  существует единственный  $z \in \mathbb{R}$  такой, что  $(x, y, z) \in \partial\Gamma'_8$ . Также мы поняли, что если  $(x, y, z) \in \partial\Gamma'_8$ , то  $\Lambda_{(x, y, z)} \cap \partial\Gamma'_8 = \emptyset$  и  $V_{(x, y, z)} \cap \partial\Gamma'_8 = \emptyset$ , где  $\Lambda_{(x, y, z)}$  и  $V_{(x, y, z)}$  — открытые конусы с вершиной  $(x, y, z)$ , направленные вниз и вверх по оси  $z$  соответственно.

Из этого следует, что граница множества  $\Gamma'_8$  непрерывна.  $\square$

Значит, для определения его границы достаточно проверять на принадлежность множеству  $\Gamma'_8$  только тройки рациональных чисел. Или, что равносильно, для определения структуры множества  $\Gamma_8$  достаточно проверять на принадлежность ему лишь рациональных матриц.

## 4 Алгоритм для определения принадлежности множеству $\Gamma_8$

**Определение 4.1.** Будем называть функцию  $s$  на  $\mathbb{Z}^2$   $n$ -периодической, если  $s(x + y) = s(x)$  для всяких  $x \in \mathbb{Z}^2, y \in n\mathbb{Z}^2$ .

**Лемма 4.1.** Если коэффициенты  $A$  лежат в  $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$  для  $n \in \mathbb{N}$ , то состояние  $\Delta [q_A]$   $2n$ -периодическое.

*Доказательство.* Если  $y \in 2n\mathbb{Z}^2$ , тогда  $Ay \in 2\mathbb{Z}^2$ , так что

$$q_A(x + y) - q_A(x) = \left( x^t + \frac{1}{2}y^t \right) Ay \in \mathbb{Z}.$$

Из этого следует, что функция  $\lceil q_A \rceil - q_A$  будет  $2n$ -периодической. Теперь запишем

$$\Delta \lceil q_A \rceil = \Delta(\lceil q_A \rceil - q_A) + \Delta q_A.$$

Теперь  $2n$ -периодичность  $\Delta \lceil q_A \rceil$  следует из  $2n$ -периодичности  $\Delta(\lceil q_A \rceil - q_A)$  и того, что  $\Delta q_A$  — константа (это же лапласиан, хоть и дискретный, квадратичной функции).  $\square$

**Лемма 4.2.** Пусть  $u, v: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , определим функцию  $w(x) = \min\{u(x), v(x)\}$ . Если для некоторого  $x$  имеем  $w(x) = u(x)$ , то  $\Delta w(x) \leq \Delta u(x)$ .

Аналогично, минимум из счётного множества дискретных супергармонических функций (если он поточечно существует) — тоже супергармоническая функция.

**Лемма 4.3.**  $n$ -периодическое состояние  $\eta: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  стабилизируемо тогда и только тогда, когда оно стабилизируемо на торе  $T_n = \mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2$ .

*Доказательство.* Пусть  $\eta$  стабилизируемо на торе  $T_n$  с одомером  $\bar{v}$ , продолжим  $\bar{v}$  до  $n$ -периодической функции  $v$  на  $\mathbb{Z}^2$  естественным образом. Легко видеть, что тогда  $\eta + \Delta v \leq 7$ , а значит  $\eta$  стабилизируемо на  $\mathbb{Z}^2$  по Предложению 1.1.

Теперь пусть  $\eta$  стабилизируемо на  $\mathbb{Z}^2$  с одомером  $w: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Определим функцию  $\bar{w}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  следующим образом

$$\bar{w}(x) = \min\{w(x+y) \mid y \in n\mathbb{Z}^2\}.$$

Функция  $\bar{w}$  будет  $n$ -периодической, а также будет удовлетворять условию  $\eta + \Delta \bar{w} \leq 7$ , это следует из предыдущей леммы. Обозначим за  $\hat{w}$  сужение функции  $\bar{w}$  на  $T_n$ ,  $\hat{w}$  удовлетворяет  $\eta + \Delta_{T_n} \hat{w} \leq 7$ . Следовательно, по Предложению 1.1, состояние  $\eta$  будет стабилизируемо на торе  $T_n$ .  $\square$

Теперь мы знаем, что для того, чтобы посмотреть на структуру множества  $\Gamma_8$ , можно определять принадлежность ему только рациональных матриц. А это, как мы показали выше, алгоритмизуемая задача, так что мы написали программу, которая с некоторой точностью вычислила границу  $\Gamma_8$ , проверяя для рациональных  $a, b, c$  релаксируемость соответствующего состояния на торе.

## 5 Периодичность $\Gamma_8$ , оценка на среднее количество песка для стабилизируемых матриц

**Теорема 5.1.** Пусть  $A = M_8(a, b, c)$ , тогда среднее количество песка в состоянии  $\Delta \lceil q_A \rceil$  равно  $c$ .

*Доказательство.* Для доказательства мы будем считать среднее количества песка в подграфе на вершинах  $V_n = [-n, n] \times [-n, n]$  и устремим  $n$  к бесконечности.

Обозначим общее количество песка на  $V_n$  за  $S_n$ .

$$S_n = \sum_{x \in V_n} \Delta [q_A](x) = \sum_{x \in V_n} \left( \sum_{y \sim x} [q_A](y) - 8 [q_A](x) \right).$$

Видно, что в этой сумме почти все члены сокращаются, остаются только значения около границы множества  $V_n$ . Для краткости обозначим  $f(a, b) = [q_A](a, b)$ . Таким образом

$$\begin{aligned} S_n = & 3 \sum_{t \in [-n+1, n-1]} (f(-n-1, t) + f(n+1, t) + f(t, -n-1) + f(t, n+1)) + \\ & + 2(f(-n-1, n) + f(-n, n+1) + f(n, n+1) + f(n+1, n) + \\ & + f(n+1, -n) + f(n, -n-1) + f(-n, -n-1) + f(-n-1, -n)) + \\ & + (f(-n-1, -n-1) + f(-n-1, n+1) + f(n+1, -n-1) + f(n+1, n+1)) - \\ & - 3 \sum_{t \in [-n+1, n-1]} (f(t, n) + f(t, -n) + f(n, t) + f(-n, t)) - \\ & - 5(f(n, n) + f(-n, n) + f(n, -n) + f(-n, -n)). \end{aligned}$$

Вспомним, что нас интересует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(2n+1)^2}$ . Для начала отметим, что в выражении для  $S_n$  лишь линейное по  $n$  количество членов, так что мы можем функцию  $[q_A]$  заменить на  $q_A$ , предел не поменяется.

Также отметим, что  $q_A(a, b)$  отличается от  $q_A(a \pm 1, b \pm 1)$  лишь на линейный член по  $n$ . Так что если мы из всех членов в выражении для  $S_n$ , не находящихся под знаками суммирования, уберём  $\pm 1$ , то предел опять же не изменится. И в таком случае произойдёт много сокращений.

После этих умозаключений нас уже интересует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n}{(2n+1)^2}$ , где

$$\begin{aligned} S'_n = & 3 \sum_{t \in [-n+1, n-1]} \left( q_A(-n-1, t) + q_A(n+1, t) + q_A(t, -n-1) + q_A(t, n+1) - \right. \\ & \left. - q_A(t, n) - q_A(t, -n) - q_A(n, t) - q_A(-n, t) \right). \end{aligned}$$

Осталось наконец воспользоваться тем, как определено  $q_A$ .

$$\begin{aligned}
q_A(-n-1, t) - q_A(-n, t) &= \frac{1}{12}((c+a)(-n-1)^2 + 2b(-n-1)t + (c-a)t^2) - \\
&- \frac{1}{12}((c+a)(-n)^2 + 2b(-n)t + (c-a)t^2) = \frac{1}{12}((c+a)(2n+1) - 2bt), \\
q_A(n+1, t) - q_A(n, t) &= \frac{1}{12}((c+a)(2n+1) + 2bt), \\
q_A(t, -n-1) - q_A(t, -n) &= \frac{1}{12}((c-a)(2n+1) - 2bt), \\
q_A(t, n+1) - q_A(t, n) &= \frac{1}{12}((c-a)(2n+1) + 2bt).
\end{aligned}$$

Теперь собираем это всё вместе и получаем

$$S'_n = 3 \sum_{t \in [-n+1, n-1]} \frac{1}{6} \left( (c+a)(2n+1) + (c-a)(2n+1) \right) = c(2n-1)(2n+1).$$

Следовательно  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n}{(2n+1)^2} = c$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .

Если  $c > 7$ , то  $M_8(a, b, c) \notin \Gamma_8$ .

Если  $c < 4$ , то  $M_8(a, b, c) \in \Gamma_8$ .

*Доказательство.* По Лемме 3.1 мы знаем, что нам надо проверить стабилизируемость состояния  $[q_A]$ . При этом, так как  $A = M_8(a, b, c)$ , и эти коэффициенты рациональные, то мы можем рассматривать стабилизируемость не на всём множестве  $\mathbb{Z}^2$ , а только на торе подходящего размера. А это уже состояние на конечном графе со средним числом песчинок  $c$  и степенью всех вершин 8.

