Санкт-Петербургский государственный университет

Нигомедьянов Даниил Дамирович

Выпускная квалификационная работа

Построение бесконечной серии трехмерных гиперболических многообразий, сложности которых известны

Программа магистратуры:
Направление 01.04.01 "Математика"
Образовательная программа ВМ.5832.2021 "Современная математика"

Научный руководитель:
доцент факультета Математики
и компьютерных наук СПбГУ,
доктор ф.-м. наук,
Фоминых Евгений Анатольевич

Рецензент:
научный сотрудник
математического факультета
ЧелГУ,
кандидат ф.-м. наук,
Таркаев Владимир Викторович.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

Обозначения

Общепринятые обозначения.

P – специальный полиэдр (с краем)

SP – особый граф специального полиэдра P (с краем)

M – компактное 3-многообразие с краем

∂M – край многообразия M

$c_\Delta(M)$ – триангуляционная сложность многообразия M

$\mathcal{T}$ – идеальная триангуляция

α – 2-клетка (специального полиэдра)

$\partial\alpha$ – граничная кривая 2-клетки α

Обозначение основных множеств объектов и отображений.

$\mathfrak{T}_e$ – множество гомологически минимальных триангуляций обладающих чётными рёбрами

$\mathcal{M}_h$ – множество компактных 3-многообразий с краем, обладающих гомологически минимальными триангуляциями

$\mathcal{M}_e$ – класс многообразий, обладающих идеальными триангуляциями из $\mathcal{T}_e$

$\mathcal{M}_o^1$ – класс многообразий, обладающих гомологически минимальными триангуляциями содержащими ровно одно рёбро

$\mathcal{M}_o^2$ – класс многообразий, обладающих гомологически минимальными триангуляциями содержащими ровно три нечётных рёбра

$\mathfrak{P}_e^*$ – множество гомологически минимальных полиэдров

$\mathfrak{P}_e$ – множество утолщаемых гомологически минимальных полиэдров

$\mathfrak{S}^*$ – множество шаблонов

$\mathfrak{S}$ – множество утолщаемых шаблонов

$\mathfrak{S}^c$ – множество шаблонов с противоходом

$\mathcal{D}$ – комбинаторное разложение

$\mathcal{A}$ – множество допустимых пар

Технические обозначения.

S – шаблон

(Φ, Γ, γ) – оснащённая поверхность

$(\Phi^S, \Gamma^S, \gamma^S)$ – оснащённая поверхность шаблона S

Γ_0^S – граф шаблона S, дополняющий набор оснащённых поверхностей того же шаблона

ϕ^S – биекция шаблона S

AG^S – граф, ассоциированный с шаблоном S

$\mathtt{d} = \mathtt{d}(P)$ – число 2-клеток специального полиэдра P

1. Введение

В данной работе рассматриваются исключительно компактные 3-многообразия с непустым краем. Пусть Δ обозначает стандартный тетраэдр. *Идеальной триангуляцией* компактного 3-многообразия M с непустым краем называется реализация внутренности M в виде склейки конечного числа копий Δ с удалёнными вершинами по аффинным гомеоморфизмам их граней. Идеальная триангуляция многообразия M называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число тетраэдров среди всех идеальных триангуляций данного многообразия. Число тетраэдров в минимальной идеальной триангуляции многообразия M называется *триангуляционной сложностью* и обозначается через $c_\Delta(M)$.

Триангуляционную сложность, как и многие другие инварианты аналогичного типа, довольно трудно вычислять. В первую очередь точные значения триангуляционной сложности известны для многообразий, табулированных при помощи компьютера. Полная таблица ориентируемых гиперболических многообразий с каспами до сложности 9 включительно, описанная в [1], содержит 162 182 минимальных идеальных триангуляций для 61 911 многообразий. Все эти многообразия вместе с триангуляциями включены в компьютерные программы SnapPy [2] и Regina [3]. В [4] перечисляются все гиперболические многообразия с каспами, получающиеся склейкой правильных гиперболических идеальных тетраэдров, до сложности 25 включительно. М. Фуджи в [5] показал, что имеется лишь 8 различных ориентируемых гиперболических 3-многообразий с вполне геодезическим краем сложности 2. В последствии Р. Фриджерио, Б. Мартелли и К. Петронио классифицировали в [6] все компактные ориентируемые гиперболические 3-многообразия конечного объема с непустым вполне геодезическим краем до сложности 4 включительно.

На данный момент известны лишь несколько бесконечных серий компактных связных 3-многообразий с краем, для которых удалось установить точное значение триангуляционной сложности. Первая бесконечная серия была описана Р. Фриджерио, Б. Мартелли и К. Петронио в работе [7]. Многообразия этой серии обладают идеальными триангуляциями с единственным ребром. Вопрос минимальности идеальных триангуляций, обладающих ровно двумя рёбрами был исследован А. Ю. Весниным, В. Г. Тураевым и Е. А. Фоминых в работе [8]. В работе [9] А. В. Малютин, Е. А. Фоминых и Е. В. Шумакова установили точное значение триангуляционной сложности для бесконечного семейства 3-многообразий с краем, задаваемых 4-регулярными графами с тремя эйлеровыми циклами. Минимальные идеальные триангуляции таких многообразий содержат в точности три ребра.

В работе [10] Р. Фриджерио, Б. Мартелли и К. Петронио описали двухпараметрическое семейство $\{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g\geqslant k>0}$ компактных ориентируемых 3-многообразий с краем. По определению компактное ориентируемое трехмерное многообразие M лежит в множестве $\mathcal{M}_{g,k}$, если оно обладает идеальной триангуляцией с $g+k$ тетраэдрами, и его край ∂M состоит из замкнутой ориентируемой поверхности рода g и k торов. Было доказано, что такие многообразия являются гиперболическими, и триангуляционная сложность многообразий из $\mathcal{M}_{g,k}$ равняется $g+k$. Отметим, что минимальные идеальные триангуляции многообразий из семейства $\{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g\geqslant k>0}$, не ограничены по числу рёбер.

1.1. **Гомологически минимальные триангуляции.** В [11] мы доказали, что триангуляционная сложность компактного 3-многообразия M с краем оценивается снизу первым числом Бетти $\beta_1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ гомологий многообразия M с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Идеальную триангуляцию $\mathcal{T}$ компактного 3-многообразия M с краем будем называть *гомологически минимальной*, если она содержит в точности $\beta_1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ тетраэдров; гомологически минимальные триангуляции и их свойства изучались в [11]. Обозначим через $\mathcal{M}_h$ класс компактных связных 3-многообразий с краем, обладающих гомологически минимальными триангуляциями. Ясно, что всякая гомологически минимальная триангуляция минимальна, и триангуляционная сложность многообразия $M \in \mathcal{M}_h$ равна $\beta_1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Также мы доказали, что все многообразия из класса $\mathcal{M}_h$, за исключением шести многообразий триангуляционной сложности меньшей четырёх, являются гиперболическими многообразиями с вполне геодезическим краем и каспами. Более того, каждое многообразие из $\mathcal{M}_h$ обладает единственной минимальной триангуляцией, а именно, гомологически минимальной.

1.2. **Разбиение класса $\mathcal{M}_h$ на три подкласса.** Тетраэдры до склейки, а также их вершины, рёбра и грани будем называть *модельными клетками*. Ребро e идеальной триангуляции будем называть *чётным* (соотв., *нечётным*), если каждая модельная грань содержит чётное (соотв., нечётное) число *прообразов* данного ребра (то есть модельных рёбер, которые дают ребро e после склейки модельных тетраэдров). Стоит отметить, что идеальная триангуляция общего положения не содержит ни чётных, ни нечётных рёбер. В [11] мы доказали, что любая гомологически минимальная триангуляция содержит только чётные и нечётные рёбра, и наоборот любая идеальная триангуляция, содержащая только чётные и нечётные рёбра, является гомологически минимальной. Более того, мы показали, что множество всех гомологически минимальных триангуляций разбивается на три подмножества:

- $\mathcal{T}_o^1$: триангуляции, содержащие ровно одно ребро, и оно нечётно;
- $\mathcal{T}_o^2$: триангуляции, содержащие ровно три ребра, и они нечётны;
- $\mathcal{T}_e$: триангуляции, содержащие хотя бы два ребра, одно из которых нечётно, а остальные — чётны.

