Санкт-Петербургский государственный университет

Иванов Михаил Павлович

Выпускная квалификационная работа

О раскрасках графов

Уровень образования: магистратура
Направление 01.04.01 «Математика»
Основная образовательная программа ВМ.5832.2021 «Математика»

Научный руководитель: профессор Факультета математики и компьютерных наук СПбГУ, д.ф.-м.н. Петров Фёдор Владимирович

Рецензент: старший научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова РАН, д.ф.-м.н. Карпов Дмитрий Валерьевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1. Введение

Мы будем работать с неориентированными графами без петель и кратных рёбер и называть их просто *графами*. Если разрешены кратные рёбра, мы будем говорить о *мультиграфе*, но петли всё равно будут запрещены. Как обычно, для вершины $v \in V(G)$ мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(v)$ *окрестность* вершины v, то есть множество вершин, смежных с ней; через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ мы будем обозначать соответственно максимальную и минимальную степень вершины графа G.

В этой работе мы попытаемся обобщить теорему Брукса [1], утверждающую, что для любого натурального $\Delta \geqslant 3$ и для любого графа G без подграфов вида $K_{\Delta+1}$, имеющего $\Delta(G) \leqslant \Delta$, верно $\chi(G) \leqslant \Delta$, на f-динамические раскраски — модификацию *динамических раскрасок*, предложенных Монтгомери в [2].

Определение 1. Пусть $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ — частичная функция. Раскраску графа G будем называть *f-динамической*, если для каждого $p \in \operatorname{Dom} f$ верно следующее: у каждой вершины $v \in V(G)$, имеющей степень $\deg v \geqslant p$, в её окрестности имеются вершины хотя бы $f(p)$ различных цветов.

Через $\chi_f(G)$ будем обозначать *f-хроматическое число* графа G, то есть наименьшее натуральное m такое, что G имеет правильную f-динамическую раскраску в m цветов, или *правильную f-динамическую m-раскраску* (или $+\infty$, если такого числа m не существует).

Будем говорить, что G *списочно f-раскрашиваем в m цветов*, если для любого назначения вершинам G списков цветов из некоторой палитры $\mathcal{P}$ существует правильная f-динамическая $\mathcal{P}$-раскраска G, в которой каждая вершина покрашена в некоторый цвет из её списка. Через $\mathrm{ch}_f(G)$ будем обозначать *списочное f-хроматическое число* графа G, то есть наименьшее натуральное m такое, что G является списочно f-раскрашиваемым в m цветов (или $+\infty$, если такого числа m не существует).

Мы будем через $\{(p_1, c_1), (p_2, c_2), \ldots, (p_q, c_q)\}$ обозначать частичную функцию, для каждого i отображающую p_i в c_i. В частности,

- $\varnothing$-динамическая раскраска — это просто раскраска (соответствующее хроматическое и списочное хроматическое число обозначаются $\chi(G)$ и $\mathrm{ch}(G)$);

- $\{(2,2)\}$-динамическая раскраска — это динамическая раскраска графа (соответствующее хроматическое и списочное хроматическое число обозначаются $\chi_2(G)$ и $\mathrm{ch}_2(G)$);

- $\{(c,c)\}$-динамическая раскраска — это *c-невырожденная* раскраска.

В [4] c-невырожденные раскраски обобщаются до *(c,p)-невырожденных* раскрасок (в наших терминах — до $\{(p,c)\}$-динамических). Там получен следующий аналог теоремы Брукса.

Теорема (Н. В. Гравин, 2009)**.** *Пусть G — граф, натуральное $\Delta \geqslant 3$ таково, что G не содержит подграфа $K_{\Delta+1}$ и имеет $\Delta(G) \leqslant \Delta$. Тогда для любого натурального $c \geqslant 2$ выполнено $\chi_{\{(p,c)\}}(G) \leqslant \Delta$, где*

$$p = \big(c^3 + 8c^2 + 19c + 6\big)(c+1).$$

Это весьма сильный результат, однако он предлагает большее, чем теорема Брукса, лишь для очень большой палитры (например, при $c = 2$ условие динамичности накладывается лишь на вершины степеней, не меньших 252, значит, и раскрашивается такой граф не менее чем в 252 цвета). В нескольких работах по динамическим раскраскам были применены более тонкие методы, позволяющие сильно сократить эту границу. Например, в следующих работах доказано существование раскрасок при условии, что число используемых цветов на один больше, чем максимальная степень графа.

Теорема (H.-J. Lai, B. Montgomery, H. Poon, 2003, [3])**.** *Пусть G — граф, натуральное $\Delta \geqslant 3$ таково, что $\Delta(G) \leqslant \Delta$. Если $\Delta = 3$, то G не содержит компоненту связности C_5. Тогда $\chi_2(G) \leqslant \Delta + 1$.*

Теорема (S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam, 2009, [5])**.** *Пусть G — граф, натуральное $\Delta \geqslant 3$ таково, что $\Delta(G) \leqslant \Delta$. Если $\Delta = 3$, то G не содержит компоненту связности C_5. Тогда $\mathrm{ch}_2(G) \leqslant \Delta + 1$.*

В 2010 году в [6] Карпов доказал динамический вариант теоремы Брукса (то есть использовал в динамической раскраске графа $\Delta(G)$ цветов), начиная с максимальной степени восемь; в [7] он усилил этот результат, доказав его же для всех $\Delta \geqslant 6$.

Теорема (Д. В. Карпов, 2016, [7])**.** *Для графа H назовём его* 1-подразбиением *граф, получаемый из H заменой нескольких (возможно, нуля) рёбер на цепочки длины два (с каждой такой цепочкой добавляется одна новая вершина степени два). Обозначим через $\mathcal{K}_n$ класс всех 1-подразбиений графа K_n.*

Пусть G — граф, натуральное $\Delta \geqslant 6$ таково, что $\Delta(G) \leqslant \Delta$.