Теперь первое утверждение совсем тривиально (при релаксации на торе общее число песка не меняется, значит, всегда будут вершины с более чем семью песчинками), необходимо разобраться со вторым. И он верен, так как если в состоянии на конечном связном графе песчинок меньше, чем рёбер, то это состояние стабилизируемо. Этот факт доказан в диссертации [4].  $\square$

**Гипотеза.** Результаты компьютерных вычислений указывают на более сильное свойство: если  $c > 6$ , то  $M_8(a, b, c) \notin \Gamma_8$ .

**Лемма 5.1.**  $\Delta x^2 = \Delta y^2 = 6$ ,  $\Delta xy = \Delta x = \Delta y = \Delta 1 = 0$ .

**Предложение 5.1.**

Пусть  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $A = M_8(a, b, c)$ ,  $A' = M_8(a + 12k_1, b + 6k_2, c)$ . Тогда  $\Delta [q_A] = \Delta [q_{A'}]$ .

Таким образом, для вычисления  $\Gamma_8$  достаточно будет рассматривать лишь матрицы с  $(a, b) \in [0, 12] \times [0, 6]$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\Delta [q_{A'}] &= \Delta \left[ \frac{1}{12} \left( (c + a + 12k_1)x^2 + 2(b + 6k_2)xy + (c - a - 12k_1)y^2 \right) \right] = \\
&\Delta \left[ \frac{1}{12} \left( (c + a)x^2 + 2bxy + (c - a)y^2 \right) + \left( k_1x^2 + k_2xy - k_1y^2 \right) \right] = \\
&\Delta \left( \left[ \frac{1}{12} \left( (c + a)x^2 + 2bxy + (c - a)y^2 \right) \right] + \left( k_1x^2 + k_2xy - k_1y^2 \right) \right) = \\
\Delta [q_A] + \Delta \left( k_1x^2 + k_2xy - k_1y^2 \right) &= \Delta [q_A] + 6k_1 + 0 \cdot k_2 - 6k_1 = \Delta [q_A].
\end{aligned}$$

□

## 6 Примеры паттернов, соответствующих видимым вершинам конусов в $\Gamma_8$

Мы провели следующие вычисления на компьютере: взяли все пары рациональных чисел  $(a, b) \in [0, 12] \times [0, 6]$  со знаменателем 256, и для каждой такой пары посчитали  $\sup\{c \mid M_8(a, b, c) \in \Gamma_8\}$  с точностью до  $1/256$ . После этого, пользуясь периодичностью, эти данные продолжили на квадрат  $[0, 12] \times [0, 12]$  по Предложению 5.1. Таким образом мы получили результат, отражённый на Рис. 4.

**Предложение 6.1.** Если  $c > 6 + \frac{1}{128}$ , то для всяких  $a, b \in \mathbb{R}$  выполнено  $(a, b, c) \notin \Gamma'_8$ .

*Доказательство.* Произведённые вычисления показали, что для любых  $n, m \in \mathbb{Z}$  выполнено  $(\frac{n}{256}, \frac{m}{256}, 6 + \frac{1}{256}) \notin \Gamma'_8$ .

Допустим, что существует тройка  $(a, b, c)$  такая, что  $c > 6 + \frac{1}{128}$  и  $(a, b, c) \in \Gamma'_8$ . Возьмём  $n = [256 \cdot a]$ ,  $m = [256 \cdot b]$ . Обозначим  $D = \text{dist}((a, b), (\frac{n}{256}, \frac{m}{256}))$ . Оценим  $D$  сверху:

$$D \leq \left| a - \frac{n}{256} \right| + \left| b - \frac{m}{256} \right| = \frac{1}{256} (|256 \cdot a - n| + |256 \cdot b - m|) \leq \frac{1}{256}.$$

По Предложению 3.2 из  $(a, b, c) \in \Gamma'_8$  следует, что  $(\frac{n}{256}, \frac{m}{256}, c - D) \in \Gamma'_8$ . При этом  $c - D > 6 + \frac{1}{256}$ , пришли к противоречию с имеющимися результатами вычислений. □

В ситуации с  $G_4$  большую роль играли локальные максимумы на аналогичной картинке, они отвечали некоторым паттернам на областях в искомом пределе.

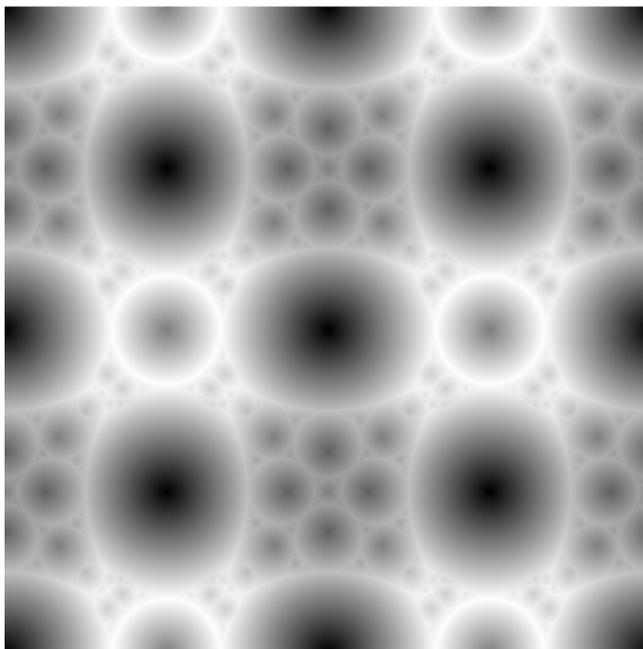


Рис. 4: Граница множества  $\Gamma'_8$ . Оттенок серого в точке  $(a, b) \in [0, 12] \times [0, 12]$  отражает наибольшее  $c \in [4, 6]$  такое, что  $(a, b, c) \in \Gamma'_8$ . Белый и чёрный цвет соответствуют значениям  $c = 4$  и  $c = 6$  соответственно.

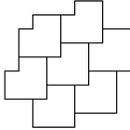
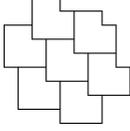
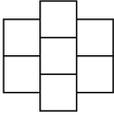
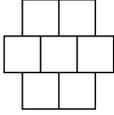
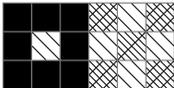
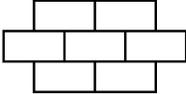
Также компьютер вычислил результат релаксации состояния, в котором в начале координат находится  $10^7$  песчинок, а в остальных вершинах песчинок нет, результат отражён на Рис. 1.

Из проделанных вычислений мы видим, какие тройки  $(a, b, c)$  будут точками локального максимума(относительно  $c$ ), а также какой паттерн будет им соответствовать.

Далее для обозначения вершины с 0 песчинок будем использовать  $\square$ , для 1 —  $\square$ , для 2 —  $\square$ , для 3 —  $\square$ , для 4 —  $\square$ , для 5 —  $\square$ , для 6 —  $\square$ , для 7 —  $\blacksquare$ .

Составим таблицу из вершин и соответствующим им паттернам:

№	$(a, b, c)$	паттерн, или же tile odometer	его расположение
1	$(0, 0, 6),$ $(6, 0, 6)$		

2	$(3, 3, 6),$ $(9, 3, 6)$		
3	$(3, 0, 5),$ $(9, 0, 5)$		
4	$(0, 2.25, 5.25),$ $(6, 2.25, 5.25)$		
5	$(0, 3.75, 5.25),$ $(6, 3.75, 5.25)$		
6	$(5.25, 3, 5.25),$ $(11.25, 3, 5.25)$		
7	$(6.75, 3, 5.25),$ $(0.75, 3, 5.25)$		
8	$(6, 3, 5),$ $(0, 3, 5)$		
9	$(5, 2, 5),$ $(11, 2, 5)$		
10	$(5, 4, 5),$ $(11, 4, 5)$		

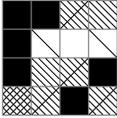
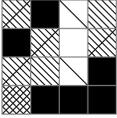
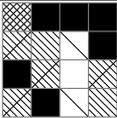
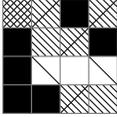
11	$(7, 2, 5),$ $(1, 2, 5)$		
12	$(7, 4, 5),$ $(1, 4, 5)$		
13	$(4.5, 4.5, 4.5),$ $(10.5, 4.5, 4.5)$		
14	$(7.5, 4.5, 4.5),$ $(1.5, 4.5, 4.5)$		
15	$(7.5, 1.5, 4.5),$ $(1.5, 1.5, 4.5)$		
16	$(4.5, 1.5, 4.5),$ $(10.5, 1.5, 4.5)$		

Таблица 6.

Мы взяли результат релаксации состояния с  $10^7$  песчинок в начале координат и отметили на нём области с паттернами из Таблицы 6, результат отражён на Рис. 2.

Заметим, что паттерны 13, 14, 15, 16 отличаются поворотом и зеркальной симметрией, аналогичным свойством обладают паттерны 9, 10, 11, 12. Рис. 5 даёт этому некоторое объяснение. Совпадают пары паттернов 4, 5 и 6, 7 (но разнятся между собой, хотя можно было бы предположить, что из симметрии Рис.5 они должны совпадать).