Обозначим через $\mathcal{M}_o^1$ (соотв., $\mathcal{M}_o^2$ или $\mathcal{M}_e$) класс компактных 3-многообразий с краем, обладающих идеальными триангуляциями из $\mathcal{T}_o^1$ (соотв., $\mathcal{T}_o^2$ или $\mathcal{T}_e$). В [11] показано, что эти классы попарно не пересекаются, а потому задают разбиение класса $\mathcal{M}_h$. Более того, класс $\mathcal{M}_o^2$ совпадает с классом многообразий из работы [9], а ориентируемые многообразия из $\mathcal{M}_o^1$ описаны в [7]. В обоих работах доказывается непустота соответствующих классов, а также строятся бесконечные серии многообразий в них содержащиеся. Класс $\mathcal{M}_e$ содержит в себе двухпараметрическое семейство $\{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$ из работы [10], а потому он тоже не пуст и бесконечен. Тем не менее, при помощи компьютера были найдены несколько примеров многообразий, лежащих в дополнении семейства $\{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$ в классе $\mathcal{M}_e$.

1.3. **Постановка задачи и формулировка основного результата.** В силу вышесказанного естественно ставить задачу о построении бесконечных серий 3-многообразий в $\mathcal{M}_e \setminus \{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$. Дополнительный интерес к поиску новых бесконечных серий 3-многообразий в классе $\mathcal{M}_e$ обусловлен их гиперболичностью и известными значениями как триангуляционной сложности, так и сложности Матвеева.

Для формулировки основного результата введём понятия короткой и длинной компоненты края 3-многообразия. Компоненту связности края многообразия M будем называть *длинной*, если она имеет наименьшее значение эйлеровой характеристики среди всех компонент края ∂M, в противном случае, её будем называть *короткой*.

Определим отображение G из класса $\mathcal{M}_e$ в множество пар $(\mathcal{F}, b)$, где $\mathcal{F}$ — замкнутая поверхность и $b \in \mathbb{N}$. Многообразию $M \in \mathcal{M}_e$ сопоставим пару $G(M)$, состоящую из объединения коротких компонент края ∂M и второго числа Бетти гомологий многообразия M с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Пару $(\mathcal{F}, b)$ будем называть *допустимой*, если среди компонент связности $\mathcal{F}$ нет сфер и проективных плоскостей, а также b не меньше числа компонент связности $\mathcal{F}$. Множество допустимых пар обозначим через $\mathcal{A}$. Из результатов работы [11] следует, что пары, сопоставляемые многообразиям из класса $\mathcal{M}_e$ посредством отображения G, являются допустимыми, то есть $G(\mathcal{M}_e) \subseteq \mathcal{A}$.

Основой результат данной работы сформулирован в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. *Для любой допустимой пары $(\mathcal{F}, b) \in \mathcal{A}$ число многообразий в $G^{-1}(\mathcal{F}, b)$ бесконечно и как функция от триангуляционной сложности c, имеет асимптотику типа c^c.*

Тривиальным следствием теоремы 1 является равенство $G(\mathcal{M}_e) = \mathcal{A}$. Отметим также, что доказательство теоремы 1 носит конструктивный характер, а именно по заданной допустимой паре $(\mathcal{F}, b)$ строится бесконечная серия 3-многообразий из класса $\mathcal{M}_e$, содержащихся в $G^{-1}(\mathcal{F}, b)$. Наконец, совокупность коротких компонент края ∂M и второе число Бетти гомологий многообразия M с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ позволяют характеризовать семейство $\{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$ как подмножество в классе $\mathcal{M}_e$, что сформулировано в теореме 2.

Теорема 2. *Ориентируемое многообразие M из класса $\mathcal{M}_e$ попадает в семейство $\{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$ тогда и только тогда, когда $G(M) = (\sqcup_{i=1}^{k} \mathbb{T}_i, k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{T}_i$ — торы.*

Из теорем 1 и 2 следует, что дополнение семейства $\{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$ в классе $\mathcal{M}_e$ не пусто и бесконечно. Таким образом, поставленная в работе задача решена.

2. Идеальные триангуляции и специальные полиэдры

Сформулируем основные понятия и конструкций из теории сложности 3-многообразий, введённые С.В. Матвеевым в [12].

2.1. Специальные полиэдры с краем.

Определение. *Компактный полиэдр P называется* простым полиэдром с краем*, если линк каждой его точки $x \in P$ гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:*

(a) *окружности (такая точка x называется* неособой*);*
(b) *окружности с диаметром (такая точка x называется* тройной точкой*);*
(c) *окружности с тремя радиусами (такая точка x называется* истиной вершиной*);*
(d) *отрезку (такая точка x называется* неособой точкой края*);*
(e) *букету трёх отрезков с общим концом (такая точка x называется* особой точкой края*).*

Компоненты связности объединения всех тройных точек и объединения всех неособых точек называются, соответственно, *тройными линиями* и 2-*компонентами* полиэдра P. Множество точек полиэдра P типов (d) и (e) называется *краем* полиэдра P и обозначается через ∂P. Множество особых точек полиэдра P (то есть объединение тройных линий, истинных вершин и особых точек края) называется его *особым графом* и обозначается SP. Простой полиэдр с краем естественным образом стратифицирован: каждый страт размерности 2 является 2-компонентой; страты размерности 1 – это открытые или замкнутые тройные линии, а также связные компоненты неособых точек края; страты размерности 0 – это истинные вершины и особые точки края.

Простой полиэдр P с краем будем называть *специальным*, если каждый двумерный страт полиэдра P является открытой 2-клеткой, и P не содержит замкнутых тройных линий. Если специальный полиэдр P с краем не является замкнутым диском, его особый граф SP не пуст и является графом с вершинами валентности 1 и 4, поэтому тройные линии P естественно называть *рёбрами* особого графа.

Несложно видеть, что край связного специального полиэдра P с краем либо является окружностью (и P является диском), либо обладает структурой 3-регулярного графа, либо имеет пустой край. В последнем случае P будем называть *специальным полиэдром.* В дальнейшем нас будут интересовать только связные специальные полиэдры с краем, и характеристика "связный" будет опускаться.

2.2. **Критерий утолщаемости специальных полиэдров.** Полиэдр P *коллапсируется* на свой подполиэдр Q, если для некоторой триангуляции (K, L) пары (P, Q) комплекс K коллапсируется на L с помощью последовательности элементарных симплициальных коллапсирований. Подполиэдр P компактного связного 3-многообразия M с краем называется *спайном* M, если M коллапсируется на P после выбора достаточно мелкой триангуляции пары (M, P). Спайн 3-многообразия называется *специальным*, если он является специальным полиэдром. Важно отметить, что не любой специальный полиэдр является спайном некоторого компактного 3-многообразия с непустым краем. В случае, когда это так, специальный полиэдр называют *утолщаемым* (или же специальным спайном).

Для любой 2-клетки α специального полиэдра P имеет место характеристическое отображение $f : D^2 \to P$, которое гомеоморфно отображает внутренность диска D^2 на α, а ограничение которого на $S^1 = \partial D^2$ является локальным вложением. Кривая $f|_{\partial D^2} : \partial D^2 \to P$ (и ее образ $f|_{\partial D^2}(\partial D^2)$) называется *граничной кривой* клетки α и обозначается $\partial\alpha$.

Обозначим через $A \cup D$ кольцо $S^1 \times I$ с диском D^2, приклеенным вдоль средней окружности, и через $M \cup D$ — лист Мёбиуса с диском D^2, приклеенным вдоль средней линии. Будем говорить, что граничная кривая 2-клетки α специального полиэдра P имеет *тривиальное* или *нетривиальное нормальное расслоение*, если её характеристическое отображение $f : D^2 \longrightarrow P$ продолжается до локального вложения $f^{A\cup D} : A \cup D \longrightarrow P$ или до локального вложения $f^{M\cup D} : M \cup D \longrightarrow P$, соответственно.