1. *Если G имеет компоненту связности из $\mathcal{K}_{\Delta+1}$, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$.*

2. *Если G не имеет компоненты связности из $\mathcal{K}_{\Delta+1}$, то $\chi_2(G) \leqslant \Delta$.*

В этой работе мы докажем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $f_{(2,k)}$ — частичная функция $\{(2,2),(k,3)\}$.*

Пусть G — граф, натуральное число Δ таково, что $\Delta(G) \leqslant \Delta$, $k \in \{3,4,5,6\}$. Обозначим $g(k) = \{(3,6),(4,13),(5,31)\}$. Тогда:

- *при $k \in \{3,4,5\}$ и $\Delta \geqslant g(k)$ выполнено $\mathrm{ch}_{f_{(2,k)}}(G) \leqslant \lceil \frac{6}{k}\Delta \rceil + 1$;*
- *при $k = 6$, а также при $k \in \{3,4,5\}$ и $\Delta < g(k)$ выполнено $\mathrm{ch}_{f_{(2,k)}}(G) \leqslant \max\{3k+1, \Delta + 7 + \lceil \varepsilon(\Delta,k) \rceil\}$.*

Функция $\varepsilon(\Delta,k) = \Theta\left(\frac{1}{\Delta}\right)$ имеет вид

$$\frac{24k - 84}{\Delta + 13 - 2k + \sqrt{4k^2 + \Delta^2 + 1 - 4k\Delta - 4k + 26\Delta}}.$$

В частности, при $k = 6$ выполнена оценка

$$\mathrm{ch}_{f_{(2,6)}}(G) \leqslant \max\left\{19, \Delta + 7 + \left\lceil \frac{60}{\Delta + 1 + \sqrt{(\Delta+1)^2 + 120}} \right\rceil\right\},$$

и верно $\mathrm{ch}_{f_{(2,6)}}(G) \leqslant \Delta + 8$ при $\Delta \geqslant 28$.

Следствие 1. *Пусть G — граф, натуральное число $\Delta \geqslant 28$ таково, что $\Delta(G) \leqslant \Delta$. Тогда $\mathrm{ch}_{f_{(2,6)}}(G) \leqslant \Delta + 8$.*

Следствие 2. *Пусть G — граф, натуральное число Δ таково, что $\Delta(G) \leqslant \Delta$. Тогда верны следующие неравенства:*

- *$\mathrm{ch}_{f_{(2,3)}}(G) \leqslant 2\Delta + 1$ при $\Delta \geqslant 6$;*

- $\mathrm{ch}_{f_{(2,4)}}(G) \leqslant \left\lceil \frac{3}{2}\Delta \right\rceil + 1$ *при* $\Delta \geqslant 13$;
- $\mathrm{ch}_{f_{(2,5)}}(G) \leqslant \left\lceil \frac{6}{5}\Delta \right\rceil + 1$ *при* $\Delta \geqslant 31$;

При $k \in \{3, 6\}$ мы докажем, что этот результат асимптотически точен по Δ (и отличается от точного на некоторую константу).

Теорема 2. *Пусть $k \in \{3, 6\}$. Тогда существует бесконечная серия графов $G_{\Delta,k}$, параметризованная натуральным числом Δ, что $\Delta(G_{\Delta,k}) = \Delta$ и $\chi_{f_{(2,k)}}(G_{\Delta,k}) = \mathrm{ch}_{f_{(2,k)}}(G_{\Delta,k}) = \frac{6}{k}\Delta + \Theta_{\Delta\to+\infty}(1)$.*

2. Частичные функции и раскраски

Предложение 1. *Пусть $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ — частичная функция. Тогда у любого графа существует f-динамическая правильная раскраска тогда и только тогда, когда для всякого $p \in \mathrm{Dom}\, f$ выполнено $f(p) \leqslant p$.*

Доказательство. Пусть у любого графа существует f-динамическая правильная раскраска. Пусть $p \in \mathrm{Dom}\, f$. Рассмотрим любой граф G, имеющий вершину v степени p, и f-динамически правильно раскрасим его. Число различных цветов в окрестности вершины v не превосходит $\deg_G(v) = p$. С другой стороны, по определению f-динамической раскраски в окрестности v должно быть не менее $f(\deg_G(v)) = f(p)$ цветов; следовательно, $f(p) \leqslant p$.

Обратно, пусть для всякого $p \in \mathrm{Dom}\, f$ выполнено $f(p) \leqslant p$. Рассмотрим любой граф G и раскрасим все его вершины в разные цвета. Эта раскраска правильная; кроме того, для любой вершины v и любого $p \in \mathrm{Dom}\, f$, если $p \leqslant \deg_G(v)$, то число различных цветов в окрестности v равно $\deg_G(v) \geqslant p \geqslant f(p)$. Значит, раскраска также является f-динамической, что и требовалось. □

Определение 2. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$. Обозначим через $f_{(2,k)}$ частичную функцию $\{(2, 2), (k, 3)\}$.

Из предложения 1 мы видим, что $f_{(2,k)}$-динамические раскраски осмысленно рассматривать только при $k \geqslant 3$.

Далее в доказательствах, касающихся f-динамических раскрасок, нам будет порой удобно считать, что f является не частичной, а всюду определённой функцией.

Определение 3. Пусть $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ — частичная функция. Обозначим через $\hat{f}$ функцию, задаваемую как

$$\hat{f}(p) = \begin{cases} \max_{\substack{q \in \operatorname{Dom} f \\ q \leqslant p}} \{0, f(q)\}, & p = 0; \\ \max_{\substack{q \in \operatorname{Dom} f \\ q \leqslant p}} \{1, f(q)\}, & p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Замечание 1. $\hat{f}$ является всюду определённой на $\mathbb{N}_0$ функцией.

Кроме того, $\hat{f}$ неубывающая, так как при росте p максимум в её определении берётся по всё большему множеству значений f.

Предложение 2. *Пусть G — граф, c — его раскраска. Тогда c является f-динамической тогда и только тогда, когда она является $\hat{f}$-динамической.*

Доказательство. Пусть раскраска является f-динамической. Нам надо проверить, что она является $\hat{f}$-динамической, то есть убедиться, что для всякой вершины $v \in V(G)$ и всякого $p \leqslant \deg_G(v)$ в окрестности v есть не менее $\hat{f}(p)$ разных цветов. В самом деле, посмотрим, где достигается максимум в определении $f(p)$. Если $\hat{f}(p) = f(q)$ для некоторого $q \leqslant p$, то, так как $\deg_G(v) \geqslant q$, по определению f-динамической раскраски имеем, что в окрестности v не менее $f(q) = \hat{f}(p)$ разных цветов. В противном случае $\hat{f}(p) = \min\{1, p\}$, и, очевидно, тогда в окрестности v есть только цветов.