## 7 Гипотезы, основанные на экспериментальных фактах

По имеющемуся приближению множества  $\Gamma'_8$  мы построили трёхмерную модель этого множества. И это дало ощутимый толчок в постановке гипотез о фрактальной структуре этого множества. Эта модель, вместе с номерами конусов, соответствующими таблице выше, приведена на Рис. 5.

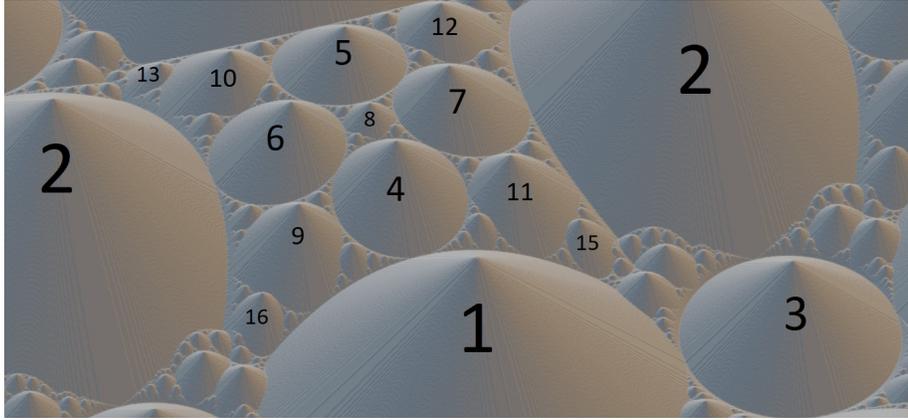


Рис. 5: 3d-модель множества  $\Gamma'_8$ , номера соответствуют Таблице 6. Угол при вершинах всех конусов равен прямому, конус является поверхностью вращения вокруг вертикальной прямой. На изображении углы в вершинах конусов кажутся больше прямого, потому что мы смотрим "сверху".

Ранее мы показали, что вместе с точкой  $(a, b, c)$  множество  $\Gamma'_8$  будет содержать и целый конус с вершиной в этой точке. Первое и одно из самых важных предположений (оно подтверждается компьютерными вычислениями, а также было строго доказано для  $G_4$ ) — множество  $\Gamma'_8$  является объединением счётного числа конусов, и вершины этих конусов имеют некоторую фрактальную структуру, которую мы стремимся описать.

Нас интересуют вершины, соответствующие сходящейся последовательности к пересечению конусов 2 и 7, со стороны конуса 12. На Рис. 6 изображена область множества  $\Gamma'_8$  между конусами 2, 7, 12.

**Гипотеза.** Последовательность вершин конусов  $\{Q_i\}_{i=2}^{\infty}$ , представленных на Рис. 6, описывается следующим образом:  $Q_i = (x_i, y_i, z_i)$ , где

$$x_i = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3}{2i+1} \right)^2, \quad y_i = 3 + \frac{3}{2i+1}, \quad z_i = 12 - x_i = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3}{2i+1} \right)^2 + \frac{9}{2}.$$

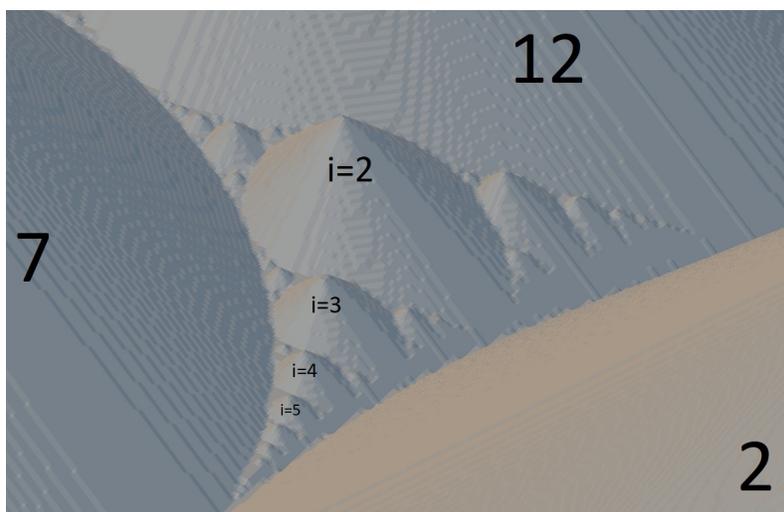
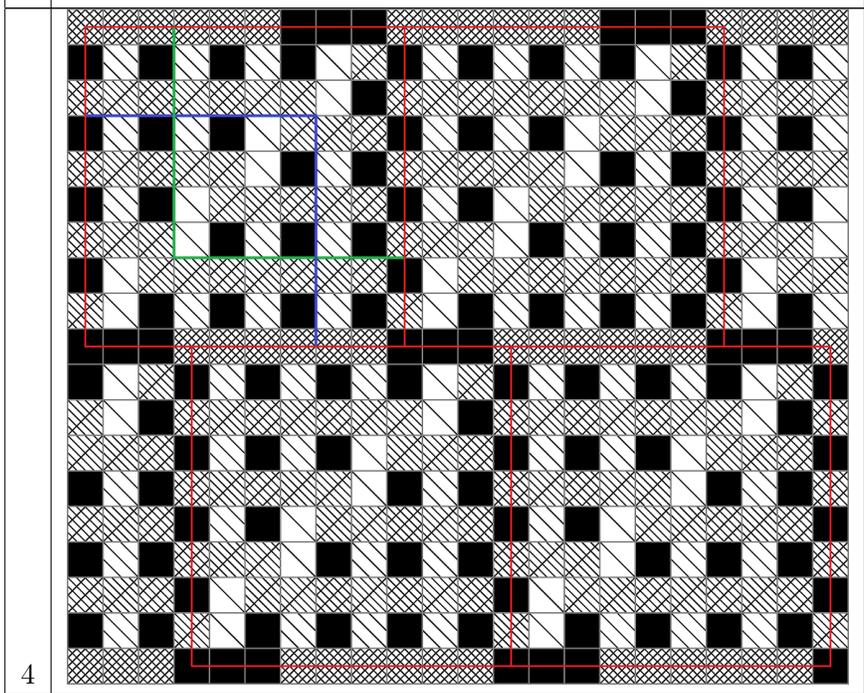
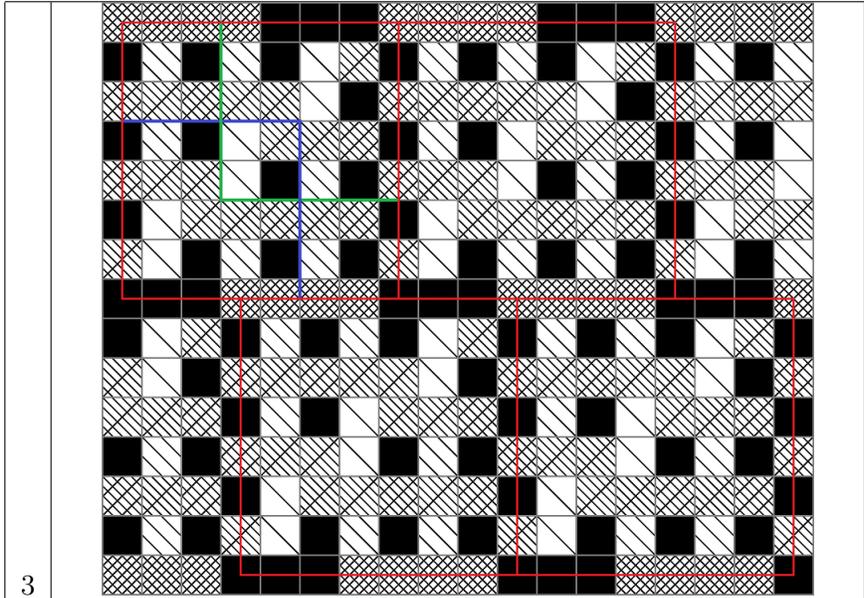


Рис. 6: Область между конусами 2, 7, 12

Соответствующие некоторым из этих вершин паттерны, вместе с прямоугольной границей, показывающей периодичность этого паттерна, а также отдельно выделенными синим и красным цветами участками, соответствующими предыдущему паттерну, представлены в Таблице 7.

i	паттерн, соответствующий этой вершине
2	



## 8 Теоретические результаты для конкретной последовательности конусов

Видя первые несколько паттернов для последовательности вершин конусов  $\{Q_i\}_{i=2}^{\infty}$ , мы можем предположить, как эти паттерны будут строиться дальше. Построим их по индукции. Пусть мы знаем паттерн  $P_i$  размера  $(2i+1) \times (2i+1)$ , т.е. можно это понимать как  $P_i: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , в нашем случае с периодами  $(2i+1, 0)$  и  $(3, -2i-1)$ . Тогда паттерн  $P_{i+1}$  определяется следующим образом:

1. для  $(x, y) \in [0, 2i] \times [0, 2i]$  верно  $P_{i+1}(x, y) = P_i(x, y)$ ,
2. для  $(x, y) \in [3, 2i+3] \times [3, 2i+3]$  верно  $P_{i+1}(x, y) = P_i(x-2, y-2)$ ,
3. для  $(x, y) \in [0, 2] \times [2i+1, 2i+3]$  верно  $P_{i+1}(x, y) = P_i(x, y-2)$ ,
4. для  $(x, y) \in [2i+1, 2i+3] \times [0, 2]$  верно  $P_{i+1}(x, y) = P_i(x-2, y)$ .