Теорема 3 ([12, Теорема 1.1.20])**.** *Специальный полиэдр P утолщаем тогда и только тогда, когда граничные кривые всех его 2-клеток имеют тривиальные нормальные расслоения.*

2.3. **Двойственность между идеальными триангуляциями и специальными спайнами.** Идеальной триангуляций $\mathcal{T}$ компактного 3-многообразия M с непустым краем естественным образом сопоставляется двойственный специальный полиэдр, который является спайном M. Каждому тетраэдру Δ_i триангуляции $\mathcal{T}$ сопоставим полиэдр R_i являющийся объединением линков вершин Δ_i в первом барицентрическом подразбиении. Аффинная склейка граней тетраэдров Δ_i индуцирует склейку соответствующих полиэдров R_i. В результате получается специальный спайн P многообразия M. В действительности, сопоставление $\mathcal{T} \longrightarrow P$ индуцирует биекцию между идеальными триангуляциями и специальными спайнами многообразия M, что в подробностях описано в [12].

3. Задание гомологически минимальных полиэдров при помощи шаблонов

Напомним, что каждое многообразие из $\mathcal{M}_e$ обладает единственной минимальной триангуляцией из множества $\mathfrak{T}_e$. А потому, задача построения бесконечных серий многообразий из класса $\mathcal{M}_e$ сводится к задаче построения бесконечных серий гомологически минимальных триангуляций из множества $\mathfrak{T}_e$. Оказалось, что все построения удобнее проводить на двойственном языке специальных спайнов.

Замечание 1. *Поскольку нас интересуют многообразия из класса $\mathcal{M}_e$, то мы сузим множество гомологически минимальных триангуляций до множества $\mathfrak{T}_e$.*

3.1. **Гомологически минимальные полиэдры.** Дадим понятие гомологически минимальных полиэдров, которые будут связаны с гомологически минимальными триангуляциями. Напомним, что гомологически минимальные триангуляции обладают только чётными и нечётными рёбрами. Переходя на двойственный язык специальных полиэдров, введём понятие чётных и нечётных 2-клеток. Будем говорить, что 2-клетка α специального полиэдра P является *чётной* (соотв., *нечётной*), если её граничная кривая $\partial\alpha$ проходит по каждому ребру особого графа SP чётное (соотв., нечётное) число раз. Специальный полиэдр, содержащий хотя бы две 2-клетки, одна из которых нечётная, а остальные чётные, будем называть *гомологически минимальным.* Обозначим через $\mathcal{P}_e^*$ множество гомологически минимальных специальных полиэдров. В дальнейшем, характеристика "специальный" будет опускаться для простоты. Подмножество утолщаемых полиэдров из $\mathcal{P}_e^*$ обозначим через $\mathcal{P}_e$. Из определения видно, что утолщаемые гомологически минимальные полиэдры двойственны гомологически минимальным идеальным триангуляциям. И, следовательно, каждое многообразие из $\mathcal{M}_e$ обладает единственным гомологически минимальным спайном. Тем не менее, сначала мы опустим вопрос утолщаемости и будем строить гомологически минимальные полиэдры.

Напомним, что специальный полиэдр обладает структурой двумерного клеточного комплекса и, следовательно, может быть получен посредством приклеивания к 4-регулярному графу нескольких 2-клеток так, чтобы у точек на рёбрах и в вершинах графа образовались правильные окрестности. И, кроме того, чтобы получившийся полиэдр оказался гомологически минимальным, 2-клетки нужно приклеивать к графу так, чтобы ровно одна из них оказалась нечётной, а остальные — чётными. Для этого будем приклеивать клетки в два шага.

Шаг 1 Приклеим к 4-регулярному графу все чётные 2-клетки. Получившийся полиэдр, как и все полиэдры такого типа, будем называть *промежуточным.*

Шаг 2 К промежуточному полиэдру приклеим ровно одну 2-клетку так, чтобы получился специальный полиэдр. Эта 2-клетка автоматически окажется нечётной.

На шаге 2 возникает препятствие, поскольку не любой промежуточный полиэдр можно достроить до специального приклеиванием ровно одной 2-клетки. Например к тору с заданными на нём параллелью и меридианом невозможно приклеить нечётную 2-клетку, поскольку через вершину валентности 4 на торе её граничная кривая должна проходить трансверсально. Также не очевидно, каким именно образом на шаге 1 приклеивать чётные 2-клетки к 4-регулярному графу. С целью преодоления описанного выше препятствия вводятся шаблоны. Они позволяют явным образом задать те и только те промежуточные полиэдры, которые можно достроить до гомологически минимальных полиэдров.

3.2. **Шаблоны.**

Определение. *Пусть* Φ *— связная замкнутая поверхность.* Оснащением *поверхности* Φ *называется такое гладкое погружение* $\gamma : \Gamma \to \Phi$*, что:*

- Γ *— 3-регулярный граф или окружность;*
- γ *инъективно в окрестности вершин графа* Γ*;*
- *любая сингулярная точка* $\gamma(\Gamma)$ *является двойной точкой трансверсального самопересечения;*
- $\Phi \setminus \gamma(\Gamma)$ *— открытый диск.*

Поверхность Φ *с оснащением* $\gamma : \Gamma \to \Phi$ *будем называть* оснащённой поверхностью*, и обозначать* (Φ, Γ, γ)*.*

Замечание 2. *Несложно видеть, что на сфере и проективной плоскости не существует оснащений, поскольку оснащение задаёт на поверхности структуру клеточного комплекса неположительной эйлеровой характеристики.*

Существование оснащённых поверхностей гарантируется следующим предложением.

Предложение 1. *Пусть* Φ *— связная замкнутая поверхность, отличная от сферы и проективной плоскости. Тогда на поверхности* Φ *можно задать оснащение* $\gamma : \Gamma \to \Phi$*. Более того:*

(1) *всегда существует оснащение, являющееся вложением;*
(2) *если* $\chi(\Phi) < 0$*, то существует оснащение, содержащее хотя бы одну двойную точку.*

Доказательство. Докажем сначала пункт 1 предложения. Будем строить 3-регулярный граф Γ, вложенный в поверхность Φ. Рассмотрим стандартную развёртку поверхности Φ, заметим, что все вершины многоугольника в развёртке склеиваются в одну вершину на поверхности, обозначим её через v_0. Таким образом мы уже получили некоторый граф Γ_0 на поверхности, дополнение которого есть открытый 2-диск. Остается лишь преобразовать граф Γ_0 в окрестности вершины v_0, расщепив её на несколько вершин, и получить искомый граф Γ. Пример таких преобразований приведён на рисунке 1.

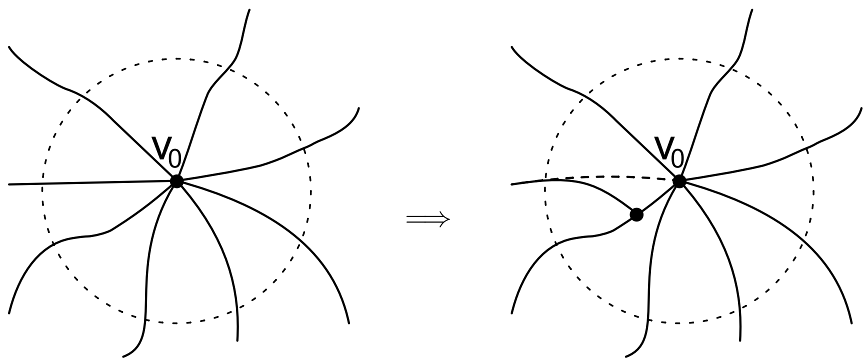

Рис. 1. Пример преобразования окрестности вершины v_0 развёртки поверхности, в результате которого возникает новая вершина валентности 3, а также понижается валентность вершины v_0.

Теперь докажем пункт 2. Пусть $\chi(\Phi) < 0$. Из пункта 1 существует такое оснащение $\gamma_0 : \Gamma_0 \to \Phi$, что граф Γ_0 связен, и γ_0 является вложением. А потому граф Γ_0 можно считать вложенным в поверхность.