Обратно, пусть раскраска является $\hat{f}$-динамической. Нам надо проверить, что она является f-динамической, то есть убедиться, что для всякой вершины $v \in V(G)$ и всякого $p \in \operatorname{Dom} f$, $p \leqslant \deg_G(v)$, в окрестности v есть не менее $f(p)$ разных цветов. В самом деле, по определению функции $\hat{f}$ в окрестности v есть не менее $\hat{f}(\deg_G(v)) \geqslant f(p)$ разных цветов. $\square$

Пример 1. Для интересующей нас функции $f_{2,k}$ выполнено следующее:

$$\hat{f}_{(2,k)}(p) = \begin{cases} 0, & p = 0; \\ 1, & p = 1; \\ 2, & p \in \{2, 3, \ldots, k-1\}; \\ 3, & p \in \{k, k+1, \ldots\}. \end{cases}$$

3. Конфигурации и их правильные раскраски

Мы будем красить некие более общие конструкции, чем граф не очень большой степени.

Определение 4. *2,3-конфигурация* — это пара (G, H), где

- $G = (V(G), E(G))$ — это граф;
- $H = (V(G), E_2(H), E_3(H))$ — это два гипермультиграфа на множестве вершин $V(G)$. E_2 состоит из подмножеств $V(G)$ размера хотя бы два, E_3 состоит из подмножеств $V(G)$ размера хотя бы три, причём одно и то же подмножество *может* входить входить одновременно в E_2 и в E_3, равно как и входить в них по несколько раз.

Обозначим $V(C) = V(G)$, $E(C) = E(G)$, $E_2(C) = E_2(H)$, $E_3(C) = E_3(H)$.
3-конфигурация — это 2,3-конфигурация с пустым E_2.

Определим раскраску и степень вершины в конфигурации.

Определение 5. Пусть $C = (G, H)$ — 2,3-конфигурация. *Раскраской* C называется раскраска G. 2,3-конфигурация C раскрашена *правильно*, если соответствующая раскраска c обладает следующими свойствами:

- c правильна для G;
- каждое гиперребро $e \in E_2(H)$ содержит вершины хотя бы двух различных цветов;
- каждое гиперребро $e \in E_3(H)$ содержит вершины хотя бы трёх различных цветов.

Хроматические числа 2,3-конфигурации $\chi(C)$ и $\mathrm{ch}(C)$ определяются так же, как и для графа — наименьшие натуральные числа m, для которых соответственно существует правильная раскраска в m цветов или существует правильная списочная раскраска при любом назначении вершинам списков размера m.

Определение 6. Пусть $C = (G, H)$ — 2,3-конфигурация.

Степень вершины $v \in V(C)$ определяется как

$$\deg_C(v) = \deg_G(v) + \deg_H(v) = \deg_G(v) + \sum_{\substack{e \in E_2(C) \\ e \ni v}} 1 + \sum_{\substack{e \in E_3(C) \\ e \ni v}} 1.$$

Потенциал вершины $v \in V(C)$ определяется как

$$\Phi_C(v) = \deg_G(v) + \sum_{\substack{e \in E_2(C) \\ e \ni v}} \frac{2}{|e|} + \sum_{\substack{e \in E_3(C) \\ e \ni v}} \frac{6}{|e|}.$$

Замечание 2. Если рассматривать степень вершины v как наличие $\deg v$ ограничений на её цвет, то потенциал — это коррекция степени на случай гиперребра. Он учитывает, что чем больше гиперребро, тем слабее оно ограничивает раскраску конфигурации. Его естественность станет ещё более явной после определения *трансверсального мультиграфа* конфигурации: потенциал вершины есть не что иное как математическое ожидание её степени в трансверсальном графе (при равномерно случайном выборе активных вершин).

Определение 7. Пусть $C = (G, H)$ — 2,3-конфигурация. Пусть в каждом гиперребре e из H выбрано подмножество его *активных вершин* e_A, причём $|e_A| = 2$ для $e \in E_2(C)$ и $|e_A| = 3$ для $e \in E_3(C)$. (Если e — кратное гиперребро, то для каждого его экземпляра берётся своё e_A, и они могут быть различными.) Назовём *трансверсальным мультиграфом*, или просто *трансверсалью*, мультиграф G', получаемый из G следующей операцией: для каждого гиперребра e из H в G' добавляется клика на множестве вершин e_A.

Предложение 3. *Пусть $C = (G, H)$ — 2,3-конфигурация. Тогда правильная раскраска C — это правильная раскраска хотя бы одного трансверсального мультиграфа C; в частности, хроматическое число C равно минимальному хроматическому числу его трансверсального мультиграфа, а при фиксированном назначении списков C имеет правильную списочную раскраску тогда и только тогда, когда её имеет один из трансверсальных мультиграфов.*

Таким образом, 2,3-конфигурацию мы будем всегда красить так: удачно подбирать трансверсальный мультиграф, а затем красить этот мультиграф. Для раскраски мультиграфа мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Определение 8. Мультиграф G называется *ℓ-редуцируемым*, если для любого его подграфа H выполняется $\delta(H) \leqslant \ell - 1$.

Лемма 1. *Если мультиграф G является ℓ-редуцируемым, то* $\mathrm{ch}(G) \leqslant \ell$.

Следующая теорема позволит нам правильно красить 3-конфигурации.

Теорема 3 (о распределении)**.** *Пусть C — 3-конфигурация, $m \geqslant 2$— натуральное число, не меньшее потенциала каждой вершины v. Тогда у C существует $m+1$-редуцируемая трансверсаль.*

Для доказательства этого факта нам понадобится лемма, доказательство которой по духу и по смыслу близко к доказательству теоремы Татта о равносильности существования k-потока и $\mathbb{Z}_k$-потока.

Определение 9. Пусть C — 2,3-конфигурация, m— натуральное число, не меньшее потенциала каждой вершины v. Рассмотрим любую трансверсаль T. Назовём *избытком* вершины v в ней величину $\mathrm{ex}_T(v) = \deg_T(v) - m$. Назовём *дисбалансом* трансверсали величину

$$\mathrm{db}(T) = \sum_{v \in V(C)} \max\{0, \mathrm{ex}_T(v)\}.$$

Назовём *балансирующим мультиорграфом* мультиорграф D на множестве вершин $V(C)$, получаемый следующим образом: рассматриваются все гиперрёбра e из $H(C)$, для каждого них мы добавляем всевозможные дуги из e_A в $e \setminus e_A$; будем говорить, что эти дуги *принадлежат* гиперребру e. Назовём путь в D *простым*, если все его дуги принадлежат разным гиперрёбрам e. Назовём *балансирующим путём* простой путь в балансирующем мультиорграфе, концы которого имеют ненулевые избытки, причём разных знаков.