**Предложение 8.1.** Существует последовательность функций с  $i \geq 2$   $f_i: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , удовлетворяющая следующим свойствам (для неё будет верно, что  $\Delta f_i = P_i - 6$ ):

1.  $f_i(x, y) = \left\lfloor \frac{i+1}{2i+1}xy - \frac{y^2}{4} \right\rfloor$  для  $(x, y) \in B_t^{i+1}$ , где
 
$$B_t^{i+1} = [0, 1] \times [0, 2i+1] \cup [0, 2i+1] \times [2i, 2i+1],$$
2.  $f_i(x, y) = \left\lfloor \frac{i+1}{2i+1}xy - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right\rfloor$  для  $(x, y) \in B_b^{i+1}$ , где
 
$$B_b^{i+1} = [0, 2i+1] \times [0, 1] \cup [2i, 2i+1] \times [0, 2i+1],$$
3.  $f_i(x - (2i+1), y) = f_i(x, y) - (i+1)y$ ,
4.  $f_i(x + 3, y - (2i+1)) = f_i(x, y) - (1+i)x + (i+2)y - (i^2 + 4i + 2)$ ,
5.  $f_i(x + (2i-2), y + (2i+1)) = f_i(x, y) + (i+1)x - y + (i^2 - i - 2)$ ,
6. для всех  $(x, y) \in [0, 2i+1] \times [0, 2i+1] = E_1^{i+1}$  верно
 
$$f_{i+1}(x, y) = f_i(x, y).$$
7. для всех  $(x, y) \in [2, 2i+1] \times [2, 2i+1] = E_2^i$  верно
 
$$f_i(x, y) = f_i(x-2, y-2) + x.$$

8. для всех  $(x, y) \in [0, 2] \times [2i + 1, 2i + 3] = E_3^{i+1}$  верно

$$f_{i+1}(x, y) = f_i(x, y - 2) + x - y + 1.$$

9. для всех  $(x, y) \in [2i + 1, 2i + 3] \times [0, 2] = E_4^{i+1}$  верно

$$f_{i+1}(x, y) = f_i(x - 2, y) + y.$$

Условия 3-5 обеспечивают периодичность лапласиана функций  $f_i$ .

Также легко видеть, что из условия 6 и 7 следует, что для всех  $(x, y) \in E_2^{i+1}$  верно  $f_{i+1}(x, y) = f_i(x - 2, y - 2) + x$ .

Таким образом условия 6 – 9 задают следующую функцию через предыдущую, примерно также, как образуются паттерны.

*Доказательство.* Для начала проверим, что первые два условия совместны. Для этого надо проверить совпадение значений на множествах  $[0, 1]^2$  и  $[2i, 2i + 1]^2$ .

Первое условие говорит следующее:

$$f_i(0, 0) = \lceil 0 \rceil = 0,$$

$$f_i(1, 0) = \lceil 0 \rceil = 0,$$

$$f_i(0, 1) = \left\lceil -\frac{1}{4} \right\rceil = 0,$$

$$f_i(1, 1) = \left\lceil \frac{i+1}{2i+1} - \frac{1}{4} \right\rceil = 1,$$

$$f_i(2i, 2i) = \left\lceil i^2 + i - \frac{4i}{8i+4} \right\rceil = i^2 + i,$$

$$f_i(2i+1, 2i) = \lceil i^2 + 2i \rceil = i^2 + 2i,$$

$$f_i(2i, 2i+1) = \left\lceil i^2 + i - \frac{1}{4} \right\rceil = i^2 + i,$$

$$f_i(2i+1, 2i+1) = \left\lceil i^2 + 2i + 1 - \frac{1}{4} \right\rceil = i^2 + 2i + 1.$$

Легко видеть, что вычитание  $1/4$  перед взятием целой части не изменит результат, а значит первые два условия действительно совместны.

Далее мы докажем, что если функция  $f_i: [0, 2i + 1]^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  удовлетворяет первым двум условиям, то существует единственное её продолжение на всю плоскость  $\mathbb{Z}^2$ , удовлетворяющее условиям 3-5. Нам необходимо удостовериться, что сдвиги функции  $f_i$  по решётке

$$\{(-(2i + 1), 0), (3, -(2i + 1)), (2i - 2, 2i + 1)\}$$

будут корректно перекрываться. Стоит отметить, что сдвиги функции, определённой на  $[0, 2i]^2$ , покрывают всю плоскость без перекрытий. Также легко видеть, что композиция всех трёх сдвигов даёт тождественную функцию. Из этих двух фактов следует, что достаточно проверить согласованность условий 3-5 только на множестве  $[0, 2i + 1]^2 \setminus [1, 2i]^2$ :

3. В данном случае мы рассматриваем только точки  $(x, y)$  такие, что  $x = 2i + 1$ ,  $y \in [0, 2i + 1]$ , поскольку только при таких значениях обе точки из условия 3 лежат в множестве  $[0, 2i + 1]^2 \setminus [1, 2i]^2$ . То есть нам надо проверить, что для  $y \in [0, 2i + 1]$  верно

$$f_i(0, y) = f_i(2i + 1, y) - (1 + i)y,$$

где

$$f_i(0, y) = \left\lceil -\frac{y^2}{4} \right\rceil,$$

$$f_i(2i + 1, y) - (1 + i)y = \left\lceil (i + 1)y - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right\rceil = \left\lceil -\frac{y^2}{4} \right\rceil.$$

4. В данном случае мы рассматриваем точки  $(x, y)$  такие, что  $x \in [0, 2i - 2]$ ,  $y = 2i + 1$ . Так что нам надо проверить, что для  $x \in [0, 2i - 2]$  верно

$$f_i(x + 3, 0) = f_i(x, 2i + 1) - (1 + i)x + (i + 2)(2i + 1) - (i^2 + 4i + 2),$$

где

$$f_i(x + 3, 0) = 0,$$

$$f_i(x, 2i + 1) - (1 + i)x + (i + 2)(2i + 1) - (i^2 + 4i + 2) =$$

$$\left\lceil (i + 1)x - i^2 - i - \frac{1}{4} \right\rceil - (1 + i)x + i^2 + i = 0$$

5. В данном случае мы рассматриваем точки  $(x, y)$  такие, что  $x \in [0, 3]$ ,  $y = 0$ . Так что надо проверить, что для  $x \in [0, 3]$  верно

$$f_i(x + (2i - 2), 2i + 1) = f_i(x, 0) + (i + 1)x + i^2 - i - 2,$$

где

$$f_i(x + 2i - 2, 2i + 1) = \left\lceil (i + 1)(x + 2i - 2) - i^2 - i - \frac{1}{4} \right\rceil =$$

$$(i + 1)x + i^2 - i - 2,$$

$$f_i(x, 0) + (i + 1)x + i^2 - i - 2 = (i + 1)x + i^2 - i - 2.$$

Теперь для определения функции  $f_i$  достаточно проверять лишь условия 1-2 и 6-9 на множестве  $[0, 2i + 1]^2$ .

Для дальнейшего доказательства используем индукцию. Для доказательства базы индукции необходимо разобрать случай  $i = 2$ .

Для  $i = 2$  подходит функция, определённая на множестве  $[0, 5]^2$  следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} -6 & -3 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ -4 & -1 & 1 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Проверка свойств этих функций делается вручную. На этом база индукции считается доказанной.

Пусть функция  $f_i$  существует, давайте строить функцию  $f_{i+1}$  на множестве  $[0, 2i+3]^2$ , используя условия 6-9. При этом для единообразия на условие 7 будем смотреть как на  $f_{i+1}(x, y) = f_i(x-2, y-2) + x$ . Для начала необходимо проверить корректность определения на пересечениях  $E_1^{i+1} \cap E_3^{i+1}, E_1^{i+1} \cap E_4^{i+1}, E_2^{i+1} \cap E_3^{i+1}, E_2^{i+1} \cap E_4^{i+1}, E_1^{i+1} \cap E_2^{i+1}$ .