Если ребро e графа Γ_0 не является петлёй, то его можно стянуть вдоль самого себя на поверхности и получить новый граф $\Gamma_1 = \Gamma_0/e$, содержащий одну вершину валентности 4. Поймём, при каких условиях граф Γ_1 является образом некоторого оснащения поверхности Φ. Если ребро e было кратным в графе Γ_0, то в графе Γ_1 образуется петля e', которая на поверхности трансверсально пересекается с $\Gamma_1 \setminus e'$. В этом случае граф Γ_1 не является погружением никакого 3-регулярного графа, а в противном случае — является.

Остаётся показать, что в графе Γ_0 найдётся ребро e, не являющееся петлёй и имеющее кратность 1. Поймём, что такое ребро найдётся при каждой вершине графа Γ_0. Это следует из того, что граф Γ_0 3-регулярен, связен и содержит хотя бы четыре вершины (в силу того, что $\chi(\Phi) < 0$). $\square$

Определение. Шаблоном S *будем называть следующую совокупность данных:*

- *набор оснащённых поверхностей* $(\Phi_1^S, \Gamma_1^S, \gamma_1^S), \ldots, (\Phi_n^S, \Gamma_n^S, \gamma_n^S)$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$*;*
- *граф* Γ_0^S*, содержащий только вершины валентности 1 и 4, причём число вершин валентности 1 графа* Γ_0^S *равно суммарному числу вершин графов* $\Gamma_1^S, \ldots, \Gamma_n^S$*; будем называть его* дополняющим графом *набора оснащённых поверхностей;*
- *биекцию* κ^S *между множеством вершин валентности 1 графа* Γ_0^S *и вершинами графов* $\Gamma_1^S, \ldots, \Gamma_n^S$ *такую, что граф* $AG^S = \Gamma_0^S \cup_{\kappa^S} \sqcup_{i=1}^n \Gamma_i^S$ *связен, будем называть его графом* ассоциированным *с шаблоном* S*).*

Замечание 3. *Условие связности графа ассоциированного с шаблоном задаёт разбиение множества* $\mathcal{S}^*$ *на два подмножества:*

(i) *шаблоны с одной оснащённой поверхностью, оснащение которой является погружением окружности, и пустым дополняющим графом;*

(ii) *шаблоны с непустым дополняющим графом.*

Обозначим через $\mathcal{S}^*$ множество всех шаблонов. Преимущество шаблонов по сравнению с промежуточными полиэдрами заключается в том, что существование шаблонов легко доказывается при помощи явных построений.

Теорема 4. *Множество шаблонов $\mathcal{S}^*$ бесконечно.*

Теорема 4 следует из предложения 1 и очевидной леммы 1.

Лемма 1. *Для любого набора оснащённых поверхностей $(\Phi_1, \Gamma_1, \gamma_1), \ldots, (\Phi_n, \Gamma_n, \gamma_n)$ и любого графа Γ_0, их дополняющего, можно подобрать такую биекцию κ между вершинами валентности 1 графа Γ_0 и вершинами графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, что граф $AG = \Gamma_0 \cup_\kappa \sqcup_{i=1}^n \Gamma_i$ будет связным.*

Замечание 4. *Каждому шаблону S естественным образом сопоставляется промежуточный полиэдр. Заметим, что вершины валентности 3 графов $\gamma_i^S(\Gamma_i^S)$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с вершинами графов Γ_i^S, а потому можно считать, что биекция κ^S задана между множеством вершин валентности 1 дополняющего графа Γ_0^S и множеством вершин валентности 3 графов $\gamma_i^S(\Gamma_i^S)$. Наконец, оснащение $\gamma_i^S : \Gamma_i^S \to \Phi_i^S$ поверхности Φ_i^S задаёт на ней структуру двумерного клеточного комплекса с единственной 2-клеткой. А потому промежуточный полиэдр, соответствующий шаблону S, получается в результате склейки оснащённых поверхностей с дополняющим графом посредством биекции κ^S.*

3.3. **Комбинаторное разложение гомологически минимальных полиэдров.** Определим отображение $\mathcal{D}$ из множества гомологически минимальных полиэдров $\mathcal{P}_e^*$ в множество всех шаблонов $\mathcal{S}^*$. Фиксируем $P \in \mathcal{P}_e^*$ и построим по нему шаблон $\mathcal{D}(P)$. Для этого нужно задать набор оснащённых поверхностей, дополняющий граф и биекцию шаблона.

Сначала зададим набор оснащённых поверхностей. Для этого заметим следующее свойство чётных 2-клеток.

Лемма 2. *Замыкание чётной 2-клетки специального полиэдра P является поверхностью в P. При этом поверхности, отвечающие разным чётным 2-клеткам, не пересекаются.*

Доказательство. Пусть α — чётная 2-клетка полиэдра P. Покажем, что её замыкание является поверхностью, вложенной в полиэдр P. Несложно видеть, что в замыкание 2-клетки α попадают ребра и вершины особого графа SP, по которым проходит граничная кривая $\partial\alpha$. Покажем, что у каждой точки x в замыкании 2-клетки α есть окрестность, гомеоморфная D^2. Если x лежит на ребре особого графа, то наличие такой окрестности следует из того, что по данному ребру граничная кривая $\partial\alpha$ проходит дважды. В случае, когда x является вершиной особого графа SP, наличие шаровой окрестности видно из рисунка 2.

Поймем теперь, что поверхности, отвечающие разным чётным 2-клеткам, не пересекаются. Для этого достаточно проверить, что у них нет общих ребер и вершин в особом графе. Так как чётные 2-клетки проходят по каждому ребру особого графа полиэдра P четное число раз, то никакие две поверхности не могут пересекаться на ребрах. И, наконец, граничные кривые 2-клеток не могут пересекаться в вершинах, так как граничная кривая любой чётной 2-клетки, проходя через вершину, проходит хотя бы по трём из четырех ребер. Тогда если граничные кривые двух чётных 2-клеток пересекаются в вершине, то они пересекаются и по ребру, что невозможно. $\square$

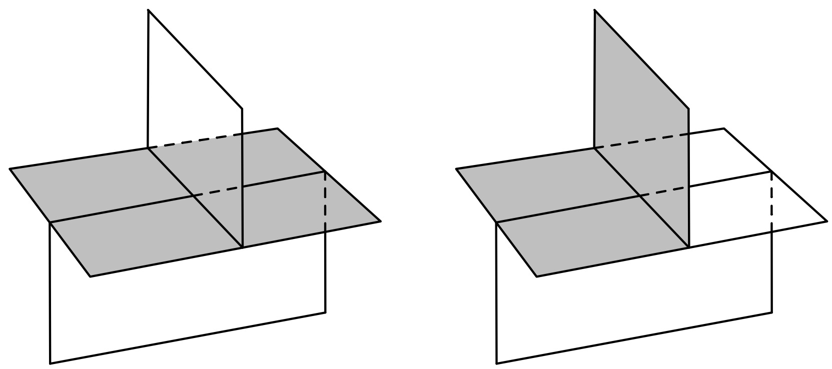

Рис. 2. Возможные с точностью до гомеоморфизма бабочки окрестности истиной вершины специального полиэдра попадающей в замыкание чётной 2-клетки (она выделена серым цветом).

Обозначим через $\mathtt{d}(P)$ число 2-клеток специального полиэдра P. В дальнейшем будем писать $\mathtt{d}$, подразумевая, что специальный полиэдр P фиксирован. Пусть $\alpha_0, \ldots, \alpha_{\mathtt{d}-1}$ — 2-клетки P, где α_0 нечётная 2-клетка, а остальные — чётные. Поверхность, получающуюся замыканием чётной 2-клетки α_i согласно лемме 2, обозначим через $\Phi_i \subset P$; положим $\tilde{\Gamma}_i = SP \cap \Phi_i$ для $i \in \{1, \ldots, \mathtt{d}-1\}$. Поймём, что граф $\tilde{\Gamma}_i \subset \Phi_i$ является образом некоторого оснащения.

