Санкт-Петербургский государственный университет

Тадевосян Арман Арменович

Выпускная квалификационная работа

Энтропия распределений случайных процессов

Уровень образования: магистратура
Направление: 01.04.01 «Математика»
Основная образовательная программа: ВМ.5832.2021 «Современная математика»

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Лифшиц Михаил Анатольевич

Рецензент:
д.ф.-м.н., профессор
Белопольская Яна Исаевна

Санкт-Петербург
2023

Аннотация

Для широкого класса банаховых пространств с гауссовской мерой мы показываем, что их энтропия в смысле Шеннона (mm-энтропия) тесно связана с энтропией соответствующего эллипсоида рассеяния и в определённом диапазоне ведёт себя так же, как логарифм меры малых шаров. Полученные оценки обобщают недавние результаты работы А.М. Вершика и М.А. Лифшица.

Содержание

1 Введение

Пусть $(\mathcal{X}, d)$ – метрическое пространство, $A \subset \mathcal{X}$ – некоторое компактное множество. Поскольку в любом покрытии компактного множества открытыми множествами найдётся конечное подпокрытие, то естественным является желание количественно измерить сложность покрытия этого компактного множества. Обозначим $N(A, \varepsilon)$ минимальное число замкнутых шаров радиуса ε, достаточное, чтобы покрыть A. Величина

$$H(A, \varepsilon) := \log N(A, \varepsilon)$$

называется *энтропией* компакта A или *метрической энтропией* A в пространстве $\mathcal{X}$.

Идея использования энтропии компактов для измерения «массивности» множеств в метрических пространствах восходит ещё к довоенным работам Л.С. Понтрягина и Л.Г. Шнирельмана. А.Н. Колмогоров [20] инициировал систематическое изучение энтропии компактов для различных классов множеств, особенно для компактных классов функций в функциональных пространствах, см., например, знаменитый обзор А.Н. Колмогорова и В.М. Тихомирова [21], комментарий к нему В.М. Тихомирова [25], а также его обзоры [26, 27]. Вскоре энтропия компактов также нашла замечательные применения в теории вероятностей, где Р. Дадли, В.Н. Судаков и К. Ферник на её основе исследовали траекторные свойства гауссовских случайных процессов, см., например, [22, 23].

Следуя К. Шеннону [13, Приложение 7], похожим образом можно ввести понятие энтропии метрического пространства с борелевской мерой $(\mathcal{X}, d, P)$, полагая

$$\begin{aligned} N^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) &:= \min\left\{ n \,\middle|\, \exists x_1, ..., x_n : \ P\left(\mathcal{X} \setminus \cup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)\right) \le \delta \right\}; \\ H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) &:= \log N^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta), \end{aligned}$$

где $B(x, r)$ здесь и далее обозначает замкнутый шар радиуса r с центром в x. Это определение активно использует тот факт, что мера P с точностью до произвольно малой массы сосредоточена на компакте [28]. Индекс «mm» означает «measure-metric» по аналогии с mm-пространствами, введенными Громовым в [6]. Величину $H^{\mathrm{mm}}(\cdot, \cdot)$ в дальнейшем будем называть *mm-энтропией*. Более детальный анализ структуры «метрика плюс мера» см. [17].

Многие авторы впоследствии переоткрывали это определение. В литературе изучались близкие по смыслу к mm-энтропии, но интегральные по форме показатели ε-дискретизации (quantization) пространства с мерой.

Ошибка дискретизации (quantization error) в интегральном виде равна

$$\inf_{x_1, \ldots, x_n} \int_{\mathcal{X}} \min d(x, \{x_1, \ldots, x_n\})^q P(dx)$$

для некоторого показателя q.

Такие моментные характеристики ошибок дискретизации используются в обширной литературе, мотивированной передачей сигналов с помощью словарей.

Упомянем для примера работы Г. Лушги и Ж. Пажеса [12], Ш. Дерайха с соавторами [2, 3, 4, 5]. С другой стороны, А.М. Вершик [14] для построения новых инвариантов в эргодической теории использовал в качестве меры ошибки дискретизации расстояние Канторовича. В работе была введена энтропия на метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \rho)$ относительно борелевской меры μ как

$$H(\rho, \mu, \varepsilon) = \inf H(\nu),$$

где инфимум пробегает по всем дискретным распределениям ν таким, что они находятся в ε-окрестности меры μ по метрике Канторовича k_ρ, а $H(\boldsymbol{p})$ для дискретного распределения $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ определяется классическим образом как

$$H(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

Напомним, что расстояние Канторовича относительно пространства с метрикой $(\mathcal{X}, \mathrm{dist})$ между вероятностными мерами μ_1, μ_2 определяется следующим образом:

$$k_{\mathrm{dist}}(\mu_1, \mu_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu_1, \mu_2)} \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} \mathrm{dist}(x, y) \gamma(dx, dy),$$

где $\Gamma(\mu_1, \mu_2)$ – семейство вероятностных мер с носителем $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, т.ч. их маргинальные распределения совпадают с μ_1 и μ_2. Непосредственно формула для mm-энтропии сигналов обсуждалась разве что в [24] и нескольких других работах тех же авторов.

То, что названо выше mm-энтропией метрического пространства с мерой и фактически есть в работе Шеннона, есть самое естественное по своему объему понятие энтропии, и энтропия компактов это лишь его частный случай при $\delta \to 0$. Поэтому представляет интерес систематическое исследование и вычисление mm-энтропии метрических (и, в частности, линейных нормированных) пространств с мерой, которое начато в статье [18] для банаховых пространств с гауссовской мерой.

Отметим, что mm-энтропия предлагалась в [14] в качестве обобщения энтропии по Колмогорову для уже произвольных автоморфизмов, сохраняющих меру, под названием масштабированной энтропии. Без понятия mm-энтропии такое обобщение невозможно определить.

В то время как энтропии компактов, энтропии динамических систем и их многочисленным применениям посвящены едва ли не тысячи работ, mm-энтропия практически не изучалась и мало использовалась в приложениях.