- $E_1^{i+1} \cap E_3^{i+1}$ : необходимо проверить равенство  $f_i(x, y) = f_i(x, y-2) + x - y + 1$  для  $(x, y) \in E_1^{i+1} \cap E_3^{i+1} = [0, 2] \times \{2i + 1\}$ . Эти точки принадлежат множеству  $B_t^i$ , так что на них

$$f_i(x, y) = \left\lceil \frac{i+1}{2i+1}xy - \frac{y^2}{4} \right\rceil,$$

И, если подставить  $y = 2i + 1$ , получится

$$\begin{aligned} f_i(x, 2i+1) &= \left\lceil (i+1)x - \frac{4i^2 + 4i + 1}{4} \right\rceil = \\ &= (i+1)x - i^2 - i = x(i+1) - i^2 - i. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} f_i(x, 2i-1) &= f_{i-1}(x, 2i-1) = xi - (i-1)^2 - (i-1) = \\ &= xi - i^2 + i. \end{aligned}$$

Осталось проверить, что для  $x \in [0, 2]$  выполняется

$$\begin{aligned} x(i+1) - i^2 - i &= f_i(x, y) \stackrel{?}{=} f_i(x, 2i-1) + x - (2i+1) + 1 = \\ &= xi - i^2 + i + x - (2i+1) + 1 = x(i+1) - i^2 - i + 1. \end{aligned}$$

- $E_1^{i+1} \cap E_4^{i+1}$ : в этом случае  $E_1^{i+1} \cap E_4^{i+1} = \{2i+1\} \times [0, 2]$ . Надо проверить, что при  $y \in [0, 2]$  верно  $f_i(2i+1, y) = f_i(2i-1, y) + y$ . Аналогично можем вычислить

$$\begin{aligned} f_i(2i+1, y) &= \left[ (i+1)y - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right], \\ f_i(2i+1, 0) &= 0, \\ f_i(2i+1, 1) &= i+1, \\ f_i(2i+1, 2) &= 2i+1. \end{aligned}$$

Теперь легко видеть, что выполнено условие  $f_i(2i+1, y) = f_i(2i-1, y) + y = f_{i-1}(2i-1, y)$  при  $y \in [0, 2]$ .

- $E_2^{i+1} \cap E_3^{i+1}$ : в этом случае  $E_2^{i+1} \cap E_3^{i+1} = \{2\} \times [2i+1, 2i+3]$ . Надо проверить, что при  $y \in [2i+1, 2i+3]$  верно  $f_i(0, y-2) + 2 = f_i(2, y-2) - y + 3$ . В целом это делается аналогично случаю с  $E_1^{i+1} \cap E_4^{i+1}$ .
- $E_2^{i+1} \cap E_4^{i+1}$ : в этом случае  $E_2^{i+1} \cap E_4^{i+1} = [2i+1, 2i+3] \times \{2\}$ . Надо проверить, что при  $x \in [2i+1, 2i+3]$  верно  $f_i(x-2, 0) + x = f_i(x-2, 2) + 2$ . В целом это делается аналогично случаю с  $E_1^{i+1} \cap E_3^{i+1}$ .
- $E_1^{i+1} \cap E_2^{i+1}$ : в этом случае  $E_1^{i+1} \cap E_2^{i+1} = [2, 2i+1] \times [2, 2i+1]$ . Надо проверить, что при  $(x, y) \in [2, 2i+1]^2$  выполнено

$$f_i(x, y) = f_i(x-2, y-2) + x.$$

А это верно по предположению индукции, так как это в точности свойство 7.

Теперь осталось проверить корректность определения функции  $f_{i+1}$  на пересечениях  $B_b^{i+1} \cap E_j^{i+1}, B_t^{i+1} \cap E_j^{i+1}$ .

- $B_b^{i+1} \cap E_1^{i+1}$ : в этом случае необходимо проверить равенство

$$\left[ \frac{i+1}{2i+1}xy - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right] f_i(x, y) \stackrel{?}{=} f_{i+1}(x, y) = \left[ \frac{i+2}{2i+3}xy - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right]$$

на множестве  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2i+1]$ . Понятно, что при  $x = 0$  это верно, надо проверить равенство при  $x = 1$ :

$$\left[ \frac{i+1}{2i+1}y - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right] = \left[ \frac{i+2}{2i+3}y - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right].$$

Пусть  $y = 2t + q$ , где  $t \in \mathbb{Z}, q \in \{0, 1\}$ . Тогда это равенство можно переписать следующим образом:

$$\left[ t + \frac{q}{4i+2} - t^2 - tq - \frac{1+q^2}{4} \right] = \left[ t + \frac{q}{4i+6} - t^2 - tq - \frac{1+q^2}{4} \right],$$

что равносильно  $\left[ \frac{q}{4i+2} - \frac{1+q^2}{4} \right] = \left[ \frac{q}{4i+6} - \frac{1+q^2}{4} \right]$ . В таком виде уже понятно, что левая и правая части равны 0.

- $B_b^{i+1} \cap E_2^{i+1}$ : в этом случае необходимо проверить равенство

$$\left[ \frac{i+1}{2i+1}(x-2)(y-2) - \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{1}{4} \right] + x = f_i(x-2, y-2) + x \stackrel{?}{=} f_{i+1}(x, y) = \left[ \frac{i+2}{2i+3}xy - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right]$$

при  $(x, y) \in [2i+2, 2i+3] \times [2, 2i+3]$ . Для начала разберём случай  $x = 2i+3$ , равенство станет следующим:

$$\left[ (i+1)(y-2) - \frac{y^2}{4} + y - 1 - \frac{1}{4} \right] + 2i+3 = \left[ (i+2)y - \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} \right],$$

что равносильно  $(i+2)y + \left[ -\frac{y^2+1}{4} \right] = (i+2)y + \left[ -\frac{y^2+1}{4} \right]$ .

Теперь рассмотрим случай  $x = 2i+2$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2i(i+1)}{2i+1}(y-2) - \frac{y^2+1}{4} + y - 1 \right] + 2i+2 &= \left[ \frac{(2i+2)(i+2)}{2i+3}y - \frac{y^2+1}{4} \right], \\ i(y-2) + y - 1 + \left[ \frac{i}{2i+1}(y-2) - \frac{y^2+1}{4} \right] + 2i+2 &= (i+1)y + \left[ \frac{i+1}{2i+3}y - \frac{y^2+1}{4} \right], \\ \left[ \frac{i}{2i+1}(y-2) - \frac{y^2+1}{4} \right] + 1 &= \left[ \frac{i+1}{2i+3}y - \frac{y^2+1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Опять обозначим  $y = 2t + q$ , тогда это равенство можно переписать:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2it+qi-2i}{2i+1} - t^2 - qt - \frac{1+q^2}{4} \right] + 1 &= \left[ \frac{2it+2t+qi+q}{2i+3} - t^2 - qt - \frac{1+q^2}{4} \right], \\ \left[ t-1 + \frac{qi-t+1}{2i+1} - \frac{1+q^2}{4} \right] + 1 &= t + \left[ \frac{qi-t+q}{2i+3} - \frac{1+q^2}{4} \right], \\ \left[ \frac{qi-t+1}{2i+1} - \frac{1+q^2}{4} \right] &= \left[ \frac{qi-t+q}{2i+3} - \frac{1+q^2}{4} \right]. \end{aligned}$$

И тут, если  $q = 0$ , то

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &< \frac{-i}{2i+1} \leq \frac{qi-t+1}{2i+1} \leq 0, \\ -\frac{1}{2} &< \frac{-i-1}{2i+3} \leq \frac{qi-t+q}{2i+3} \leq \frac{-1}{2i+3}. \end{aligned}$$

А значит выражения выше будут равны 0.

Если же  $q = 1$ , то

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{qi-t+1}{2i+1} \leq \frac{i}{2i+1} < \frac{1}{2}, \\ 0 &\leq \frac{qi-t+q}{2i+3} \leq \frac{i}{2i+3} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

И опять же, оба выражения выше будут равны 0.

- $B_b^{i+1} \cap E_3^{i+1}$ : в этом случае никакого пересечения нет.
- $B_b^{i+1} \cap E_4^{i+1}$ : в этом случае надо доказать

$$\begin{aligned} \left[ \frac{i+1}{2i+1}(x-2)y - \frac{y^2+1}{4} \right] + y &= f_i(x-2, y) + y \stackrel{?}{=} \\ f_{i+1}(x, y) &= \left[ \frac{i+2}{2i+3}xy - \frac{y^2+1}{4} \right] \end{aligned}$$

для  $(x, y) \in [2i+1, 2i+3] \times [0, 1] \cup [2i+2, 2i+3] \times \{2\}$ . Случаи с  $y = 0$  или  $x = 2i+3$  тривиальны. Остаётся рассмотреть три случая  $(2i+1, 1)$ ,  $(2i+2, 1)$ ,  $(2i+2, 2)$ .