Лемма 3. *Для каждого $i \in \{1, \ldots, \mathtt{d}-1\}$ на поверхности Φ_i можно задать такое оснащение $\gamma_i : \Gamma_i \to \Phi_i$, что $\gamma_i(\Gamma_i) = \tilde{\Gamma}_i$.*

Доказательство леммы 3. Сначала разберём случай, когда $\mathtt{d} = 2$ и $\tilde{\Gamma}_1 = SP$. В этом случае граничная кривая нечётной 2-клетки задаёт оснащение поверхности Φ_1.

Иначе граф $\tilde{\Gamma}_i$ является фрагментом особого графа SP и разбивается на набор ребёрно-простых путей, начинающихся и заканчивающихся в вершинах валентности 3, и отвечающих проходам граничной кривой нечётной 2-клетки по поверхности Φ_i. Это и задаёт оснащение. А именно, на множестве вершин валентности 3 графа $\tilde{\Gamma}_i$ построим граф Γ_i, сопоставив каждому ребёрно-простому пути в графе $\tilde{\Gamma}_i$ ребро в графе Γ_i между концевыми вершинами пути. Погружение γ_i инъективно в окрестности вершин графа Γ_i и отображает его рёбра назад в рёберно-простые пути на графе $\tilde{\Gamma}_i \subset \Phi_i$, описанные выше. □

Для каждого $i \in \{1, \ldots, \mathtt{d}-1\}$ зафиксируем оснащение $\gamma_i : \Gamma_i \to \Phi_i$ поверхности Φ_i, построенное в лемме 3.

Для набора оснащённых поверхностей $\{(\Phi_i, \Gamma_i, \gamma_i)\}_{i=1}^{\mathtt{d}-1}$ зададим дополняющий граф и биекцию между вершинами валентности 1 дополняющего графа и вершинами графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\mathtt{d}-1}$. Через Γ_0 обозначим граф, получающийся замыканием (внутри SP) объединения всех рёбер графа SP, не содержащихся в графах $\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_{\mathtt{d}-1}$. Из построений видно, что вершины валентности 1 графа Γ_0 находятся во взаимно-однозначном соответствии с вершинами валентности 3 графов $\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_{\mathtt{d}-1}$, которые в свою очередь соответствуют вершинам графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\mathtt{d}-1}$. Имеющуюся биекцию обозначим через κ. Остаётся проверить связность ассоциированного графа.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\partial^*\alpha"] \arrow[dr, "\partial\alpha"'] & AG \arrow[d, "\gamma"] \\ & SP \end{tikzcd}$$

Рис. 3. Поднятие граничное отображения нечётной 2-клетки в ассоциированный граф.

Лемма 4. *Граф* $AG = \Gamma_0 \cup_\kappa \sqcup_{i=1}^{\mathtt{d}-1}\Gamma_i$ *связен.*

Доказательство леммы 4. Отметим, что оснащения $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\mathtt{d}-1}$ в совокупности задают отображение $\gamma : AG \to SP$, которое инъективно на дополняющем графе Γ_0 и совпадает с погружениями γ_i на графах Γ_i для каждого $i \in \{1, \ldots, \mathtt{d}-1\}$. Граничное отображение $\partial\alpha_0 : S^1 \to SP$ нечётной 2-клетки α_0 полиэдра P поднимается до отображения $\partial^*\alpha_0 : S^1 \to AG$. А именно, диаграмма, изображённая на рисунке 3, коммутативна. При этом отображение $\partial^*\alpha_0 : S^1 \to AG$ сюръективно. Следовательно граф AG связен. □

Таким образом, гомологически минимальному полиэдру P соответствует шаблон $\mathcal{D}(P)$, состоящий из набора оснащённых поверхностей $\{(\Phi_i, \Gamma_i, \gamma_i)\}_{i=1}^{\mathtt{d}-1}$, дополняющего графа Γ_0 и биекции κ. А, следовательно, мы определили отображение $\mathcal{D} : \mathcal{P}_e^* \to \mathcal{S}^*$. Назовём его *комбинаторным разложением.*

3.4. **Сюръективность комбинаторного разложения.** Напомним, что шаблоны вводились в качестве инструмента для построения гомологически минимальных полиэдров. В предыдущем разделе было определено отображение $\mathcal{D} : \mathcal{P}_e^* \to \mathcal{S}^*$, сопоставляющее гомологически минимальным полиэдрам шаблоны. Теперь в теореме 5 мы покажем, что отображение комбинаторного разложения сюръективно. Для доказательства теоремы мы предъявим явную конструкцию, как по шаблону S построить такой гомологически минимальный полиэдр P, что $\mathcal{D}(P) = S$.

Теорема 5. *Отображение комбинаторного разложения* $\mathcal{D} : \mathcal{P}_e^* \to \mathcal{S}^*$ *сюръективно.*

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма 5. *Для любого шаблона* S *существует специальный полиэдр* $\tilde{P}$ *с краем, обладающий единственной 2-клеткой, и такой, что* $S\tilde{P} = \Gamma_0^S$ *и* $\partial\tilde{P} = \sqcup_i \Gamma_i^S$.

Доказательство. Чтобы построить $\tilde{P}$, необходимо к графу AG^S, ассоциированному с шаблоном S, приклеить ровно одну 2-клетку, которую обозначим через α, так, чтобы у всех точек графа AG^S образовались правильные окрестности, а именно:

(1) у точек на рёбрах графа Γ_0^S — окрестности тройных точек, а у точек на рёбрах графов $\Gamma_1^S, \ldots, \Gamma_n^S$ — окрестности неособых точек края;
(2) у вершин валентности 4 графа $\Gamma_0^S \subset AG^S$ — окрестности истинных вершин, а у остальных вершин графа AG^S — окрестности особых точек края.

Переформулируем данные условия в терминах граничного отображения $\partial\alpha : S^1 \to AG^S$.

(1) По рёбрам графа $\Gamma_0^S \subset AG^S$ граничная кривая должна проходить трижды, а по остальным рёбрам графа AG^S — по одному разу, при этом каждый проход граничной кривой по ребру монотонен.

(2) Через вершину v валентности 4 графа Γ_0^S граничная кривая должна проходить шестью способами так, чтобы по каждой паре рёбер, инцидентных v, соответствовал один проход. Через остальные вершины графа AG^S граничная кривая должна проходить трижды, причём каждому проходу соответствует пара инцидентных данной вершине рёбер, одним из которых является ребро графа Γ_0^S, а другим — ребро графов $\Gamma_1^S, \dots, \Gamma_n^S$.

Пользуясь условиями (1) и (2) сформулированными в терминах граничного отображения, можно забыть про приклеивание 2-клетки и искать цикл в графе AG^S, удовлетворяющий данным условиям. Покажем, что такой цикл существует в два шага:

Шаг 1 Заметим, что условия (1) и (2) не накладывают ограничений на число циклов. А, следовательно, на графе AG^S можно строить несколько циклов и накладывать условия (1) и (2) на них в совокупности.

Шаг 2 Объединить циклы, построенные на шаге 1, в один цикл.

Шаг 1. Покажем, что на графе AG^S можно задать несколько циклов так, чтобы условия (1) и (2) выполнялись для них в совокупности. Для этого будем последовательно строить циклы на графе AG^S и отмечать, сколько раз построенные циклы прошли по каждому ребру и какие проходы через вершины были задействованы. Ребро графа AG^S назовём *свободным*, если оно является ребром графа Γ_0 (соотв., графов $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$) и по нему ранее построенные циклы в совокупности прошли менее трёх раз (соотв., не прошли ни разу). Изначально, всё рёбра графа AG^S свободны. Опишем алгоритм.

Пока имеются свободные рёбра, начинаем новый цикл с любого свободного ребра в любом из двух возможных направлений. При переходе по ребру в вершину, проверяем, какие из проходов через данную вершину и содержащие данное ребро не были задействованы и выбираем любой из таких проходов, тем самым попадая на следующее свободное ребро. Всякий раз переходя на новое ребро, отмечаем на нём один проход. Данный процесс остановится только в том случае, когда не удастся пройти через вершину. Заметим, что в таком случае мы остановились на изначальном ребре в изначально выбранном направлении, что завершает построение цикла.