Стоит ещё упомянуть пользу mm-энтропии для общей теории метрических пространств с мерой, развиваемой в разных направлениях (Громов [6], Вершик [16]), а именно, с точки зрения классификации: mm-энтропия является нетривиальным инвариантом mm-пространств относительно изометрий, сохраняющих меру, и поэтому позволяет утверждать, например, отсутствие изоморфизма двух таких пространств, если их mm-энтропии различны.

2 Основные обозначения

Определение 1 *Для функций f, g будем писать*

$$f(x) \preceq g(x), \qquad \textit{при } x \to a,$$

если $\limsup_{x\to a} f(x)/g(x) < \infty$, *и*

$$f(x) \approx g(x), \qquad \textit{при } x \to a,$$

если $g(x) \preceq f(x) \preceq g(x)$.

Определение 2 *Измеримая функция $J : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ является медленно меняющейся функцией на бесконечности, если для любого $c > 0$ справедливо*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{J(cx)}{J(x)} = 1.$$

Медленно меняющаяся функция обладает следующими свойствами. Пусть ℓ, ℓ_1, ℓ_2 медленно меняющиеся функции на бесконечности. Тогда

- $\log \ell(x)/\log x \to 0$ при $x \to \infty$;
- для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\ell(x)^\alpha$ также медленно меняющаяся;
- $\ell_1\ell_2, \ell_1 + \ell_2$ тоже медленно меняющиеся;
- для любого $\rho > 0$ верно $\lim_{x\to\infty} x^\rho \ell(x) = \infty, \lim_{x\to\infty} x^{-\rho}\ell(x) = 0$.

Известно, что имеет место теорема Карамата о представлении медленно меняющейся функции: функция $\ell(x)$ является медленно меняющейся тогда и только тогда, когда существует $a > 0$ т.ч. для всех $x \geq a$ функция имеет вид

$$\ell(x) = \eta(x) \exp \int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt,$$

где $\eta(x)$ – ограниченная измеримая функция, сходящаяся к $\eta_0 < \infty$ при $x \to \infty$, $\varepsilon(x)$ – ограниченная измеримая функция, сходящаяся к нулю при $x \to \infty$. Например, при $a > 1$ логарифм $\log x$ имеет представление

$$\log x = \log a \cdot \exp \int_a^x \frac{dt}{t \log t}.$$

В общем случае итерированный логарифм $f_k(x) := \log f_{k-1}(x), k \geq 1$ и $f_0(x) := x$ при $f_k(a) > 0$ имеет представление

$$f_k(x) = f_k(a) \cdot \exp \int_a^x \frac{dt}{\prod_{i=0}^k f_i(t)}.$$

Определение 3 *Функция $J : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ является правильно меняющейся функцией на бесконечности, если для любого $c > 0$ существует и конечен предел*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{J(cx)}{J(x)}.$$

Нам потребуется специальный класс медленно меняющихся функций на бесконечности.

Определение 4 *Измеримая функция $J : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ является логарифмически медленно меняющейся функцией на бесконечности, если она является медленно меняющейся функцией на бесконечности и для любого $\rho > 0$ справедливо*

$$J(x) \approx J(x^\rho), \qquad \textit{при } x \to \infty. \tag{1}$$

Не всякая медленно меняющаяся функция J удовлетворяет условию (1). Например, медленно меняющаяся функция на бесконечности $J(x) = (\log x)^\theta$ при $\theta \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (1). Однако функция $J(x) = \exp((\log x)^\theta)$ при $0 < \theta < 1$ хотя и является медленно меняющейся на бесконечности, но условию (1) не удовлетворяет.

3 Гауссовские меры

В данной работе нас будет интересовать mm-энтропия пространства с гауссовской мерой. Объектом нашего изучения будет центрированная гауссовская мера P в некотором сепарабельном банаховом пространстве $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$. Об определении и свойствах гауссовской меры можно прочесть в [15, 22, 23]. Расстояние в $\mathcal{X}$, разумеется, порождается нормой. Напомним некоторые базовые аспекты теории гауссовских мер, важные для понимания дальнейших результатов и их доказательств.

Гауссовской мере P соответствует *ядро* $H_P \subset \mathcal{X}$ – линейное подпространство, снабжённое своей собственной гильбертовой структурой. Норму в ядре будем обозначать $|\cdot|_P$. Через $D := \{h \in H_P : |h|_P \le 1\}$ обозначим единичный шар ядра, называемый также эллипсоидом рассеяния меры P. Он является компактным подмножеством $\mathcal{X}$. Энтропия компакта $H(D, \cdot)$, вычисленная в $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$, сыграет важную роль в дальнейшем.

Шар в $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$ радиуса r с центром в x будем обозначать $B(x, r)$. Меры шаров подчиняются двум важным неравенствам. Неравенство Т. Андерсона: для любых $x \in \mathcal{X}, r > 0$ верно

$$P(B(x, r)) \le P(B(0, r)). \tag{2}$$

Неравенство К. Бореля: для любых $h \in H_P, r > 0$ верно

$$P(B(h, r)) \ge P(B(0, r)) \exp\{-|h|_P^2/2\}. \tag{3}$$

Нам также потребуется изопериметрическое неравенство (доказанное независимо и практически одновременно В.Н. Судаковым и Б.С. Цирельсоном в СССР и

К. Борелем в Швеции). Пусть $A, B \subset \mathcal{X}$ измеримые множества, $r > 0$ и верно $B \subset \mathcal{X} \backslash (A + rD)$. Тогда

$$P(B) \leq \widehat{\Phi}\left(\Phi^{-1}(P(A)) + r\right), \tag{4}$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона, $\widehat{\Phi}(\cdot) := 1 - \Phi(\cdot)$ – хвост нормального закона, $\Phi^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к Φ.