Если  $(x, y) = (2i+1, 1)$ , то

$$\begin{aligned} \left[ \frac{i+1}{2i+1}(x-2)y - \frac{y^2+1}{4} \right] + y &= \left[ \frac{(i+1)(2i-1)}{2i+1} - \frac{1}{2} \right] + 1 = \\ \left[ i - \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2} \right] + 1 &= i+1, \\ \left[ \frac{i+2}{2i+3}xy - \frac{y^2+1}{4} \right] &= \left[ \frac{(i+2)(2i+1)}{2i+3} - \frac{1}{2} \right] = \\ \left[ i+1 - \frac{1}{2i+3} - \frac{1}{2} \right] &= i+1. \end{aligned}$$

Если  $(x, y) = (2i + 2, 1)$ , то

$$\begin{aligned} \left[ \frac{i+1}{2i+1}(x-2)y - \frac{y^2+1}{4} \right] + y &= \left[ \frac{2i(i+1)}{2i+1} - \frac{1}{2} \right] + 1 = \\ \left[ i + \frac{i}{2i+1} - \frac{1}{2} \right] + 1 &= i + 1, \\ \left[ \frac{i+2}{2i+3}xy - \frac{y^2+1}{4} \right] &= \left[ \frac{(i+2)(2i+2)}{2i+3} - \frac{1}{2} \right] = \\ \left[ i + 1 + \frac{i+1}{2i+3} - \frac{1}{2} \right] &= i + 1. \end{aligned}$$

Если  $(x, y) = (2i + 2, 2)$ , то

$$\begin{aligned} \left[ \frac{i+1}{2i+1}(x-2)y - \frac{y^2+1}{4} \right] + y &= \left[ \frac{4i(i+1)}{2i+1} - 1 - \frac{1}{4} \right] + 2 = \\ \left[ 2i + 1 - \frac{1}{2i+1} - 1 - \frac{1}{4} \right] + 2 &= 2i + 2, \\ \left[ \frac{i+2}{2i+3}xy - \frac{y^2+1}{4} \right] &= \left[ \frac{2(i+2)(2i+2)}{2i+3} - 1 - \frac{1}{4} \right] = \\ \left[ 2i + 3 - \frac{1}{2i+3} - 1 - \frac{1}{4} \right] &= 2i + 2. \end{aligned}$$

Проверка корректности определения функции  $f_{i+1}$  на пересечениях  $B_t^{i+1} \cap E_j^{i+1}$  абсолютно аналогична.

На этом доказательство завершено.  $\square$

**Лемма 8.1.** Для функций  $f_i$  при  $i \geq 2$  верно следующее:

$$f_{i+1}(x, y) = f_i(x, y)$$

для всех  $(x, y) \in [-1, 2i + 1]^2$ .

*Доказательство.* По определению функций  $f_i$  это условие выполнено на множестве  $[0, 2i + 1]^2$ .

Рассмотрим  $x = -1$ ,  $y \in [0, 2i + 1]$ . Тогда

$$\begin{aligned}
f_i(-1, y) &\stackrel{3}{=} f_i(2i, y) - (i + 1)y \stackrel{2}{=} \left[ \frac{2i(i + 1)}{2i + 1}y - \frac{y^2 + 1}{4} \right] - (i + 1)y = \\
&\left[ iy + \frac{i}{2i + 1}y - \frac{y^2 + 1}{4} \right] - (i + 1)y = \left[ \frac{i}{2i + 1}y - \frac{y^2 + 1}{4} \right] - y, \\
f_{i+1}(-1, y) &\stackrel{3}{=} f_{i+1}(2i + 2, y) - (i + 2)y \stackrel{2}{=} \left[ \frac{(2i + 2)(i + 2)}{2i + 3}y - \frac{y^2 + 1}{4} \right] - (i + 2)y = \\
&\left[ i + 1 + \frac{i + 1}{2i + 3} - \frac{y^2 + 1}{4} \right] - (i + 2)y = \left[ \frac{i + 1}{2i + 3}y - \frac{y^2 + 1}{4} \right] - y.
\end{aligned}$$

Над знаками равенства написаны номера применённых свойств функций  $f_i$ . Осталось показать, что  $\left[ \frac{i}{2i+1}y - \frac{y^2+1}{4} \right] = \left[ \frac{i+1}{2i+3}y - \frac{y^2+1}{4} \right]$ . Ранее мы уже проводили доказательство аналогичных фактов, так что тут его опустим.

Рассмотрим  $y = -1$ ,  $x \in [3, 2i + 1]$ . Тогда

$$\begin{aligned}
f_i(x, -1) &\stackrel{4}{=} f_i(x - 3, 2i) - (1 + i)(x - 3) + 2i(i + 2) - i^2 - 4i - 2 = \\
f_i(x - 3, 2i) - (1 + i)x + i^2 + 3i + 1 &\stackrel{1}{=} \left[ \frac{2i(i + 1)}{2i + 1}(x - 3) - i^2 \right] - (1 + i)x + i^2 + 3i + 1 = \\
\left[ ix - 3i + \frac{i}{2i + 1}x - \frac{3i}{2i + 1} \right] - (1 + i)x + 3i + 1 &= \left[ \frac{i}{2i + 1}x - 1 - \frac{i - 1}{2i + 1} \right] - x + 1 = \\
\left[ \frac{i}{2i + 1}x - \frac{i - 1}{2i + 1} \right] - x.
\end{aligned}$$

Так что нам надо проверить равенство  $\left[ \frac{i}{2i+1}x - \frac{i-1}{2i+1} \right] = \left[ \frac{i+1}{2i+3}x - \frac{i}{2i+3} \right]$ , это мы тоже опустим.

И, последний случай, рассмотрим  $y = -1$ ,  $x \in [-1, 3]$ . Тогда

$$\begin{aligned}
f_i(x, -1) &\stackrel{5}{=} f_i(x + 2i - 2, 2i) - (i + 1)x - 1 - i^2 + i + 2 \stackrel{1}{=} \\
\left[ \frac{2i(i + 1)}{2i + 1}(x + 2i - 2) - i^2 \right] - (i + 1)x - i^2 + i + 1 &= \\
\left[ ix + \frac{i}{2i + 1}x + 2i^2 - 2i + \frac{2i^2 - 2i}{2i + 1} - i^2 \right] - (i + 1)x - i^2 + i + 1 &= \\
\left[ \frac{i}{2i + 1}x + \frac{2i^2 - 2i}{2i + 1} \right] - x - i + 1 = \left[ \frac{i}{2i + 1}x + i - 1 - \frac{i - 1}{2i + 1} \right] - x - i + 1 &= \\
\left[ \frac{i}{2i + 1}x - \frac{i - 1}{2i + 1} \right] - x.
\end{aligned}$$

Значит осталось показать, что  $\left\lceil \frac{i}{2i+1}x - \frac{i-1}{2i+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{i+1}{2i+3}x - \frac{i}{2i+3} \right\rceil$ , это мы тоже опустим.

На этом доказательство леммы завершено.  $\square$

**Лемма 8.2.** Лапласиан  $\Delta f_i: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  функций, построенных в предыдущей лемме, удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta f_i(x, y) = \Delta f_i(x + (2i + 1), y) = \Delta f_i(x + 3, y - (2i + 1)) \quad \text{для всех } (x, y) \in \mathbb{Z}^2.$$

*Доказательство.* Это сразу следует из свойств 3-5 функции  $f_i$  и того факта, что лапласиан линейных функций равен нулю.  $\square$

**Предложение 8.2.** Лапласиан  $\Delta f_i$  удовлетворяет условию

$$\Delta f_i \leq 1.$$

*Доказательство.* Поскольку функция  $\Delta f_i$  периодична с периодами  $(2i+1, 0)$ ,  $(3, -2i-1)$ , то условие достаточно проверить на множестве  $[0, 2i] \times [0, 2i]$ . При  $i = 2$  мы можем честно посчитать этот лапласиан, поскольку задали конкретную функцию, на множестве  $[0, 4]^2$  он получается следующим:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 1 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Для  $i > 2$  докажем это по индукции. Пусть для всех меньших  $i$  это верно. Нам необходимо доказать, что  $\Delta f_{i+1} \leq 1$  на множестве  $[0, 2i + 2]^2$ .

Мы знаем, что

$$\begin{aligned} f_{i+1}(x, y) &= f_i(x, y) && \text{при } (x, y) \in [-1, 2i + 1]^2, \\ f_{i+1}(x, y) &= f_i(x - 2, y - 2) + x && \text{при } (x, y) \in [2, 2i + 3]^2. \end{aligned}$$

Из этого сразу следует, что  $\Delta f_i$  и  $\Delta f_{i+1}$  совпадают на множествах  $[0, 2i]^2$  и  $[3, 2i + 2]^2$ . Так что на этих множествах  $\Delta f_{i+1} \leq 1$  по предположению индукции.

Осталось доказать это неравенство для множеств  $[0, 2] \times [2i + 1, 2i + 2]$  и  $[2i + 1, 2i + 2] \times [0, 2]$ . Для этого достаточно вычислить значения  $f_{i+1}$  на множествах  $[-1, 3] \times [2i, 2i + 3]$  и  $[2i, 2i + 3] \times [-1, 3]$ . Это можно сделать, используя все свойства функции  $f_{i+1}$ , как мы это делали раньше.