Шаг 2. Пусть на графе AG^S согласно Шагу 1 существуют более одного цикла, удовлетворяющих условиям (1) и (2). Последовательно будем уменьшать число циклов, объединяя их на рёбрах графа Γ_0^S, пока не останется единственный цикл. Эту процедуру можно сделать в силу связности графа AG^S. В результате получим искомое граничное отображение $\partial\alpha$. □

Доказательство теоремы 5. Научимся восстанавливать гомологически минимальный полиэдр по данному шаблону из $\mathcal{S}^*$. Фиксируем шаблон S, состоящий из набора оснащённых поверхностей $(\Phi_1^S, \Gamma_1^S, \gamma_1^S), \dots, (\Phi_n^S, \Gamma_n^S, \gamma_n^S)$, графа Γ_0^S и биекции κ^S.

В силу леммы 5 существует специальный полиэдр $\tilde{P}$ с краем, обладающий единственной 2-клеткой, и такой, что $S\tilde{P} = \Gamma_0^S$ и $\partial\tilde{P} = \sqcup_i \Gamma_i^S$. Поскольку для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ определено погружение $\gamma_i^S : \Gamma_i^S \to \Phi_i^S$, получаем отображение

$$\gamma : \partial\tilde{P} \to \sqcup_{i=1}^n \Phi_i^S.$$

Искомый гомологически минимальный полиэдр определяется по формуле:

$$P = \tilde{P} \cup_\gamma \sqcup_{i=1}^n \Phi_i^S.$$

$\square$

Следствие 1. *Гомологически минимальные полиэдры можно задавать при помощи шаблонов.*

4. Утолщаемость гомологически минимальных полиэдров

Как было показано в разделе 3.4, гомологически минимальные полиэдры можно задавать при помощи шаблонов. Полиэдры, комбинаторное разложение которых совпадает с шаблоном S, будем называть *прообразами* шаблона S. Естественно задаться вопросом, при каких условиях шаблон обладает утолщаемыми прообразами, такие шаблоны будем называть *утолщаемыми*. Множество всех утолщаемых шаблонов обозначим через $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^*$.

Будем говорить, что 2-клетка α специального полиэдра P обладает *противоходом* на ребре e особого графа SP, если её граничная кривая $\partial\alpha$ проходит по ребру e в противоположных направлениях. Отметим, что понятие противохода не зависит от выбора ориентации граничной кривой $\partial\alpha$. Шаблон S будем называть *шаблоном с противоходом*, если существует прообраз S, нечётная 2-клетка которого обладает противоходом на одном из рёбер особого графа. Множество шаблонов с противоходом обозначим через $\mathcal{S}^c$. Выяснилось, что множество шаблонов с противоходом характеризуется как подмножество $\mathcal{S}^*$ исключительно в терминах комбинаторики шаблонов.

Предложение 2. *Пусть S — шаблон. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *шаблон S является шаблоном с противоходом;*
(2) *нечётная 2-клетка любого прообраза шаблона S имеет противоход на одном из рёбер особого графа;*
(3) *выполнено одно из двух условий:*
   (a) *граф Γ_0^S шаблона S содержит хотя бы одну вершину валентности 4;*
   (b) *Γ_0^S не содержит вершин валентности 4, и при этом граф AG^S, ассоциированный с шаблоном S, не является двудольным.*

Предложение 2 будет доказано в разделе 4.1; из него видно, что множество $\mathcal{S}^c$ шаблонов с противоходом покрывает большую часть множества всех шаблонов $\mathcal{S}^*$. Они интересны тем, что обладают утолщаемыми прообразами. Дальнейший анализ дополнения $\mathcal{S}^* \setminus \mathcal{S}^c$ на наличие утолщаемых шаблонов приводит к следующему результату.

Теорема 6. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Любой шаблон с противоходом обладает как утолщаемым, так и не утолщаемым прообразом;*
(2) *Все прообразы шаблона из $\mathcal{S}^* \setminus \mathcal{S}^c$ либо одновременно утолщаемы, либо нет.*

Теорема 6 будет доказана в разделе 4.2; из неё независимо от результатов работы [10] следует бесконечность класса $\mathcal{M}_e$.

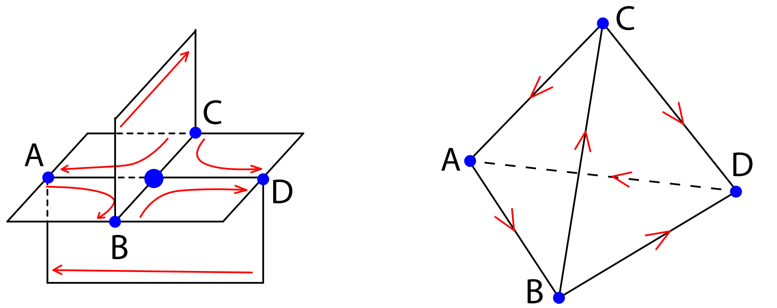

Рис. 4. Наличие противохода нечётной 2-клетки на одном их рёбер особого графа, инцидентных вершине v.

Теорема 7. *Класс $\mathcal{M}_e$ не пуст и бесконечен.*

Доказательство. Множество шаблонов с противоходом бесконечно в силу теоремы 4, и по теореме 6 каждый шаблон с противоходом обладает утолщаемым прообразом, b, следовательно, задаёт многообразие из класса $\mathcal{M}_e$. Наконец, триангуляционная сложность полученных многообразий явным образом восстанавливается по шаблонам и она не ограничена сверху. □

Замечание 5. *Согласно замечанию 3 среди множества всех шаблонов выделяются шаблоны с пустым дополняющим графом. Несложно показать, что все такие шаблоны заведомо утолщаемы.*

4.1. **Доказательство предложения 2.** Для доказательства предложения 2 потребуются леммы 6, 7 и 8.

Лемма 6. *Пусть S — шаблон такой, что его дополняющий граф содержит вершину v валентности 4. Тогда нечётная 2-клетка любого специального полиэдра из $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{S}$ содержит противоход на одном из рёбер особого графа, инцидентных вершине v.*

Доказательство. Пусть P — гомологически минимальный полиэдр такой, что $\mathcal{D}(P) = S$. Поскольку по каждому ребру, инцидентному вершине v, нечётная 2-клетка проходит трижды, то задача поиска противохода на одном из четырёх рёбер инцидентных вершине v эквивалентна поиску вершины тетраэдра с заданной на нем ориентацией ребер, которая не является ни источником, ни стоком (см. рис. 4). □

Лемма 7. *Пусть дополняющий граф шаблона S не содержит вершин валентности 4, и $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{S}$ содержит хотя бы один прообраз, нечётная 2-клетка которого не обладает противоходом ни на одном ребре особого графа. Тогда ассоциированный граф является двудольным.*

Доказательство. Пусть P — гомологически минимальный полиэдр такой, что $\mathcal{D}(P) = S$ и его нечётная 2-клетка α не обладает противоходом ни на одном ребре особого графа. Тогда ориентация граничной кривой $\partial\alpha$ задаёт ориентацию особого графа SP. При помощи комбинаторного разложения, ориентацию с SP можно перенести на компоненты шаблона: дополняющий граф Γ_0^S и оснащения $\Gamma_1^S, \ldots, \Gamma_{\mathtt{d}-1}^S$. Обратив ориентацию рёбер дополняющего графа, зададим ориентацию рёбер ассоциированного графа, у которого каждая вершина является либо источником, либо стоком, а значит, он двудолен. $\square$

Лемма 8. *Пусть S — шаблон такой, что его дополняющий граф не содержит вершин валентности 4, и при этом ассоциированный граф является двудольным. Тогда нечётная 2-клетка любого прообраза шаблона S не обладает противоходом ни на одном ребре особого графа.*

Доказательство. Пусть P — гомологически минимальный полиэдр такой, что $\mathcal{D}(P) = S$. Проведём рассуждения из доказательства леммы 7 в обратную сторону, ориентировав все рёбра ассоциированного графа от "источников" к "стокам" и обратив ориентацию на рёбрах графа шаблона S, дополняющего набор оснащённых поверхностей шаблона. Несложно видеть, что это задаёт ориентацию граничной кривой нечётной 2-клетки полиэдра P. $\square$

Теперь докажем предложение 2. Покажем, что 3 следует из 1. От противного, предположим, что дополняющий граф шаблона S не содержит вершин валентности 4, и ассоциированный граф шаблона S двудолен, тогда по лемме 8 ни один прообраз шаблона S не обладает противоходом ни на одном ребре особого графа. Значит шаблон S не является шаблоном с противоходом по определению.