Существуют глубокие связи между энтропией эллипсоида рассеяния $H(D, \cdot)$ и функцией малых уклонений

$$\phi(\varepsilon) := -\log P(B(0, \varepsilon)).$$

В частности, имеет место соотношение, установленное в работах Дж. Кэлбса, Венбо Ли и В. Линде [9, 11] (см. также [23, Следствия 11.1 и 11.2]).

Теорема 5 *Пусть $0 < \alpha < 2$ и $J(\cdot)$ – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности. Тогда Для малых ε справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\varepsilon^{-\alpha} J(1/\varepsilon) \preceq \phi(\varepsilon) \preceq \phi(2\varepsilon)$, то*
$$H(D, \varepsilon) \succeq \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2+\alpha}}.$$

2. *Если $\phi(\varepsilon) \preceq \varepsilon^{-\alpha} J(1/\varepsilon)$, то*
$$H(D, \varepsilon) \preceq \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2+\alpha}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2+\alpha}}.$$

3. *Если $H(D, \varepsilon) \succeq \varepsilon^{-\alpha} J(1/\varepsilon)$, то*
$$\phi(\varepsilon) \succeq \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

4. *Если $H(D, \varepsilon) \preceq \varepsilon^{-\alpha} J(1/\varepsilon)$, то*
$$\phi(\varepsilon) \preceq \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

Следствие 6 *Пусть $0 < \alpha < 2, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно*

$$\phi(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-\alpha} (\log(1/\varepsilon))^{\beta} \Leftrightarrow H(D, \varepsilon) \approx \varepsilon^{-\frac{2\alpha}{2-\alpha}} (\log(1/\varepsilon))^{\frac{2\beta}{2-\alpha}}. \tag{5}$$

В нашей задаче нам пригодится следствие теоремы, которое переформулируем в следующем виде:

Предложение 7 *Пусть $0 < \beta < 2$ и при малых $\varepsilon > 0$ для некоторых $c_1, c_2 > 0$ верно*

$$c_1 \varepsilon^{-\beta} J(1/\varepsilon) \le H(D,\varepsilon) \le c_2 \varepsilon^{-\beta} J(1/\varepsilon), \tag{6}$$

где $J(\cdot)$ – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ для некоторых $c_3, c_4 > 0$ верно

$$c_3 \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}} \le \phi(\varepsilon) \le c_4 \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}. \tag{7}$$

Это утверждение, в частности, применимо к винеровской мере (распределению винеровского процесса) в пространствах $C[0,1]$, $L_p[0,1]$ с параметром $\beta = 1$, а также во многих других случаях, важных для теории гауссовских случайных процессов.

Упомянем ещё один класс примеров, который наглядно показывает, как может меняться показатель β одной и той же меры при изменении нормы. Пусть P – распределение дробного броуновского движения с показателем $H \in (0,1)$ на ограниченном интервале времени (см. [23, гл.2]; напомним, что винеровская мера соответствует $H = 1/2$). Рассмотрим гёльдеровскую норму

$$||x||_\gamma := \sup_{s \ne t} \frac{|x(s) - x(t)|}{|s-t|^\gamma}.$$

Тогда $\beta = \frac{1}{H-\gamma+1/2}$ при $0 \le \gamma < H$. В следующем параграфе приведем примеры асимптотик функции малых уклонений.

4 Примеры асимптотик функций малых уклонений

В данном разделе будет приведен список асимптотик для функций малых уклонений вида $\log \mathbb{P}(\|X\| \le \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ для случайного процесса X в некотором нормированном пространстве.

Примеры классических результатов уклонений в L_2-норме приведены в [10], приведем здесь несколько из них. Далее запись $f \sim g$, $x \to a$ означает

$$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = 1.$$

Укажем в каждом случае вид функции $J(x) := J(1/\varepsilon)$, участвующей в асимптотике $\log \mathbb{P}(\|X\| \le \varepsilon)$.

- Пусть $W(s,t)$ – двумерный стандартный броуновский лист. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

  $$\log \mathbb{P}\left(\iint_{[0,1]^2} W^2(s,t)\,dtds \le \varepsilon^2 \right) \sim -\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon^{-2} \left(\log \frac{1}{\varepsilon^2} \right)^2.$$

  В данном случае $J(x) = |\log x|^2$.

- Пусть $U(t)$ – процесс Орнштейна-Уленбека. Тогда для вещественных $a < b$ при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \mathbb{P}\left(\int_a^b U^2(t)dt \le \varepsilon^2\right) \sim -\frac{(b-a)^2}{4}\varepsilon^{-2}.$$

  Здесь $J(x) \equiv 1$.

- Пусть $B(t)$ – броуновский мост на $[0,1]$ и пусть $\alpha > 0, \beta = 1 - \alpha^{-1} < 1$. Тогда существует положительная константа c_α, т.ч. при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\mathbb{P}\left(\int_0^1 B^2(t^\alpha)dt \le \varepsilon^2\right) \sim c_\alpha \varepsilon^{-(\alpha-1)/2(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\alpha}{2(\alpha+1)^2}\varepsilon^{-2}\right).$$

В работе [8] показано, что для L_2-нормы с весом ρ, заданной формулой

$$\|X\|_\rho^2 = \int X^2(x)\rho(x)dx,$$

можно доказать общий результат о вероятности малых уклонений, зная асимптотику собственных чисел $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$ интегрального уравнения

$$\lambda f(x) = \int G_X(x,y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}f(y)dt, \tag{8}$$

где G_X – ковариационная функция случайного процесса X. Приведем далее основные примеры асимптотик из данной работы.

- Пусть собственные числа λ_n уравнения (8) имеют асимптотику

$$\lambda_n \sim C^* \frac{\log^\sigma(n+1)}{n^p}, \quad n \to \infty, \quad \sigma \in \mathbb{R},\, p > 1,\, C^* > 0.$$

  Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \mathbb{P}\left(\|X\|_\rho \le \varepsilon\right) \sim C\varepsilon^{-\frac{2}{p-1}} \log^{\frac{\sigma}{p-1}}(1/\varepsilon),$$

  где

$$C = C(\sigma, p, C^*) = -(C^*)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{p-1}{2}\right)^{1-\frac{\sigma}{p-1}} \left(\frac{\pi}{p \sin\frac{\pi}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

  Здесь $J(x) = \log^{\frac{\sigma}{p-1}}(x)$.