Для экономии места опустим все вычисления и сразу перейдём к результату, функция  $f_{i+1}$  на множестве  $[-1, 3] \times [2i, 2i + 3]$  равна

$$\begin{array}{ccccc} -i^2 - 4i - 4 & -i^2 - 3i - 2 & -i^2 - 2i & -i^2 - i + 2 & -i^2 + 4 \\ -i^2 - 3i - 2 & -i^2 - 2i - 1 & -i^2 - i + 1 & -i^2 + 2 & -i^2 + i + 4 \\ -i^2 - 2i - 1 & -i^2 - i & -i^2 + 1 & -i^2 + i + 2 & -i^2 + 2i + 3 \\ -i^2 - i & -i^2 & -i^2 + i + 1 & -i^2 + 2i + 1 & -i^2 + 3i + 2 \end{array}$$

А значит функция  $\Delta f_{i+1}$  на множестве  $[0, 2] \times [2i + 1, 2i + 2]$  равна

$$\begin{array}{ccc} 1 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{array}$$

Функция  $f_{i+1}$  на множестве  $[2i, 2i + 3] \times [-1, 3]$  равна

$$\begin{array}{cccc} 3i - 1 & 3i + 1 & 3i + 2 & 3i + 4 \\ 2i & 2i + 1 & 2i + 2 & 2i + 3 \\ i & i + 1 & i + 1 & i + 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & -i - 1 & -i - 1 & -i - 2 \end{array}$$

А значит функция  $\Delta f_{i+1}$  на множестве  $[2i + 1, 2i + 2] \times [0, 2]$  равна

$$\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Таким образом, утверждение доказано.  $\square$

Также стоит отметить, что при доказательстве теоремы мы показали, что определённые нами ранее паттерны  $P_i$  связаны с функциями  $f_i$  следующим образом:

$$P_i - 6 = \Delta f_i.$$

Действительно, ведь чтобы построить паттерн  $P_{i+1}$  из  $P_i$ , мы сдвигали второй на  $(2, 2)$ , а также доопределяли в углах квадрата. И действительно, в доказательстве теоремы функция  $\Delta f_i$  также сдвигалась на  $(2, 2)$  и отдельно определялись значения в углах, которые на самом деле совпали со значениями  $P_{i+1} - 6$ .

**Определение 8.1.** Введём дополнительное обозначение

$$A_i = \frac{1}{(2i + 1)^2} \begin{pmatrix} 0 & (i + 1)(2i + 1) \\ (i + 1)(2i + 1) & -2i^2 - 2i + 1 \end{pmatrix}.$$

А также определим множество  $L_i \subset \mathbb{Z}^2$ , порождённое элементами  $(2i + 1, 0), (3, -2i - 1)$ . То есть

$$L_i = \{a \cdot (2i + 1, 0) + b \cdot (3, -2i - 1) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Интуитивно, множество  $L_i$  — это все вектора, сдвиг на которые не поменяет функцию  $\Delta f_i$ .

**Лемма 8.3.** Для всякого элемента  $v \in L_i$  и всякого  $x \in \mathbb{Z}^2$  верно

$$f_i(x + v) = f_i(x) + x^T A_i v + f_i(v).$$

*Доказательство.* Это немедленно следует из свойств 3 – 5 функций  $f_i$ .  $\square$

**Определение 8.2.** Будем называть множество  $X \subset \mathbb{Z}^2$  *связным*, если для всяких  $x, y \in X$  существует последовательность  $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$  такая, что  $x_j \in X$  и  $|x_j - x_{j-1}| \leq \sqrt{2}$  для всех  $j = 1, \dots, k$ .

Будем называть ограниченное множество  $X$  *простым связным*, если множество  $\mathbb{Z}^2 \setminus X$  связно.

**Теорема 8.1.** Для всех  $i \geq 2$  существует единственное бесконечное связное множество  $X \subset \mathbb{Z}^2$  такое, что  $\Delta(f_i + \mathbf{1}_X) \leq 1$ , и это множество  $X = \mathbb{Z}^2$ .

*Доказательство.* Пусть  $X \subset \mathbb{Z}^2$  бесконечное и связное множество, обозначим за  $X^C = \mathbb{Z}^2 \setminus X$  его дополнение. Если  $\bar{X}$  — дополнение любой связной компоненты множества  $X^C$ , тогда  $\Delta \mathbf{1}_{\bar{X}} \leq \Delta \mathbf{1}_X$ . В таком случае множество  $\bar{X}$  также подходит под условие. Так что можем считать, что множество  $X^C$  связно.

Введём дополнительное обозначение  $B_i = [0, 2i + 1]^2 \setminus [1, 2i]^2$  — это граница множества  $[0, 2i + 1]^2$ . Если множество  $X^C$  пересекается с каким-нибудь сдвигом множества  $B_i$  на вектор из  $L_i$ , тогда, поскольку множества  $X$  и  $X^C$  связные, существуют соседние точки  $(x, y), (x', y')$  такие, что они обе лежат на сдвигах множества  $B_i$ , а также  $(x', y') \in X, (x, y) \in X^C$ , из этого следует, что  $\Delta \mathbf{1}_X(x, y) > 0$ .

Здесь стоит рассмотреть несколько случаев, какими свойствами может обладать найденная точка  $(x, y)$ . Из приведённых выше примеров в таблице 7 и способа построения исследуемых паттернов легко следует, что мы рассмотрим все случаи:

1. Допустим  $\Delta f_i(x, y) = 1$ . Мы сразу приходим к противоречию с условием  $\Delta(f_i + \mathbf{1}_X) \leq 1$ , поскольку  $\Delta \mathbf{1}_X(x, y) > 0$ .

2. Допустим функция  $\Delta f_i$  имеет на множестве  $[x-1, x+1] \times [y-1, y+1]$  следующий вид:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & -2 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 \end{array}$$

Если все четыре точки, в которых  $\Delta f_i$  равно 1 не лежат во множестве  $X$ , то тогда и все соседи этих точек не лежат во множестве  $X$ , иначе было бы  $\Delta \mathbf{1}_X(x') > 0$  для такой точки и получилось бы противоречие с условием  $\Delta(f_i + \mathbf{1}_X) \leq 1$ . А значит и все соседи точки  $(x, y)$  не лежат во множестве  $X$ , это приводит к противоречию с тем, что  $\Delta \mathbf{1}_X(x, y) > 0$ .

Если среди этих четырёх точек есть как лежащие в  $X$ , так и не лежащие, то среди них найдётся пара соседних точек  $x', x''$ , одна из которых лежит в  $X$ , а другая не лежит в  $X$ . Пусть, не умаляя общности,  $x' \notin X$ , тогда  $\Delta \mathbf{1}_X(x') > 0$ , пришли к противоречию.

Если же все четыре точки лежат в  $X$ , то  $\Delta \mathbf{1}_X(x) \geq 4$ , а значит  $\Delta(f_i + \mathbf{1}_X)(x) \geq 2$ , противоречие.

3. Случай, когда функция  $f_i$  имеет на множестве  $[x-1, x+1] \times [y-1, y+1]$  следующий вид, разбирается аналогично:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{array}$$

4. Пусть функция  $f_i$  имеет на множестве  $[x-1, x+1] \times [y-1, y+1]$  следующий вид:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{array}$$

Для разбора этого случая пригодится существование соседа  $(x', y')$ . В этом случае на его роль могут подходить вершины  $(x+1, y)$ ,  $(x-1, y)$ ,  $(x, y-1)$ , поскольку только они лежат на сдвиге множества  $B_i$ . Но у каждой из этих вершин есть соседка-вершина из множества  $[x-1, x+1] \times [y-1, y+1]$  с лапласианом, равным единице. Это означает, что эта соседка-вершина тоже будет лежать во множестве  $X$ . Но тогда у вершины  $(x, y)$  будет сразу два соседа, лежащие в  $X$ , что приводит нас к противоречию.

5. Случай, когда функция  $f_i$  имеет на множестве  $[x-1, x+1] \times [y-1, y+1]$

один из следующих видов, разбираются аналогично:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \cdot & 1 & & \cdot & 1 & \cdot \\ & \cdot & 0 & \cdot & & \cdot & 0 & \cdot \\ & & \cdot & 1 & \cdot & & 1 & \cdot & 1 \end{array}$$

Разобрав все случаи мы доказали, что множество  $X^C$  не может пересекаться с каким-нибудь сдвигом множества  $B_i$  на вектор из  $L_i$ . Так что мы можем считать, что множество  $X^C$  полностью содержится во множестве  $[1, 2i]^2$ .

Для дальнейшего доказательства нам понадобится вспомогательная лемма.

**Лемма 8.4.** Если множество  $X$  таково, что  $\Delta(f_i + \mathbf{1}_X) \leq 1$  и множество  $(\{0\} \times [2i-2, 2i+1]) \cup ([0, 2i+1] \times \{2i+1\}) \cup (\{2i+1\} \times [0, 2i+1]) \cup ([2i-2, 2i+1] \times \{0\})$  лежит в  $X$ , то  $([0, 2i+1] \times [2i-1, 2i+1]) \cup ([2i-1, 2i+1] \times [0, 2i+1]) \subset X$ .