Лемма 2 (о балансирующем пути)**.** *Пусть C — 3-конфигурация, m— натуральное число, не меньшее потенциала каждой вершины, T — трансверсаль, v — вершина с положительным избытком. Тогда в балансирующем мультиорграфе существует балансирующий путь, начинающийся в v.*

Доказательство. Для начала допустим, что есть хоть какой-то путь (необязательно простой). Рассмотрим кратчайший из них. Если в нём две разных дуги uw и $u'w'$ принадлежат одному и тому же гиперребру e (будем считать, что первой в пути идёт дуга uw), то на самом деле этот путь можно сократить, пройдя по дуге uw', которая тоже принадлежит e, а, значит, и $A(D)$. Таким образом, если есть хоть какой-то путь, то есть и простой.

Пусть X — множество всех вершин, достижимых из v в D. Нам достаточно доказать, что в X есть вершина с отрицательным избытком. Пусть это не так. Обозначим

$$d = \sum_{v \in X} \deg_G(v),$$

пусть Y — множество гиперрёбер $e \in E_3$, у которых e_A пересекается с X. Любому такому гиперребру принадлежат все дуги из $e_A \cap X$ в $e \setminus e_A$, так что по определению достижимости $e \setminus e_A$ полностью лежит в X. Таким образом, $|e \cap X| - |e_A \cap X| = |e| - |e_A| = |e| - 3$, откуда

$$1 - \frac{|e_A \cap X|}{|e \cap X|} = \frac{|e| - 3}{|e \cap X|} \geqslant \frac{|e| - 3}{|e|} = 1 - \frac{3}{|e|}.$$

Таким образом, $\frac{6}{|e|} \cdot |e \cap X| \geqslant 2|e_A \cap X|$. То же самое верно и для $e \notin Y$, так как для них правая часть просто равна нулю.

Сравним суммарный потенциал на X и суммарную степень на X. Суммарный потенциал равен

$$\sum_{v \in X} \Phi_C(v) = d + \sum_{v \in X} \sum_{\substack{e \in E_3(C) \\ e \ni v}} \frac{6}{|e|} =$$
$$= d + \sum_{e \in E_3(C)} \sum_{v \in e \cap X} \frac{6}{|e|} = d + \sum_{e \in E_3(C)} \frac{6}{|e|} \cdot |e \cap X|.$$

Суммарная же степень равна

$$\sum_{v \in X} \deg_T(v) = d + \sum_{v \in X} \sum_{\substack{e \in E_3(C) \\ e_A \ni v}} 2 = d + \sum_{e \in E_3(C)} \sum_{v \in e_A \cap X} 2 = d + \sum_{e \in E_3(C)} 2|e_A \cap X|.$$

Как мы выяснили ранее, первая сумма почленно не меньше второй суммы; следовательно, $\sum_{v \in X} \Phi_C(v) \geqslant \sum_{v \in X} \deg_T(v)$. Вычтем m из каждого слагаемого: $\sum_{v \in X} \Phi_C(v) - m \geqslant \sum_{v \in X} \deg_T(v) - m = \sum_{v \in X} \mathrm{ex}_T(v)$. В левой части каждое слагаемое неположительное, так что и вся левая часть не превосходит нуля. В правой части есть положительное слагаемое $\mathrm{ex}_T(v)$; значит, там обязано быть и отрицательное слагаемое $\mathrm{ex}_T(u)$. Следовательно, существует балансирующий путь из v в вершину u с отрицательным избытком, что и требовалось. $\square$

Замечание 3. Отметим, что утверждение леммы верно и для 2,3-конфигураций. Мы не стали приводить более общее доказательство, так как обобщить доказательство теоремы о распределении для 2,3-конфигураций нам не удалось.

Доказательство теоремы 3 о распределении. Сначала докажем, что есть трансверсаль T с $\Delta(T) \leqslant m+1$. В самом деле, рассмотрим трансверсаль с наименьшим дисбалансом. Если она не подходит, то в ней есть вершина v степени хотя бы $m+2$, то есть с избытком, не меньшим двойки. По лемме 2 есть балансирующий путь $P = v_0 v_1 \dots v_r$ из v в некоторую вершину u с отрицательным избытком ($v_0 = v$, $v_r = u$). Проведём следующую процедуру: для каждой дуги $v_i v_{i+1}$ пути P, принадлежащей некоторому гиперребру e, деактивируем в e v_i и активируем v_{i+1}. Заметим, что эти действия независимы, так как путь P простой и все e_i независимы. Каждое из этих действий по разу уменьшает на два и увеличивает на два избыток каждой внутренней вершины P — суммарно их степени и избытки не изменятся. У v избыток уменьшится на два, а у u — вырастет на два. Поскольку $\mathrm{ex}_T(v) \geqslant 2$, легко видеть, что дисбаланс трансверсали строго уменьшился, что противоречит минимальности.

Рассмотрим любую компоненту связности T. Если $\delta(T) \leqslant m$, то ясно, что она $m+1$-редуцируемая: в самом деле, если мы не выкинули ни одной вершины, то вершина минимальной степени и есть нужная в определении редуцируемости; если мы часть вершин выкинули, а часть оставили, то какая-то выкинутая смежна в T с какой-то оставленной, и эта оставленная имеет степень строго меньше $m+1$. Таким образом, мы доказали следующее: существует трансверсаль, в которой каждая компонента либо $m+1$-регулярная, либо $m+1$-редуцируемая. Назовём такие трансверсали *почти редуцируемыми*.