Покажем, что 2 следует из 3. Если дополняющий граф шаблона S содержит хотя бы одну вершину валентности 4, то используем лемму 6, иначе используем лемму 7 и получаем требуемое.

Наконец 1 следует из 2 по очевидным соображениям.

4.2. **Доказательство теоремы 6.** Из определения тривиального и нетривиального нормальных расслоений граничной кривой 2-клетки специального полиэдра легко вывести следующий факт.

Предложение 3. *Чётная 2-клетка имеет тривиальное нормальное расслоение.*

В качестве прямого следствия теоремы 3 и предложения 3 получаем критерий утолщаемости для гомологически минимальных полиэдров.

Лемма 9. *Гомологически минимальный полиэдр утолщаем тогда и только тогда, когда его нечётная 2-клетка имеет тривиальное нормальное расслоение.*

Теорема 6 следует из лемм 10 и 11.

Лемма 10. *Для любого шаблона S с противоходом существуют гомологически минимальные полиэдры $P_1 \in \mathcal{P}_e$ и $P_2 \in \mathcal{P}_e^* \setminus \mathcal{P}_e$ такие, что $\mathcal{D}(P_1) = \mathcal{D}(P_2) = S$.*

Доказательство. В силу сюръективности комбинаторного разложения, выберем произвольный гомологически минимальный полиэдр P_1 из $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{S}$. По определению шаблонов с противоходом нечётная 2-клетка α полиэдра P_1 обладает противоходом на одном из рёбер особого графа SP_1, обозначим его через e. Тогда $\partial\alpha$ проходит по ребру e трижды. Изменим проход граничной кривой $\partial\alpha$ по ребру e как показано на рисунке 5 и получим новый специальный полиэдр, который обозначим через P_2. По построению $\mathcal{D}(P_2) = S$. Поймём, что один из полиэдров P_1 и P_2 утолщаем, а другой — нет.

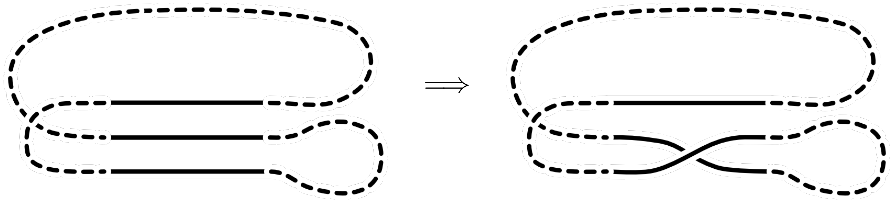

Рис. 5. Нечётная перекрутка на ребре особого графа.

Действительно, в силу леммы 9 вопрос утолщаемости полиэдров P_1 и P_2 сводится к вопросу тривиальности нормального расслоения нечётной 2-клетки. Несложно видеть, что преобразование граничного отображения 2-клетки α на ребре e, изображённое на рисунке 5, меняет тип нормального расслоения, а потому если P_1 утолщаем, то P_2 — нет, и наоборот. $\square$

Лемма 11. *Пусть $S \in \mathcal{S}^* \setminus \mathcal{S}^c$ – шаблон, $P_1, P_2 \in \mathcal{D}^{-1}S$. Тогда P_1 и P_2 либо одновременно утолщаемы, либо одновременно неутолщаемы.*

Доказательство. В силу предложения 2, ассоциированный граф шаблона S двудолен. Конструкция из доказательства леммы 7 задаёт ориентацию граничных кривых нечётных 2-клеток α_1 и α_2 полиэдров P_1 и P_2. Заметим, что граничную кривую $\partial\alpha_1$ можно преобразовать в граничную кривую $\partial\alpha_2$ при помощи конечного числа "перекруток" на рёбрах графа Γ_0^S, дополняющего набор поверхностей шаблона S.

Формальнее, нужно применить конструкцию из доказательства леммы 5. Граничные кривые $\partial\alpha_1$ и $\partial\alpha_2$ нужно представить как циклы, заданные на особом графе (у полиэдров P_1 и P_2 особые графы отождествлены). В общем случае, цикл может быть не один, но состоять их нескольких связных компонент. По каждому ребру графа Γ_0^S набор циклов суммарно проходит трижды, а потому каждому ребру графа Γ_0^S можно сопоставить три дуги, лежащие на каких-то циклах из набора. Под "перекрутками" на рёбрах нужно понимать разрезание трёх дуг, отвечающих данному ребру, и склейку получившихся концов одним из шести способов, кодируемых перестановками симметрической группы S_3. Отметим, что в процессе преобразований, описанных выше, ориентации всех циклов набора согласованны на каждом ребре дополняющего графа.

Несложно видеть, что нечётные перестановки на рёбрах изменяют чётность числа циклов в наборах, в то время как чётные перестановки — нет. А потому в процессе преобразований от граничной кривой $\partial\alpha_1$ к кривой $\partial\alpha_2$ будет задействовано чётное число нечётных перестановок, следовательно тип нормального расслоения не поменяется. Откуда в силу леммы 9 полиэдры P_1 и P_2 либо одновременно утолщаемы, либо одновременно неутолщаемы. $\square$

5. Доказательство теоремы 1

Покажем, что существует такое отображение $H : \mathcal{S}^* \to \mathcal{A}$, что для любого многообразия $M \in \mathcal{M}_e$ и его гомологически минимального специального спайна P выполнялось равенство

$$G(M) = H(\mathcal{D}(P)). \tag{1}$$

Для этого введём понятие поверхности в специальном специальном спайне, параллельной краю многообразия. Будем говорить, что нормальная поверхность в идеальной триангуляции компактного 3-многообразия с непустым краем *параллельна краю* многообразия, если она нормально изотопна некоторой поверхности на крае, при этом в процессе изотопии тип нормальной поверхности остаётся постоянным. Несложно видеть, что нормальная поверхность параллельна краю тогда и только тогда, когда её пересечение с тетраэдрами триангуляции состоит их треугольников, и при этом число треугольников при каждой вершине тетраэдра не превосходит одного. Напомним, что специальный спайн 3-многообразия естественным образом вкладывается в двойственную идеальную триангуляцию, более того, каждая поверхность в специальном спайне оказывается нормальной поверхностью в идеальной триангуляции. Будем говорить, что поверхность в специальном спайне *параллельна краю*, если она параллельна краю многообразия как нормальная поверхность в двойственной идеальной триангуляции.

В силу леммы 2 каждой чётной 2-клетке соответствует поверхность в гомологически минимальном спайне. Оказалось, что короткие компоненты края многообразия из $M \in \mathcal{M}_e$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с поверхностями в минимальном спайне параллельными краю. Связь края многообразий из $M \in \mathcal{M}_e$ с анатомией гомологически минимальных триангуляций, описанная в [11], позволяет заключить следующее.

Предложение 4. *Пусть P — гомологически минимальный спайн многообразия $M \in \mathcal{M}_e$, и $S = \mathcal{D}(P)$. Тогда*

(i) *коротким компонентам края ∂M соответствуют те поверхности $\Phi_1^S, \dots, \Phi^S_{\mathtt{d}(P)-1}$ шаблона S, оснащения которых являются вложениями;*

(ii) *более того $\beta_2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathtt{d}(P) - 1$.*

Предложение 4 позволяет задать искомое отображение H.