*Доказательство.* Доказывать будем по индукции. Докажем для  $i = 2$ . Мы знаем, что  $\Delta f_2$  на множестве  $[0, 5] \times [0, 5]$  равна

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -4 & 1 & -5 & -2 & \cdot \\ \cdot & -2 & -2 & -5 & 1 & \cdot \\ \cdot & -5 & -2 & -2 & -1 & \cdot \\ -2 & -5 & 1 & -4 & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Точкой обозначены вершины, которые точно принадлежат множеству  $X$ . Заметим, что в вершинах  $(2, 4)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(4, 1)$  лапласиан равен 1 и у этих вершин есть соседи, точно лежащие в  $X$ . Значит эти вершины тоже лежат в  $X$ , иначе было бы противоречие с условием  $\Delta(f_i + \mathbf{1}_X) \leq 1$ . Аналогично  $(4, 4) \in X$  поскольку лапласиан в этой вершине равен  $-2$  и она имеет 4 соседей, которые лежат в  $X$ . Таким же образом получаем  $(4, 2) \in X$ . Опишем сделанные выводы наглядным образом:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdot & \cdot \\ \cdot & -4 & \mathbf{1} & -5 & -\mathbf{2} & \cdot & \cdot & -4 & \cdot & -5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & -2 & -5 & \mathbf{1} & \cdot & \cdot & -2 & -2 & -5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -5 & -2 & -2 & -\mathbf{1} & \cdot & \rightarrow & \cdot & -5 & -2 & -2 & \cdot & \cdot \\ -2 & -5 & \mathbf{1} & -4 & \mathbf{1} & \cdot & \cdot & -2 & -5 & \cdot & -4 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Сделаем ещё один аналогичный шаг:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & -4 & \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & -2 & -2 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & -5 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & -5 & -2 & -2 & \cdot & \cdot & \rightarrow & \cdot & -5 & -2 & \cdot & \cdot \\
 -2 & -5 & \cdot & -4 & \cdot & \cdot & -2 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

И ещё один шаг:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & -2 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & -5 & -2 & \cdot & \cdot & \cdot & \rightarrow & \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 -2 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

И остался последний шаг:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & -5 & \cdot \\
 \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \rightarrow & \cdot & -5 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 -2 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Таким образом базу индукции мы доказали. Также стоит отметить, что если  $[0, 5]^2 \setminus [2, 4]^2 \subset X$ , то мы бы получили  $[0, 5]^2 \subset X$ . Этот факт в будущем послужит базой индукции для доказательства основного утверждения.

Теперь необходимо доказать переход от  $i$  к  $i + 1$ . Мы знаем, что функция  $\Delta f_{i+1}$  на множестве  $[0, 3] \times [2i, 2i + 3]$  равна следующему:

$$\begin{array}{cccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & -4 & 1 & -4 \\
 \cdot & -2 & -1 & -2 \\
 \cdot & -4 & 1 & -4
 \end{array}$$

Опять же точками обозначены вершины, которые точно лежат в  $X$ . Проведём аналогичные рассуждения:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & -4 & \mathbf{1} & -4 & \cdot & -4 & \cdot & -4 & \cdot & \cdot & \cdot & -4 & \cdot & \cdot & \cdot & -4 \\
 \cdot & -2 & -1 & -2 & \rightarrow & \cdot & -2 & -1 & -2 & \rightarrow & \cdot & \cdot & -1 & -2 & \rightarrow & \cdot & \cdot & \cdot & -2 \\
 \cdot & -4 & 1 & -4 & \cdot & -4 & 1 & -4 & \cdot & -4 & \mathbf{1} & -4 & \cdot & -4 & \cdot & -4 & \cdot & -4
 \end{array}$$

Таким образом мы получили, что  $\{2\} \times [2i, 2i + 3] \subset X$ . Таким же образом можно получить, что  $[2i, 2i + 3] \times \{2\} \subset X$ . Теперь множество  $(\{2\} \times [2i, 2i + 3]) \cup ([2, 2i + 3] \times \{2i + 3\}) \cup (\{2i + 3\} \times [2, 2i + 3]) \cup ([2i, 2i + 3] \times \{2\})$  лежит в  $X$ . Вспомнив, что функция  $\Delta f_{i+1}$  на множестве  $[3, 2i + 3]^2$  совпадает с  $\Delta f_i$  на множестве  $[1, 2i + 1]^2$ , и применив индукционное предположение, мы получим, что и множество  $([2, 2i + 3] \times [2i + 1, 2i + 3]) \cup ([2, 2i + 3] \times [2i + 1, 2i + 3])$  лежит в  $X$ . Выше мы показали, что и  $([0, 2] \times [2i + 1, 2i + 3]) \cup ([2i + 1, 2i + 3] \times [0, 2])$  лежит в  $X$ , так что таким образом мы доказали эту лемму.  $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Нам осталось доказать, что если  $X^C$  — связное множество и  $X^C \subset [1, 2i]^2$ , то  $X^C = \emptyset$ . Давайте доказывать это по индукции. База при  $i = 2$  была доказана по ходу доказательства леммы выше. Докажем переход.

Мы знаем, что  $X^C \subset [1, 2i + 2]^2$ , так что  $[0, 2i + 3]^2 \setminus [1, 2i + 2]^2 \subset X$ . Применяя лемму, мы получаем, что  $([0, 2i + 3] \times [2i + 1, 2i + 3]) \cup ([2i + 1, 2i + 3] \times [0, 2i + 3]) \subset X$ . Или, другими словами,  $X^C \subset [1, 2i]^2$ . Вспоминая, что функции  $\Delta f_{i+1}$  и  $f_i$  совпадают на множестве  $[0, 2i]^2$ , мы можем применить индукционное предположение и прийти к выводу, что  $X^C = \emptyset$ .

Таким образом, доказательство теоремы закончено.  $\square$

**Лемма 8.5.** Пусть функция  $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  такова, что  $\Delta g \leq 1$ ,  $\Delta g$  имеет два периода, единственное бесконечное связное множество  $X \subset \mathbb{Z}^2$  такое, что  $\Delta(g + \mathbf{1}_X) \leq 1$  — это  $X = \mathbb{Z}^2$ .

Тогда не существует такой функции  $h: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , что  $h \geq g$ ,  $\Delta h \leq 1$  и функция  $|g - h|$  неограничена.

*Доказательство.* Допустим такая функция  $h$  существует. Давайте сразу заменим функцию  $h$  на  $h - \min_{x \in \mathbb{Z}^2} (h - g)$ , чтобы множество  $\{x \mid h(x) - g(x) = 0\}$  было непустым. Используя монотонность лапласиана, можно видеть, что функция  $f = \min(h, g + 1)$  удовлетворяет условию  $\Delta f \leq 1$  и  $f - g \in \{0, 1\}$ .

Поскольку функция  $h - g$  неограничена, а функция  $\Delta(h - g)$  ограничена сверху (так как  $\Delta h$  ограничена сверху, а функция  $\Delta g$  имеет два периода), множество  $\{h \neq g\} = \{f - g = 1\}$  содержит сколь угодно большие связные компоненты. Отметим, что если  $X$  — связная компонента множества  $\{f - g = 1\}$ , то  $\Delta(g + \mathbf{1}_X) \leq 1$ .

Пусть  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность связных компонент множества  $\{f - g = 1\}$  такая, что  $|X_n| \rightarrow \infty$ . Поскольку множество  $\{f - g = 0\}$  непусто, мы можем выбрать точку  $x_n \in \{f - g = 0\}$  такую, что  $x_n$  является соседом какой-нибудь точки из  $X_n$ . Используя тот факт, что функция  $\Delta g$  имеет два периода, мы можем сдвинуть множество  $X_n$  и точку  $x_n$  так, чтобы все  $x_n$  лежали в одном и том же периоде  $\Delta g$ . Поскольку этот период конечен, мы

можем выбрать постоянную подпоследовательность  $x_{n_k}$ , то есть для всяких  $k, k'$  верно  $x_{n_k} = x_{n_{k'}}$ . Так что теперь можно считать, что  $x_n$  — постоянная последовательность и  $x_n = x^*$ .

Ещё раз выберем подпоследовательность  $\{n_k\}$  таким образом, чтобы для всякого  $r \in \mathbb{N}$  множество  $X_{n_k} \cap \{y \in \mathbb{Z}^2 \mid |y - x^*| \leq r\}$  не зависит от  $k \geq r$ . Тогда множество  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{n_k}$  существует и содержит бесконечную связную компоненту  $X^*$ . При этом  $X^* \neq \mathbb{Z}^2$ , так как  $x^* \notin X^*$  и  $\Delta(g + \mathbf{1}_{X^*}) \leq 1$ , что противоречит нашим предположениям.  $\square$

**Теорема 8.2.** Для всякого  $i \geq 2$ , функция  $f_i$  максимальна в смысле теоремы 2.2.

*Доказательство.* Следует из предыдущей леммы, так как функция  $f_i$  обладает всеми необходимыми свойствами.  $\square$

## Список литературы

- [1] Levine, Lionel; Pegden, Wesley; Smart, Charles K. (2016). Apollonian structure in the Abelian sandpile. *Geometric and Functional Analysis*, 26(1), 306–336.
- [2] Pegden, Wesley; Smart, Charles K. (2013). Convergence of the Abelian sandpile. *Duke Mathematical Journal*, 162(4), 627–642.
- [3] Lionel Levine. Wesley Pegden. Charles Smart. "The Apollonian structure of integer superharmonic matrices." *Ann. of Math. (2)* 186 (1) 1 - 67, July 2017.
- [4] D. Rossin. Propriétés combinatoires de certaines familles d'automates cellulaires, Ph.D. Thesis, Ecole Polytechnique (2000).