Докажем, что существует почти редуцируемая трансверсаль без $m+1$-регулярных компонент; она и будет искомой $m+1$-редуцируемой трансверсалью. Для этого рассмотрим почти редуцируемую трансверсаль с наименьшим числом $m+1$-регулярных компонент. Рассмотрим любую вершину этой компоненты. По лемме 2 есть балансирующий путь из этой вершины в вершину с отрицательным избытком — то есть в вершину, лежащую в $m+1$-редуцируемой компоненте. Раз есть путь, значит, есть и некоторая дуга vu, ведущая из $m+1$-регулярной компоненты X в $m+1$-редуцируемую компоненту Y. Пусть она принадлежит гиперребру e, пусть $e_A = \{v, a, b\}$. Ясно, что $v, a, b \in X$, $u \in Y$. Давайте переключим активное множество на $e'_A = \{u, a, b\}$. Заметим, что при $|X| \geqslant 4$ (то есть при $m+1 \geqslant 3$, то есть при $m \geqslant 2$) эта операция приведёт к объединению X и Y в одну компоненту $X \cup Y$. Остальные компоненты не поменялись, так что нам надо просто доказать, что $X \cup Y$ — $m+1$-редуцируемая. В самом деле,

- если мы не выкинули вершину v, то она имеет степень не более $m-1$;
- если мы выкинули вершину v, но оставили хотя бы одну вершину $w \in X \setminus \{v, a, b\}$, то у такой вершины w степени не более m;
- если вы выкинули все вершины из $X \setminus \{a, b\}$, но оставили a (про b аналогично), то степень a не более двух (она может быть смежна только с b и u);
- если всё множество X выкинуто, воспользуемся $m+1$-редуцируемостью Y.

□

Следствие 3. *Пусть C — 3-конфигурация, $m \geqslant 2$— натуральное число, не меньшее потенциала каждой вершины v. Тогда $\mathrm{ch}(C) \leqslant m+1$.*

Доказательство. По теореме 3 построим $m+1$-редуцируемую трансверсаль T, по лемме 1 имеем $\mathrm{ch}(T) \leqslant m+1$, а по предложению 3 получаем $\mathrm{ch}(C) \leqslant m+1$. □

4. Динамические раскраски конфигураций

Здесь и далее $k \geqslant 3$ — некоторое фиксированное натуральное число. Наша цель — доказывать существование $f_{(2,k)}$-динамических правильных раскрасок графов в малое число цветов. Обобщим это понятие на конфигурации.

Определение 10. Пусть $C = (G, H)$ — 2,3-конфигурация, c — её раскраска. Она называется $f_{(2,k)}$-*динамической*, если для каждой вершины v верно следующее: среди цветов вершин $\mathrm{N}_G(v)$ есть не менее $r_C(v)$ различных, где $r_C(v) = \hat{f}_{(2,k)}(\deg_C(v)) - \deg_H(v)$. Как обычно, через $\chi_{f_{(2,k)}}(C)$ и $\mathrm{ch}_{f_{(2,k)}}(C)$ обозначим наименьшие m такие, что C имеет правильную $f_{(2,k)}$-динамическую раскраску в фиксированные m цветов или правильную $f_{(2,k)}$-динамическую списочную раскраску для любого назначения всем вершинам списков размера m, соответственно.

Теорема 4. *Пусть $\Delta \in \mathbb{N}$. Назовём 2,3-конфигурацию C* хорошей, *если в ней каждое гиперребро $e \in E_3(C)$ имеет размер не менее k, а $\Delta(C) \leqslant \Delta$. Пусть C — хорошая 2,3-конфигурация. Обозначим $g(k) = \{(3, 6), (4, 13), (5, 31)\}$. Тогда:*

- *при $k \in \{3, 4, 5\}$ и $\Delta \geqslant g(k)$ выполнено $\mathrm{ch}_{f_{(2,k)}}(C) \leqslant \left\lceil \frac{6}{k}\Delta \right\rceil + 1$;*

- *при $k = 6$, а также при $k \in \{3, 4, 5\}$ и $\Delta < g(k)$ выполнено $\mathrm{ch}_{f_{(2,k)}}(C) \leqslant \max\{3k + 1, \Delta + 7 + \lceil \varepsilon(\Delta, k) \rceil\}$.*

Функция $\varepsilon(\Delta, k) = \Theta\left(\frac{1}{\Delta}\right)$ имеет вид

$$\frac{24k - 84}{\Delta + 13 - 2k + \sqrt{4k^2 + \Delta^2 + 1 - 4k\Delta - 4k + 26\Delta}}.$$

Сразу приведём следствие.

Вывод теоремы 1 из 4. Пусть G — граф, Δ — натуральное число, такое что $\Delta(G) \leqslant \Delta$. Построим по G конфигурацию $C = (G, H)$, в которой $E_2(C) = E_3(C) = \varnothing$ (таким образом, в H нет гиперрёбер). Полученная 2,3-конфигурация является хорошей, так как $E_3(C) = \varnothing$, а $\Delta(C) = \Delta(G) \leqslant \Delta$. Правильные списочные $f_{(2,k)}$-динамические раскраски этой конфигурации — то же самое, что и правильные списочные $f_{(2,k)}$-динамические раскраски G: в самом деле,

- так как C не содержит гиперрёбер, правильность раскраски C и G равносильна;

- раскраска конфигурации $f_{(2,k)}$-динамическая тогда и только тогда, когда у каждой вершины не менее $r_C(v)$ соседей различных цветов, где $r_C(v) = \hat{f}_{(2,k)}(\deg_C(v)) - \deg_H(v)$. Поскольку H пустой, имеем $r_C(v) = \hat{f}_{(2,k)}(\deg_C(v))$. Таким образом, это должна быть

$\hat{f}_{(2,k)}$-динамическая раскраска G, что по предложению 2 равносильно $f_{(2,k)}$-динамичности раскраски G.

Значит, списочное $f_{(2,k)}$-хроматическое число этой конфигурации равно списочному $f_{(2,k)}$-хроматическому числу G, и любая оценка, верная для первого, верна и для второго. $\square$

Доказательство теоремы 4. Мы выберем некоторое $\ell = \ell(k, \Delta)$ и будем доказывать утверждение по индукции по размеру конфигурации: сначала по $|V(C)|$, затем — по $|E_3(C)|$, наконец — по $|E_2(C)|$. По ходу дела мы будем находить условия на ℓ, которых достаточно, чтобы индукция работала. В конце мы вычислим наименьшее такое ℓ.

Рассмотрим текущую конфигурацию C. Будем разбирать случаи, в каждом следующем считая, что условия всех прошлых не выполнены.