- Пусть собственные числа λ_n уравнения (8) имеют асимптотику

$$\lambda_n \sim \frac{C^*}{n\log^\sigma(n+1)}, \quad n \to \infty, \quad \sigma > 1,\, C^* > 0.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \Big| \log \mathbb{P}\left(\|X\|_\rho \le \varepsilon\right) \Big| \sim C\varepsilon^{-\frac{2}{\sigma-1}},$$

где

$$C = C(\sigma, C^*) = \left(\frac{C^*}{\sigma - 1}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

В работе [8] также рассмотрены асимптотики для вероятностей малых уклонений для тензорных произведений процессов, у которых ковариационная функция задана в виде

$$G_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{d} G_{X_i}(x_i, y_i).$$

Весовая функция ρ, участвующая в определении взвешенной L_2-нормы, также факторизуется в произведение весовых функций по каждой координате: $\rho(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{d} \rho_j(x_j)$.

- Пусть $W_d^H(\mathbf{x})$ – d-мерный дробный Броуновский лист, $H \in (0,1)$. Он раскладывается в тензорное произведение одномерных дробных Броуновских движений $W_d^H(\mathbf{x}) = \bigotimes_{j=1}^{d} W^H(x_j)$ и имеет ковариационную функцию

$$G_{W_d^H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2^d} \prod_{i=1}^{d} (x_j^{2H} + y_j^{2H} - |x_j - y_j|^{2H}).$$

Пусть ρ – суммируемая функция на $[0,1]^d$, имеющая вид тензорного произведения, и пусть $J_h = \int_{[0,1]^d} \rho(\mathbf{x})^{1/h} d\mathbf{x}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \mathbb{P}\left(\|W_d^H\|_\rho \le \varepsilon\right) \sim C\varepsilon^{-1/H} \log^{\frac{(d-1)(2H+1)}{2H}}(1/\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} C &= C(d, H) \\ &= -\frac{J_{2H+1} H^{2-d}}{(d-1)!\pi^{d-1}(2H+1)\sin(\frac{\pi}{2H+1})} \left(\frac{J_{2H+1}(\Gamma(2H+1)\sin(\pi H))^d}{(d-1)!(\pi H)^{d-1}(2H+1)\sin(\frac{\pi}{2H+1})}\right)^{\frac{1}{2H}}. \end{aligned}$$

В частности, для $H = 1/2$ при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\log \mathbb{P}\left(\|W_d^{1/2}\|_\rho \le \varepsilon\right) \sim C\varepsilon^{-2} \log^{2(d-1)}(1/\varepsilon),$$

где

$$C = C(d) = -\frac{2^{2d-5}\left(\int_{[0,1]^d} \rho(\mathbf{x})^{1/2} d\mathbf{x}\right)^2}{(d-1)!^2 \pi^{2d-2}}.$$

Здесь $J(x) = \log^{2(d-1)}(x)$.

- Дробный d-мерный Броуновский мост B_d^H, определенный как

$$B_d^H(\mathbf{x}) = \bigotimes_{j=1}^{d} B^H(x_j),$$

где $B^H(x_j) = W^H(x_j) - x_j W^H(1)$, имеет функцию малых уклонений, асимптотически похожую на функцию малых уклонений дробного Броуновского листа. Формально, при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \mathbb{P}\left(\|B_d^H\|_\rho \le \varepsilon\right) \sim \log \mathbb{P}\left(\|W_d^H\|_\rho \le \varepsilon\right).$$

- Изотропно интегрированный d-мерный дробный Броуновский лист порядка m определяется как

$$\left(W_d^H\right)_m(\mathbf{x}) = \bigotimes_{j=1}^{d} \left(W^H\right)_m(x_j),$$

где

$$\left(W^H\right)_m(t) \equiv \left(W^H\right)_m^{[\beta_1,\ldots,\beta_m]}(t) = (-1)^{\beta_1+\ldots+\beta_m} \underbrace{\int_{\beta_m}^{t} \ldots \int_{\beta_1}^{t_1}}_{m} W^H(s) ds dt_1 \ldots .$$

Значения β_k равны либо нулю, либо единице, $t \in [0,1]$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $J_h = \int_{[0,1]^d} \rho(\mathbf{x})^{1/h} d\mathbf{x}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\log \mathbb{P}\left(\|(W_d^H)_m\|_\rho \le \varepsilon\right) \sim C\varepsilon^{-1/(m+H)} \log^{(d-1)\frac{2(m+H)+1}{2(m+H)}}(1/\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} C &= C(m,H,d) \\ &= -\frac{J_{2(m+H)+1}(m+H)^{2-d}}{(d-1)!\pi^{d-1}(2(m+H)+1)\sin\left(\frac{\pi}{2(m+H)+1}\right)} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{J_{2(m+H)+1}(\Gamma(2H+1)\sin(\pi H))^d}{(d-1)!(\pi(m+H))^{d-1}(2(m+H)+1)\sin\left(\frac{\pi}{2(m+H)+1}\right)}\right)^{\frac{1}{2(m+H)}}. \end{aligned}$$

Здесь $J(x) = \log^{(d-1)\frac{2(m+H)+1}{2(m+H)}}(x)$.