Замечание 6. *Из предложения 4 видно, что образ шаблона под действием отображения H зависит только от набора оснащённых поверхностей этого шаблона.*

Лемма 12. *Сужение отображения H на множество шаблонов с противоходом сюръективно.*

Доказательство. Зафиксируем допустимую пару $(\mathcal{F}, b)$ и построим шаблон S с противоходом такой, что $H(S) = (\mathcal{F}, b)$. Возьмём следующий набор из b оснащённых поверхностей:

- компоненты связности поверхности $\mathcal{F}$; в силу предложения 1 на них можно задать оснащения, являющиеся вложениями;
- $b - |\mathcal{F}|$ произвольных поверхностей отрицательной эйлеровой характеристики; в силу предложения 1 на них можно задать оснащения обладающие двойными точками.

Далее выберем граф Γ_0, дополняющий набор поверхностей и содержащий хотя бы одну вершину валентности 4. Наконец, воспользуемся замечанием 1 и получим искомый шаблон. □

Следствие 2. *Отображение $G : \mathcal{M}_e \to \mathcal{A}$ сюръективно.*

Доказательство. Поскольку отображение H, суженное на множество шаблонов с противоходом, сюръективно в силу леммы 12, любой шаблон с противоходом обладает утолщаемым прообразом в силу теоремы 6, и справедлива формула 1,то отображение G сюръективно. □

Зафиксируем допустимую пару $(\mathcal{F}, b)$. Для доказательства теоремы, нужно рассмотреть полный прообраз пары $(\mathcal{F}, b)$ относительно отображения G. Вместо этого рассмотрим прообраз пары $(\mathcal{F}, b)$ относительно отображения H. В силу замечания 6 и леммы 12, найдётся такой набор оснащённых поверхностей $\mathbb{F} = \{(\Phi_i, \Gamma_i, \gamma_i)\}_{i=1}^{b}$, что образ любого шаблона с набором оснащённых поверхностей $\mathbb{F}$ под действием отображения H совпадает с парой $(\mathcal{F}, b)$. Подмножество шаблонов с противоходом, обладающих набором оснащённых поверхностей $\mathbb{F}$, обозначим через $\mathcal{S}^c_{\mathbb{F}}$.

Лемма 13. *Число шаблонов в $\mathcal{S}^c_{\mathbb{F}}$ бесконечно и имеет асимптотику типа m^m как функция от числа m вершин валентности 4 дополняющего графа.*

Доказательство. Обозначим через $G_{m,k}$ множество графов (рассматриваемых с точностью до гомеоморфизма), содержащих в точности m вершин валентности 4 и k вершин валентности 1. В качестве прямого обобщения оценки из работы [10, Предложение 4.2], можно доказать, что для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\#G_{m,k}\}_{m=1}^{\infty}$ растёт как m^m. Остаётся воспользоваться замечанием 1 и заключить, что шаблоны с негомеоморфными дополняющим графами различны. $\square$

В силу теоремы 6 каждому шаблону из $\mathcal{S}^c_{\mathbb{F}}$ можно сопоставить утолщаемый гомологически минимальный полиэдр (возможно не единственным способом), и, следовательно, многообразие из класса $\mathcal{M}_e$. Отметим, что различным шаблонам из $\mathcal{S}^c_{\mathbb{F}}$ будут соответствовать негомеоморфные многообразия, поскольку многообразия из класса $\mathcal{M}_e$ обладают единственными минимальными специальными спайнами. Более того, полученные по шаблонам из $\mathcal{S}^c_{\mathbb{F}}$ многообразия попадают в $G^{-1}(\mathcal{F}, b)$. А потому для доказательства теоремы 1 остаётся лишь выразить сложность полученных многообразий через характеристики шаблонов.

Замечание 7. *Пусть P - утолщаемый гомологически минимальный полиэдр из $\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{S}^c_{\mathbb{F}})$. Тогда число истинных вершин $\mathtt{v}(P)$ специального полиэдра P отличается от числа вершин валентности 4 графа, дополняющего набор поверхностей шаблона $\mathcal{D}(P)$, на константу, зависящую лишь от набора оснащённых поверхностей $\mathbb{F}$.*

Поскольку триангуляционная сложность многообразий из $\mathcal{M}_e$ совпадает с числом истинных вершин гомологически минимальных спайнов, то оценка из леммы 13 и замечание 7 завершают доказательство теоремы.

6. Доказательство теоремы 2

Пусть ориентируемое многообразие M принадлежит множеству $\mathcal{M}_{g,k}$ для некоторых $g \geqslant k > 0$. Покажем, $G(M) = (\sqcup_{i=1}^{k} \mathbb{T}_i, k)$, где $\mathbb{T}_i$ — торы. По определению множества $\mathcal{M}_{g,k}$, короткие компоненты края ∂M являются торами, и их ровно k штук. Остаётся выразить второе число Бетти $\beta_2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ многообразия M. Из [10, Теорема 1.2] известно, что $c_\Delta(M) = g + k$. Поскольку $M \in \mathcal{M}_e$, то $\beta_1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = c_\Delta(M) = g + k$. Эйлерова характеристика многообразия M выражается через эйлерову характеристику края ∂M и равняется $1 - g$. В силу связности многообразия M имеем:

$$\begin{aligned}\beta_2(M,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \chi(M)+\beta_1(M,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})-\beta_0(M,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\\ &= (1-g)+(g+k)-1\\ &= k.\end{aligned}$$

Пусть теперь ориентируемое многообразие M лежит в классе $\mathcal{M}_e$, и $G(M) = (\sqcup_{i=1}^k \mathbb{T}_i, k)$ для некоторого $k > 0$. Покажем, что тогда M принадлежит множеству $\mathcal{M}_{g,k}$ для некоторого $g \geqslant k$. В [11] нами было доказано, что край любого многообразия из класса $\mathcal{M}_e$ содержит единственную длинную компоненту связности, более того, её род оценивается снизу суммой родов коротких компонент края. Следовательно, $\partial M = \Sigma_g \cup \sqcup_{i=1}^k \mathbb{T}_i$ для некоторого $g \geqslant k$, где Σ_g — ориентируемая поверхность рода g. Остаётся показать, что M обладает гомологически минимальной триангуляцией, содержащей в точности $g+k$ тетраэдров. Имеем:

$$\begin{aligned}c_\Delta(M) &= \beta_1(M,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \beta_0(M,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})+\beta_2(M,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})-\chi(M)\\ &= 1+k-(1-g)\\ &= g+k.\end{aligned}$$

Список литературы

[1] P. J. Callahan, M. V. Hildebrand, J. R. Weeks, *A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement*, Math. Comp., 68:225 (1999), 321–332.

[2] M. Culler, N. M. Dunfield, M. Goerner, J. R. Weeks, *SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds*, http://snappy.computop.org/.

[3] B. A. Burton, R. Budney, W. Pettersson, et al., *Regina: Software for low-dimensional topology*, https://regina-normal.github.io/.

[4] E. Fominykh, S. Garoufalidis, M. Goerner, V. Tarkaev, A. Vesnin, *A census of tetrahedral hyperbolic manifolds*, Experimental Mathematics, 25:4 (2016), 466–481.

[5] M. Fujii, *Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra*, Tokyo J. Math., 13:2 (1990), 353–373.

[6] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary*, Experiment. Math., 13 (2004), 171–184.

[7] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds*, Pacific J. Math., 210:2 (2003), 283–297.

[8] А. Ю. Веснин, В. Г. Тураев, Е. А. Фоминых, *Сложность виртуальных трехмерных многообразий*, Математический сборник, 207:11 (2016), 4–24.

[9] А. В. Малютин, Е. А. Фоминых, Е. В. Шумакова, *3-многообразия, задаваемые 4-регулярными графами с тремя эйлеровыми циклами*, УМН, 76:6 (2021), 197–198.

[10] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Dehn filling of cusped hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary*, J. Diff. Geom., 64:3 (2003), 425–455.

[11] E. Fominykh, D. Nigomedyanov, *Minimal ideal triangulations of hyperbolic 3 manifolds with geodesic boundary via $\mathbb{Z}_2$-homology*, PDMI preprints (2020).

[12] S. Matveev, *"Algorithmic topology and classification of 3-manifolds"*, Springer, Berlin, 2007.