1. *Есть вершина v, у которой* $\deg_C(v) \leqslant k$. Пусть $r = r_C(v) = \hat{f}_{(2,k)}(\deg_C(v)) - \deg_H(v)$ (напомним, что r — это требование на динамичность окрестности v в раскраске C). Построим C' из C следующим образом: удалим v, все рёбра и E_2-гиперрёбра, инцидентные v; из всех E_3-гиперрёбер, инцидентных v, выкинем v, удалим такие гиперрёбра из E_3 и переместим их в E_2; а также, если $r \in \{2, 3\}$, добавим множество $\mathrm{N}_G(v)$ в $E_r(C')$. Докажем, что получилась хорошая конфигурация. В самом деле, ни у какой вершины не увеличилось число объектов (суммарное число рёбер и гиперрёбер), в которых она находится. Единственное новое E_3-гиперребро, которое могло появиться — это $\mathrm{N}_G(v)$ — докажем, что в таком случае оно имеет размер k. А именно, так как мы его добавили в $E_r(C')$, имеем $r = 3$. При этом $r = \hat{f}_{(2,k)}(\deg_C(v)) - \deg_H(v)$, где уменьшаемое не более тройки, а вычитаемое неотрицательное, отсюда $\hat{f}_{(2,k)}(\deg_C(v)) = 3$ и $\deg_H(v) = 0$. Из первого равенства мы можем заключить, что $\deg_C(v) \geqslant k$; при этом в заголовке случая сказано, что $\deg_C(v) \leqslant k$, так что получаем $\deg_C(v) = k$. Значит, $\deg_G(v) = \deg_C(v) - \deg_H(v) = k - 0 = k$, откуда получаем, что размер гиперребра $\mathrm{N}_G(v)$ равен k.

   C' меньше, чем C, поэтому раскрасим C' по индукционному предположению. Теперь вернём вершину v и покрасим её со следующими ограничениями:

   - v должна отличаться по цвету от $\mathrm{N}_G(v)$ ($\deg_G(v)$ ограничений);

- v должна отличаться от хотя бы одной вершины из каждого $e \in E_2(C)$, инцидентного v ($\deg_{E_2(C)}(v)$ ограничений);
- она должна отличаться от хотя бы двух вершин из каждого $e \in E_3(C)$, инцидентного v ($2\deg_{E_3(C)}(v)$ ограничений);
- для каждой $u \in \mathrm{N}_G(v)$, имеющей в окрестности не более двух разных цветов, v не должна совпадать с этими цветами ($2\deg_G(v)$ ограничений).

Это получится сделать, если в списке v более $3\deg_G(v)+2\deg_H(v) \leqslant 3\deg_C(v) \leqslant 3k$ цветов, то есть хотя бы $3k+1$ цветов. Значит, требуется $\ell \geqslant 3k+1$.

Докажем, что получилась правильная $f_{(2,k)}$-динамическая раскраска. В самом деле, она правильная из-за первых трёх пунктов ограничений. Проверим динамичности всех вершин. У вершины v она будет выполнена благодаря новому гиперребру $\mathrm{N}_G(v)$ в C'. У вершин из $\mathrm{N}_G(v)$ число $r_{C'}$ могло уменьшиться максимум на единицу по сравнению с r_C, так что того, что v даст им в окрестность новый цвет (но не более чем третий), достаточно. У остальных вершин число $r_{C'}$ не могло уменьшиться, так что требования на покраску их окрестности могли лишь ослабиться.

2. *Есть $e \in E_2(C)$.* Давайте тогда выберем любые две вершины $u, v \in e$ и рассмотрим C', в котором гиперребро e удалено из H, а вместо этого добавлено ребро uv. Это хорошая конфигурация, ведь ни у какой вершины не могла вырасти C-степень, и новых гиперрёбер мы не добавляли. По индукционному предположению раскрасим C'. Докажем, что эта же раскраска подойдёт и к C. В самом деле, правильность раскраски очевидна. Проверим $f_{(2,k)}$-динамичность. Если вершина не входит в e, у неё ничего не поменялось. Если вершина входит в e, но не равна u и v, то в формуле для $r_{C'}$ уменьшаемое либо не изменилось, либо уменьшилось на единицу, а вычитаемое точно уменьшилось на единицу. В сумме точно $r_{C'} \geqslant r_C$, так что требования на покраску окрестности в C мягче, чем в C'. Наконец, у вершин u и v $r_{C'} = r_C + 1$, так что мы даже вправе лишить u и v одного цвета в окрестности C по сравнению с раскраской C'. Ну, когда мы при преобразовании C' в C удалим ребро uv, это и будет единственное удаление максимум одного цвета из их окрестностей.

3. *Есть вершина v с $r = r_C(v) \geqslant 2$ и $\deg_G(v) \leqslant \ell - 2k - 1$.* Заметим, что, поскольку пункт 1) не сработал, все $\deg_C(u) \geqslant k+1$ для всех $u \in V(C)$; поскольку пункт 2) не сработал, C является 3-конфигурацией. Значит, формула для r_C приобретает такой вид: $r_C(v) = 3 - \deg_H(v)$. Таким образом, $\deg_H(v) \leqslant 1$. Выберем подмножество M соседей v: если $\deg_H(v) = 0$, то выберем любые k вершин, а иначе — любые две вершины. Отметим, что $|M| + \deg_H(v) \leqslant k$.

   Построим C' из C следующим образом: удалим v, все рёбра, инцидентные v; из всех E_3-гиперрёбер, инцидентных v, выкинем v, удалим такие гиперрёбра из E_3 и переместим их в E_2; добавим множество M в $E_r(C')$. Докажем, что получилась хорошая конфигурация. В самом деле, ни у какой вершины не увеличилось число объектов, в которых она находится. Единственное новое E_3-гиперребро, которое могло появиться — это $\mathrm{N}_G(v)$, но это возможно лишь в случае $r = 3$, то есть $3 - \deg_H(v) = 3$, откуда $\deg_H(v) = 0$, $|M| = k$, так что это гиперребро не портит хорошую конфигурацию.

   C' меньше, чем C, поэтому раскрасим C' по индукционному предположению. Теперь вернём вершину v и покрасим её со следующими ограничениями:

   - v должна отличаться по цвету от $\mathrm{N}_G(v)$ ($\deg_G(v)$ ограничений);
   - она должна отличаться от хотя бы двух вершин из каждого $e \in E_3(C)$, инцидентного v ($2\deg_{E_3(C)}(v)$ ограничений);
   - для каждой $u \in M$, имеющей в окрестности не более двух разных цветов, v не должна совпадать с этими цветами ($2|M|$ ограничений).

   Итого мы сможем выбрать цвет v, если ℓ больше, чем число ограничений, то есть $\ell \geqslant 1 + \deg_G(v) + 2\deg_H(v) + 2|M|$. Так как $|M| + \deg_H(v) \leqslant k$, правая часть не больше $\deg_G(v) + 2k + 1$. Так как $\deg_G(v) \leqslant \ell - 2k - 1$, ℓ цветов всегда хватит.