- Дробный d-мерный лист Орнштейна-Уленбека $U_{d,(\alpha)}^H, \alpha \in \mathbb{R}_+^d$ определяется как тензорное произведение одномерных дробных процессов Орнштейна-Уленбека $U_{(\alpha_j)}^H$. Ковариационная функция d-мерного процесса задается как

$$G_{U_{d,(\alpha)}^H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{d} \alpha_j |x_j - y_j|^{2H}\right), \quad 0 < H < 1.$$

Определим изотропно интегрированную версию $(U^H_{d,(\alpha)})_m$ дробного процесса Орнштейна-Уленбека похожим образом, как и с дробным Броуновским листом. Тогда для $0 < H < 1, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и суммируемой на $[0,1]^d$ функции $\rho(\mathbf{x}) = \prod_j \rho_j(x_j)$ при $\varepsilon \to 0$ верна асимптотика

$$\log \mathbb{P}\left(\|(U^H_{d,(\alpha)})_m\|_\rho \leq \varepsilon\right) \sim (2^d \alpha_1 \dots \alpha_d)^{\frac{1}{2(m+H)}} \log \mathbb{P}\left(\|(W^H_d)_m\|_\rho \leq \varepsilon\right).$$

Кроме того, можно рассмотреть *мультипараметрические маргинальные процессы*. Пусть $(\Omega_j)_{j=1}^d$ – ограниченные области в $\mathbb{R}^\ell$ с $0 \in \overline{\Omega_j}$. Положим $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_d \subset \mathbb{R}^{d\ell}$. Рассмотрим гауссовский процесс на Ω

$$L^H_{d,\ell}(\mathbf{x}) = \bigotimes_{j=1}^d L^H_\ell(\mathbf{x}_j),$$

где $L^H_\ell, 0 < H < 1$ – дробная Броуновское функция Леви на $\overline{\Omega_j}$ с ковариационной функцией

$$G_{L^H_\ell}(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}_j\|^{2H} + \|\mathbf{y}_j\|^{2H} - \|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\|^{2H}), \quad \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j \in \overline{\Omega_j}.$$

Процесс $L^H_{d,\ell}$ называется дробной d-мерной Броуновской функцией Леви. Справедливы следующие результаты.

- Пусть $L^H_{d,\ell}, 0 < H < 1$ – дробная d-мерная Броуновская функция Леви, $\rho(\mathbf{x}) = \prod_j \rho_j(\mathbf{x}_j)$ – суммируемая неотрицательная функция на Ω и $J_h = \int_\Omega \rho(\mathbf{x})^{1/h} d\mathbf{x}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

  $$\log \mathbb{P}\left(\left\|L^H_{d,\ell}\right\|_\rho \leq \varepsilon\right) \sim C\varepsilon^{-\ell/H} \log^{(d-1)\frac{2H+\ell}{2H}}(1/\varepsilon),$$

  где

  $$\begin{aligned} C &= C(H,\ell,d) \\ &= -H \cdot \left(\frac{2}{H\Gamma(\ell/2)}\right)^d \cdot \left(\frac{\Gamma(\ell/2+H)}{\Gamma(\ell/2)\Gamma(1-H)\pi^H}\right)^{\frac{\ell d}{2H}} \\ &\cdot \left(\frac{J_{\frac{2H+\ell}{\ell}} \pi H}{(d-1)!(2H+\ell)\sin\left(\frac{\pi\ell}{2H+\ell}\right)}\right)^{\frac{2H+\ell}{2H}}. \end{aligned}$$

  Здесь $J(x) = \log^{(d-1)\frac{2H+\ell}{2H}}(x)$.

- Пусть $H \in (0,1)$, рассмотрим на $[0,1]^3$ гауссовское поле $W^{H/2}(x_1) \otimes L^H_2(x_2, x_3)$. Тогда для тех же обозначений, что и в примерах выше, при $\varepsilon \to 0$ верно

  $$\log \mathbb{P}\left(\left\|W^{H/2} \otimes L^H_2\right\|_\rho \leq \varepsilon\right) \sim C\varepsilon^{-2/H} \log^{\frac{H+1}{H}}(1/\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} C &= C(H) \\ &= -\frac{J_{H+1}}{\pi(H+1)\sin\left(\frac{\pi}{H+1}\right)}\left(\frac{J_{H+1}H(\Gamma(H+1))^3\sin(\pi H/2)\sin(\pi H)}{4\pi(H+1)\sin\left(\frac{\pi}{H+1}\right)}\right)^{\frac{1}{H}}. \end{aligned}$$

Здесь $J(x) = \log^{\frac{H+1}{H}}(x)$. В частности, при $H = 1/2, \rho \equiv 1$ получаем тензорное произведение классической Броуновской функции Леви L_2 и дробного Броуновского движения $W^{1/4}$ и соответствующую асимптотику функции малых уклонений при $\varepsilon \to 0$:

$$\log \mathbb{P}\left(\left\|W^{1/4} \otimes L_2\right\| \le \varepsilon\right) \sim -\frac{1}{10368\sqrt{3}}\varepsilon^{-4}\log^3(1/\varepsilon).$$

В работах [7, 19] рассматривается специальный класс процессов, называемых *Multifractional Brownian Motion* (mBM),

$$W^{H(\cdot)}(x) = C_*(H(x))\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}-1}{|\xi|^{H(x)+\frac{1}{2}}}dW(\xi), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $W(\xi)$ обычный винеровский процесс, а функциональный параметр Хёрста $H(x)$ подчинен условию $0 < H(x) < 1$. Множитель

$$C_*(H) = \left(\frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

обеспечивает равенство $\mathbb{E}\,(W^{H(\cdot)})^2(1) = 1$. Процесс $W^{H(\cdot)}$ представляет собой обобщение дробного броуновского движения для переменного параметра H.

Положим $h(x) = H(x) - \min H(x)$. Далее считаем, что $\min H(x) = 1/2$.

- Пусть $H(x) = \frac{1}{2} + (x - x_0)_+^{\gamma}, 0 < x_0 \le 1, \gamma > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

  $$\log \mathbb{P}\left\{\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)} \le \varepsilon\right\} \sim -\frac{x_0^2}{8}\varepsilon^{-2}.$$

  При $x_0 = 1$ получаем стандартный Винеровский процесс на $[0, 1]$. Здесь $J(x) \equiv 1$.