   Докажем, что получилась правильная $f_{(2,k)}$-динамическая раскраска. В самом деле, она правильная из-за первых двух пунктов ограничений. Проверим динамичности всех вершин. У вершины v она будет выполнена благодаря новому гиперребру M в C'. У вершин из M число $r_{C'}$ могло уменьшиться максимум на единицу по сравнению с r_C, так что того, что v даст им в окрестность новый цвет (но не более чем третий), достаточно. У остальных вершин число $r_{C'}$ не могло уменьшиться, так что требования на покраску их окрестности могли лишь ослабиться. Отдельно отметим вершины u из $\mathrm{N}_G(v) \setminus M$: в их формуле для r_C вычитаемое не изменилось, а уменьшаемое в C было $\hat{f}_{(2,k)}(\deg_C(u))$, а стало $\hat{f}_{(2,k)}(\deg_C(u)-1)$. Так как C-степени всех вершин не менее $k+1$, оба этих числа равны тройке.

Таким образом, в 2,3-конфигурации C, которую мы сейчас рассматриваем, всего этого нет. Во-первых, она на самом деле является 3-конфигурацией. Во-вторых, каждая вершина v либо вовсе не требует динамичности своей окрестности ($r_C(v) = 1$), либо требует ($r_C(v) \geqslant 2$), но эта вершина имеет $\deg_G(v) \geqslant \ell - 2k$.

Построим 3-конфигурацию C' из C следующим образом: для каждой вершины u, имеющей $r_C(u) \geqslant 2$, добавим $\mathrm{N}_G(u)$ в E_3. Теперь рассмотрим любую вершину $v \in V(C)$ и посмотрим, какой у неё потенциал в C'.

1. Если вершина v лежит в некотором гиперребре из $e \in E_3(C)$, то, поскольку C является хорошей 3-конфигурацией, $|e| \geqslant k$, так что за это же гиперребро в C' потенциал v увеличивается на $\frac{6}{k}$.

2. Если вершина v смежна в G с некоторой вершиной u, то эта вершина может повлиять на потенциал v дважды. Во-первых, просто за соседство с u потенциал v увеличивается на единицу. Во-вторых, если $r_C(u) \geqslant 2$, то вершина v была включена в гиперребро в C', состоящее из соседей u, и её потенциал увеличится на $\frac{6}{\deg_H(u)}$. В этом случае $\deg_G(u) \geqslant \ell - 2k$, итого это слагаемое не более $\frac{6}{\ell-2k}$. Итого получаем добавку к потенциалу не более $1 + \frac{6}{\ell-2k}$.

Так как $\deg_C(v) \leqslant \Delta$, суммарный потенциал не больше суммы Δ слагаемых первого или второго вида, то есть не больше, чем $\max\big\{\frac{6}{k}, 1 + \frac{6}{\ell-2k}\big\}\Delta$.

Итак, мы получили 3-конфигурацию C', в которой максимальный потенциал не превосходит целого числа $m = \big\lceil \max\big\{\frac{6}{k}, 1 + \frac{6}{\ell-2k}\big\}\Delta\big\rceil$. По следствию 3 она может быть правильно списочно раскрашена в $m + 1 = \big\lceil \max\big\{\frac{6}{k}, 1 + \frac{6}{\ell-2k}\big\}\Delta\big\rceil + 1$ цветов (формально, требуется проверить, что $m \geqslant 2$, но это очевидно). По построению правильная раскраска C' является и правильной $f_{(2,k)}$-динамической списочной раскраской C. Значит, требуемая раскраска найдена.

Остаётся понять, каково же требуемое ℓ. Ясны две вещи про ℓ, которых нам достаточно: $\ell \geqslant 3k + 1$ и $\ell \geqslant \big\lceil \max\big\{\frac{6}{k}, 1 + \frac{6}{\ell-2k}\big\}\Delta\big\rceil + 1$.

Задача. *Даны* $k \in \{3,4,5,6\}$ *и* $\Delta \in \mathbb{N}$. *Найти наименьшее натуральное* ℓ, *для которого* $\ell \geqslant 3k+1$ *и* $\ell \geqslant \left\lceil \max\left\{\frac{6}{k}, 1+\frac{6}{\ell-2k}\right\}\Delta\right\rceil + 1$.

Решение. Для начала определим условие, при котором в максимуме стоит брать первый элемент. То есть нам надо определить, при каких Δ выполнено $\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil + 1 \geqslant 3k+1$ и $\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil + 1 \geqslant \left\lceil\left(1+\frac{6}{\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil+1-2k}\right)\Delta\right\rceil + 1$. Первое неравенство равносильно $\Delta > \frac{k(3k-1)}{6}$. Второе неравенство можно упростить до $\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil \geqslant \left\lceil\left(1+\frac{6}{\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil+1-2k}\right)\Delta\right\rceil$, но дальше всё усложняет наличие округления в обеих частях, так что проще всего отказаться от округления в правой части (так как слева целое число), получить неравенство $\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil \geqslant \left(1+\frac{6}{\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil+1-2k}\right)\Delta$, вычесть из обеих частей по Δ — получится $\left\lceil\frac{6-k}{k}\Delta\right\rceil \geqslant \frac{6\Delta}{\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil+1-2k}$ — а дальше рассмотреть случаи.

1. $k=3$: тогда округление в левой части тоже не производится, имеем $\Delta \geqslant \frac{6\Delta}{2\Delta-5}$, откуда $1 \geqslant \frac{6}{2\Delta-5}$, $2\Delta - 5 \geqslant 6$, $\Delta \geqslant 6$.

2. $k=4$: тогда имеем $\left\lceil\frac{\Delta}{2}\right\rceil \geqslant \frac{6\Delta}{\left\lceil\frac{3}{2}\Delta\right\rceil-7}$. При чётных Δ имеем $\frac{1}{2} \geqslant \frac{6}{\frac{3}{2}\Delta-7}$ и $\Delta \geqslant 14$, при нечётных Δ имеем $3\Delta \geqslant 34 + \frac{13}{\Delta}$, откуда $\Delta \geqslant 13$.

3. $k=5$, неравенство имеет вид $\left\lceil\frac{\Delta}{5}\right\rceil \geqslant \frac{6\Delta}{\left\lceil\frac{6}{5}\Delta\right\rceil-9}$. Разбором случаев разных остатков от деления Δ на пять можно убедиться, что это неравенство верно при $\Delta \geqslant 31$.