- Пусть $H(x) = \frac{1}{2} + |x - x_0|^{\gamma}, \gamma > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

  $$\log \mathbb{P}\left(\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)} \le \varepsilon\right) \sim -C(x_0)\Gamma^2(1 + 1/\gamma)\,\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|^{-2/\gamma},$$

  где $C(x_0) = 2^{-1-2/\gamma}\mathbf{1}(0 < x_0 < 1) + 2^{-3-2/\gamma}\mathbf{1}(x_0 = 0, 1)$. Здесь $J(x) = |\log x|^{-2/\gamma}$.

- Пусть $H(x) = \frac{1}{2} + |x - x_0|^\gamma \log^b(|x - x_0|^{-1}), x_0 \in (0,1), \gamma > 0, b \in \mathbb{R}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

  $$\log \mathbb{P}\left(\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)} \le \varepsilon\right) \sim -\frac{\gamma^{2b/\gamma}\Gamma^2(1+1/\gamma)}{2^{1+2/\gamma}}\,\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|^{-2/\gamma}|\log\log\frac{1}{\varepsilon}|^{-2b/\gamma}.$$

  Здесь $J(x) = |\log x|^{-2/\gamma}|\log\log x|^{-2b/\gamma}$.

- Пусть функция распределения для $h(x) = H(x) - 1/2$ имеет степенную асимптотику: $\mu_h(s) = |\{0 < x < 1 : 0 < h(x) < s\}| \sim cs^\sigma, \quad s \to 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

  $$\log \mathbb{P}\left(\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)} \le \varepsilon\right) \sim -\frac{c^2\Gamma^2(\sigma+1)}{2^{2\sigma+3}}\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|^{-2\sigma}.$$

  Здесь $J(x) = |\log x|^{-2\sigma}$.

- Пусть параметр Хёрста достигает своего минимального значения на канторовом множестве. Положим $H(x) = h(x) + 1/2, h(x) = (\mathrm{d}(x))^\gamma, \gamma > 0$, где $\mathrm{d}(x)$ – расстояние от точки x до Канторова множества. Здесь окажется, что $\mu_h(s) = |\{0 \le x \le 1 : 0 < h(x) < s\}| = s^{1-\frac{\log 2}{\log 3}}\varphi(\log s^{-1})$, где φ – периодичная функция. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно

  $$\log \mathbb{P}\left\{\left\|W^{H(\cdot)}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant \varepsilon\right\} \sim -2^{-\left(\frac{2}{\gamma}+5\right)}\varepsilon^{-2}|\log\varepsilon|^{-\frac{2}{\gamma}}\widetilde{\Psi}^2\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon^2}\right),$$

  где функция $\widetilde{\Psi}$ периодична с периодом $\gamma\log 3$. Здесь $J(x) = |\log x|^{-\frac{2}{\gamma}}\widetilde{\Psi}^2\left(\log\log x^2\right)$.

5 Оценки mm-энтропии пространства с гауссовской мерой

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 8 *Положим*

$$\Psi(\varepsilon,\delta) := \begin{cases} |\log\delta|^{\beta/2}\,\varepsilon^{-\beta}J(1/\varepsilon), & \text{если } |\log\delta| \ge \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}};\\ \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}, & \text{если } |\log\delta| \le \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}.\end{cases}$$

Если выполнено условие (6)*, то при малых ε, δ, удовлетворяющих дополнительному условию*

$$|\log\delta| = o(\varepsilon^{-\gamma}), \qquad \varepsilon \to 0,$$

с некоторым $\gamma > 0$, верно

$$B_-\Psi(\varepsilon,\delta) \le H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) \le B_+\Psi(\varepsilon,\delta), \tag{9}$$

где B_-, B_+ – константы, зависящие только от $\beta, c_1, c_2, c_3, c_4$ и поведения функции J на бесконечности.

Сравнивая (7) и (9), видим, что в широком диапазоне значений δ энтропия $H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta)$ ведёт себя как логарифм меры малого шара. Однако при малых δ (которые убывают не быстрее, чем экспоненциально относительно параметра ε) происходит фазовый переход и значение δ начинает влиять на mm-энтропию.

6 Доказательства

6.1 Общие оценки mm-энтропии: леммы

Мы дадим одну верхнюю и две нижних оценки, сравнивающих mm-энтропию пространства с гауссовской мерой и энтропию соответствующего эллипсоида рассеяния. В дальнейшем мы применим их к обеим ситуациям из теоремы 8 с разным выбором параметров.

Лемма 9 *Для любых $r,\varepsilon>0$ верно*

$$H^{\mathrm{mm}}\left(\varepsilon, \widehat{\Phi}\left(\Phi^{-1}(e^{-\phi(\varepsilon/2)})+r\right)\right) \le H\left(D,\frac{\varepsilon}{2r}\right). \tag{10}$$

В частности, если выполнено (7) и r,ε,δ таковы, что при $q:=2^{(2+\beta)/(2-\beta)^2}$ выполнено

$$r-q\sqrt{c_4}\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}} \ge \sqrt{2|\log\delta|}, \tag{11}$$

где J – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности, c_4 – постоянная из оценки (7), то

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) \le H\left(D,\frac{\varepsilon}{2r}\right). \tag{12}$$

Доказательство: Доказательство (10) взято из [18] и приведено здесь для полноты содержания. Пусть $n:=N(D,\frac{\varepsilon}{2r})$ и конфигурация $\{x_1,...,x_n\}\subset D$ такова, что

$$D\subset\bigcup_{j=1}^{n}B(x_j,\frac{\varepsilon}{2r}).$$

Тогда

$$rD\subset\bigcup_{j=1}^{n}B(rx_j,\varepsilon/2)$$

и

$$rD+B(0,\varepsilon/2)\subset\bigcup_{j=1}^{n}B(rx_j,\varepsilon).$$

По изопериметрическому неравенству (4)

$$P\left(\mathcal{X}\backslash\bigcup_{j=1}^{n}B(rx_j,\varepsilon)\right)\le\widehat{\Phi}\left(\Phi^{-1}(e^{-\phi(\varepsilon/2)})+r\right),$$

откуда

$$N^{\mathrm{mm}}\left(\varepsilon, \widehat{\Phi}\left(\Phi^{-1}(e^{-\phi(\varepsilon/2)})+r\right)\right) \le n = N(D, \frac{\varepsilon}{2r}),$$

что доказывает (10).