Итак, пусть $g = \{(3,6),(4,13),(5,31)\}$ — частичная функция, тогда при $k \in \{3,4,5\}$ и $\Delta \geqslant g(k)$ имеем ответ $\ell = \left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil + 1$. Отметим, что при всех $k \in \{3,4,5\}$ и $\Delta \geqslant g(k)$ оказывается, что $\left\lceil\frac{6}{k}\Delta\right\rceil + 1 \geqslant 3k+1$.

Осталось понять, что происходит при $k=6$, а также при $k \in \{3,4,5\}$ и $\Delta < g(k)$. В этом случае следует взять максимум из $3k+1$ и $\lceil h(k,\Delta)\rceil$, где $h(k,\Delta)$ — наибольший корень уравнения $x = \left(1+\frac{6}{x-2k}\right)\Delta + 1$. Это уравнение преобразуется к квадратному уравнению $x^2 - (2k+\Delta+1)x + (2k\Delta + 2k - 6\Delta) = 0$ наибольший корень которого равен

$$\frac{2k+\Delta+1+\sqrt{4k^2+\Delta^2+1-4k\Delta-4k+26\Delta}}{2}.$$

Получается

$$\ell = \max\left\{3k+1, k + \left\lceil \frac{\Delta + 1 + \sqrt{4k^2 + \Delta^2 + 1 - 4k\Delta - 4k + 26\Delta}}{2} \right\rceil \right\}.$$

Также имеет смысл (особенно при $k = 6$, когда $\Delta \to +\infty$) отправить корень в знаменатель:

$$\ell = \max\left\{3k+1, \Delta + 7 + \left\lceil \frac{24k - 84}{\Delta + 13 - 2k + \sqrt{4k^2 + \Delta^2 + 1 - 4k\Delta - 4k + 26\Delta}} \right\rceil \right\}.$$

В такой форме можно сравнить последнее слагаемое с единицей и получить, что $\ell = \Delta + 8$ при $\Delta \geqslant 28$. $\square$

Число ℓ, полученное в этой задаче, как раз и служит верхней оценкой на достаточные размеры списков цветов. $\square$

5. Асимптотическая точность оценки

Доказательство теоремы 2. Если $k = 6$, то мы для каждого Δ приведём граф $G_{\Delta,6}$, у которого $\Delta(G_{\Delta,6}) = \Delta$ и $\chi_{f_{(2,6)}}(G_{\Delta,6}) = \mathrm{ch}_{f_{(2,6)}}(G_{\Delta,6}) = \Delta + 1$. Это просто граф $K_{\Delta+1}$.

Если $k = 3$, то мы для каждого $\Delta \geqslant 6$ с условием $\Delta \equiv 0 \pmod 3$ или $\Delta \equiv 1 \pmod 3$ приведём граф $G_{\Delta,3}$, у которого $\Delta(G_{\Delta,3}) = \Delta$ и $\chi_{f_{(2,3)}}(G_{\Delta,3}) = \mathrm{ch}_{f_{(2,3)}}(G_{\Delta,3}) = 2\Delta + 1$. Для $\Delta \equiv 2 \pmod 3$ мы предлагаем взять граф $G_{\Delta,3} = G_{\Delta-1,3}$ (и, поскольку у него $\Delta(G_{\Delta,3}) = \Delta - 1 < \Delta$, можно к нему добавить компоненту связности $K_{\Delta+1}$, она не изменит хроматические числа), у такого графа будет выполнено $\chi_{f_{(2,3)}}(G_{\Delta,3}) = \mathrm{ch}_{f_{(2,3)}}(G_{\Delta,3}) = 2(\Delta - 1) + 1 = 2\Delta - 1$.

Граф $G_{\Delta,3}$ при $\Delta \equiv 0 \pmod 3$ или $\Delta \equiv 1 \pmod 3$ мы построим так. Пусть $n = 2\Delta + 1$, тогда $n \equiv 1 \pmod 6$ или $n \equiv 3 \pmod 6$. Согласно [8], рёбра графа K_n можно разбить на $\frac{(2\Delta+1)\Delta}{3}$ непересекающихся треугольников. Построим двудольный граф $G_{\Delta,3}$, в первой доле которого n вершин, соответствующих вершинам этого K_n, а во второй доле $\frac{(2\Delta+1)\Delta}{3}$ вершин, соответствующих треугольникам. Вершину из первой доли будем соединять с вершиной из второй доли, если соответствующая вершина K_n лежит в соответствующем треугольнике разбиения. Тогда степени вершин первой доли равны Δ, а второй доли — трём. Таким образом,

$\Delta(G_{\Delta,3}) = \Delta$. Осталось заметить, что в любой $f_{(2,3)}$-динамической раскраске этого графа все n вершин первой доли обязаны быть покрашены в разные цвета, потому что у любой пары вершин есть общий сосед во второй доле, и у этого соседа все три вершины в окрестности должны быть разных цветов. Таким образом, $\mathrm{ch}_{f_{(2,6)}}(G_{\Delta,6}) \geqslant \chi_{f_{(2,6)}}(G_{\Delta,6}) \geqslant 2\Delta+1$. Понять, что $\mathrm{ch}_{f_{(2,6)}}(G_{\Delta,6}) \leqslant 2\Delta + 1$, можно, например, по теореме 1. $\square$

Список литературы

[1] Brooks R. L., On colouring the nodes of network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1941) **37**, 194–197.

[2] Montgomery B., *Dynamic colouring*, Ph. D. Dissertation. West Virginia Univ., 2001.

[3] H.-J. Lai, B. Montgomery, H. Poon, Upper bounds of dynamic chromatic number, Ars Combin. 68 (2003) 193–201.

[4] Н. В. Гравин, Невырожденные раскраски в теореме Брукса, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 4, 105–128.

[5] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam, On the list dynamic coloring of graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 2009, vol. 157, 3005–3007.

[6] Д. В. Карпов, Динамические правильные раскраски вершин графа, *Записки научных семинаров ПОМИ*, 2010, том 381, выпуск 4, 47–77.

[7] D. V. Karpov, An analog of Brooks' Theorem for dynamic colorings, *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 2016, vol. 6, iss. 1, 25–63.

[8] D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, Solution of Kirkman's schoolgirl problem, *Combinatorics, University of California, Los Angeles, 1968, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, XIX: 187–203.