Далее, воспользуемся тем, что $\Phi^{-1}(p) \ge -\sqrt{2|\log p|}$, верхней оценкой из (7) и тем фактом, что J является медленно меняющейся функцией и для нее верна оценка Поттера [1]: при малых $\varepsilon > 0$ верно $J(2/\varepsilon)/J(1/\varepsilon) \le 4$. Получим

$$\Phi^{-1}(e^{-\phi(\varepsilon/2)}) \ge -\sqrt{2|\phi(\varepsilon/2)|} \ge -q\sqrt{c_4}\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}.$$

Далее, применим (11) и получим

$$\widehat{\Phi}\left(-q\sqrt{c_4}\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}+r\right) \le \exp\left\{-\left(-q\sqrt{c_4}\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}+r\right)^2/2\right\} \le \delta.$$

Используя монотонность функции $H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\cdot)$, получим из (10)

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) \le H^{\mathrm{mm}}\left(\varepsilon, \widehat{\Phi}\left(-q\sqrt{c_4}\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}+r\right)\right) \le H\left(D, \frac{\varepsilon}{2r}\right).$$

□

Лемма 10 *Если выполнено* (7), *то справедливо соотношение*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \inf_{\delta\le 1/2} H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta)\,\varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}} \ge c_3, \tag{13}$$

где J *– логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности,* c_3 *– постоянная из оценки* (7).

Доказательство: В силу неравенства Андерсона (2) для любого $\varepsilon > 0$ и любых $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{X}$ верно

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n B(x_j,\varepsilon)\right) \le \sum_{j=1}^n P(B(x_j,\varepsilon)) \le n\,P(B(0,\varepsilon)) = \exp\{\log n - \phi(\varepsilon)\}.$$

Полагая здесь $n \le \exp((c_3-\theta)\varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}})$ с малым $\theta > 0$ и используя нижнюю оценку в (7), получим

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n B(x_j,\varepsilon)\right) \to 0,$$

откуда следует, что при всех $\delta \le 1/2$ и при малых ε

$$\begin{aligned} N^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\ge N^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,1/2) \ge \exp\{(c_3-\theta)\varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}\}, \\ H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\ge H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,1/2) \ge (c_3-\theta)\varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}. \end{aligned}$$

Устремляя $\theta \searrow 0$, получим утверждение леммы. □

Лемма 11 *Для любых $r, \varepsilon > 0$ верно*

$$H^{\mathrm{mm}}\left(\varepsilon, \exp\{-\phi(\varepsilon) - r^2/2\}\right) \geq H(D, \frac{4\varepsilon}{r}). \tag{14}$$

В частности, если выполнено (7) *и r, ε, δ таковы, что*

$$c_4\, \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}} + \frac{r^2}{2} \leq |\log \delta|, \tag{15}$$

где J – логарифмически медленно меняющаяся функция на бесконечности, c_4 – постоянная из оценки (7), *то*

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) \geq H\left(D, \frac{4\varepsilon}{r}\right). \tag{16}$$

Доказательство: Пусть m – наибольшее возможное число точек в D, попарные расстояния между которыми превосходят $\frac{4\varepsilon}{r}$ и $\{x_1, ..., x_m\}$ – соответствующая конфигурация. В силу максимальности имеем $m \geq N(D, \frac{4\varepsilon}{r})$. Рассмотрим конфигурацию $\{rx_1, ..., rx_m\} \subset rD$. Попарные расстояния в ней превосходят 4ε. Поэтому любой шар вида $B(y, \varepsilon)$ пересекается не более чем с одним шаром $B(rx_j, \varepsilon)$. Следовательно, для любой конфигурации $\{y_1, ..., y_n\}$ с $n < m$ найдётся такое $j \leq m$, что

$$B(rx_j, \varepsilon) \subset \mathcal{X} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \varepsilon).$$

Поскольку $rx_j \in rD$, то по неравенству Бореля (3) получаем

$$\begin{aligned} P\left(\mathcal{X} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \varepsilon)\right) &\geq P\left(B(rx_j, \varepsilon)\right) \\ &\geq P\left(B(0, \varepsilon)\right) \exp\{-r^2/2\} = \exp\{-\phi(\varepsilon) - r^2/2\}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$N^{\mathrm{mm}}\left(\varepsilon, \exp\{-\phi(\varepsilon) - r^2/2\}\right) \geq m \geq N(D, \frac{4\varepsilon}{r}),$$

а с ним и (14).

Подставляя верхнюю оценку из (7) в предположение (15), найдём

$$\exp\{-\phi(\varepsilon) - r^2/2\} \geq \exp\{-c_4\, \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}} - r^2/2\} \geq \exp\{-|\log \delta|\} = \delta.$$

Из монотонности функции $H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \cdot)$ получаем

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) \geq H^{\mathrm{mm}}\left(\varepsilon, \exp\{-\phi(\varepsilon) - r^2/2\}\right) \geq H(D, \frac{4\varepsilon}{r}),$$

и (16) доказано. □

6.2 Доказательство основной теоремы

Верхняя оценка

Положим
$$r := \sqrt{2|\log\delta|} + q\sqrt{c_4}\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}.$$
Тогда выполнено (11) и по лемме 9 с учётом верхней оценки в (6) получаем

$$\begin{aligned}
H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\le H\left(D,\frac{\varepsilon}{2r}\right) \le c_2\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{-\beta} J(2r/\varepsilon)\\
&= 2^{\beta}c_2\,\varepsilon^{-\beta}r^{\beta}J(2r/\varepsilon)\\
&\le 2^{2\beta}c_2\,\varepsilon^{-\beta}J(2r/\varepsilon)\max\left\{\sqrt{2|\log\delta|};q\sqrt{c_4}\,\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}\right\}^{\beta}\\
&\le 2^{2\beta}c_2\,\varepsilon^{-\beta}J(2r/\varepsilon)\max\left\{\sqrt{2};q\sqrt{c_4}\right\}^{\beta}\ \max\left\{|\log\delta|;\varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}\right\}^{\beta/2}\\
&= 2^{2\beta}c_2\max\left\{\sqrt{2};q\sqrt{c_4}\right\}^{\beta}\ \Psi(\varepsilon,\delta)\frac{J(2r/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Теперь разберем два случая влияния δ на поведение величины r.

1) Пусть $|\log\delta| \ge \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}$. Поскольку $J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}$ медленно меняющаяся функция, то для $\kappa := \sqrt{2}+q\sqrt{c_4}$, $\rho>0$ при малых ε верно

$$\begin{aligned}
2r/\varepsilon &\ge \frac{2}{\varepsilon}\kappa\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}}J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}\\
&= 2\kappa\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}-1}\underbrace{\frac{J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}}{\varepsilon^{\rho}}}_{\ge 1/2\kappa}\varepsilon^{\rho} \ge \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}+\rho}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, пусть $r_1 := \kappa\sqrt{|\log\delta|}$, тогда верно $r_1 \ge r$. Учитывая условие на малость δ, получаем $\sqrt{|\log\delta|} = o(\varepsilon^{-\gamma/2})$ с $\gamma>0$. Таким образом, получаем двусторонюю оценку на $2r/\varepsilon$ при малых ε:

$$\varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}+\rho} \le 2r/\varepsilon \le 2r_1/\varepsilon \le \varepsilon^{-\gamma/2-1}.$$

Следовательно $2r/\varepsilon = \varepsilon^{-\phi}$ для $2/(2-\beta)-\rho \le \phi \le \gamma/2+1$, откуда, используя следствие из теоремы 2.0.1 (см. [1]), получим

$$J(2r/\varepsilon) \preceq \sup_{2/(2-\beta)-\rho\le\nu\le\gamma/2+1} J(1/\varepsilon^{\nu}) \preceq J(1/\varepsilon).$$

Значит существует $\alpha_1>0$, т.ч. при малых ε верно

$$\begin{aligned}
H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\le 2^{2\beta}c_2\max\left\{\sqrt{2};q\sqrt{c_4}\right\}^{\beta}\ \frac{J(2r/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}\Psi(\varepsilon,\delta)\\
&\le 2^{2\beta}c_2\max\left\{\sqrt{2};q\sqrt{c_4}\right\}^{\beta}\ \frac{\alpha_1 J(1/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}\Psi(\varepsilon,\delta) =: B_+^{(1)}\Psi(\varepsilon,\delta).
\end{aligned}$$

2) Пусть теперь $|\log\delta| \leq \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}}$. При $\delta \leq 1/2$ получаем $\sqrt{|\log\delta|} \geq \sqrt{\log 2}$. Введя $r_2 := \kappa\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}$, аналогичным образом получаем двустороннюю оценку на $2r/\varepsilon$ для любого $\rho > 0$ при малых ε:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{-1/2} \leq 2\kappa\sqrt{|\log\delta|}/\varepsilon &\leq 2r/\varepsilon \\
&\leq 2r_2/\varepsilon = \frac{2\kappa}{\varepsilon}\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}} \\
&= 2\kappa\varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}} \frac{1}{\varepsilon^\rho} \underbrace{J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}\varepsilon^\rho}_{\leq 1/2\kappa} \leq \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}-\rho}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$J(2r/\varepsilon) \preceq \sup_{1/2\leq\nu\leq 2/(2-\beta)+\rho} J(1/\varepsilon^\nu) \preceq J(1/\varepsilon),$$

откуда получаем при $\alpha_2 > 0$ и малых ε

$$
\begin{aligned}
H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\leq 2^{2\beta} c_2 \max\left\{\sqrt{2}; q\sqrt{c_4}\right\}^\beta \frac{J(2r/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}\Psi(\varepsilon,\delta) \\
&\leq 2^{2\beta} c_2 \max\left\{\sqrt{2}; q\sqrt{c_4}\right\}^\beta \frac{\alpha_2 J(1/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}\Psi(\varepsilon,\delta) =: B_+^{(2)}\Psi(\varepsilon,\delta).
\end{aligned}
$$

Таким образом, в любом случае

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) \leq B_+\Psi(\varepsilon,\delta)$$

с константой

$$B_+ := \max\{B_+^{(1)}; B_+^{(2)}\}.$$

Нижняя оценка

Рассмотрим три возможных случая.

1) Пусть $|\log\delta|\varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}} \geq \max\{2c_4, 1\}$. Положим $r := \sqrt{|\log\delta|}$. Тогда выполнено (15) и по лемме 11 с учётом нижней оценки в (6) получаем цепочку неравенств

$$
\begin{aligned}
H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon,\delta) &\geq H\left(D, \frac{4\varepsilon}{r}\right) \geq c_1\left(\frac{4\varepsilon}{r}\right)^{-\beta} J(r/4\varepsilon) \\
&= 2^{-2\beta} c_1\, r^\beta\, \varepsilon^{-\beta} J(r/4\varepsilon) \\
&= 2^{-2\beta} c_1 |\log\delta|^{\beta/2}\varepsilon^{-\beta} J(1/\varepsilon)\frac{J(r/4\varepsilon)r^\beta}{J(1/\varepsilon)|\log\delta|^{\beta/2}} \\
&= 2^{-2\beta} c_1\, \Psi(\varepsilon,\delta)\frac{J(r/4\varepsilon)r^\beta}{J(1/\varepsilon)|\log\delta|^{\beta/2}} \\
&= 2^{-2\beta} c_1\, \Psi(\varepsilon,\delta)\frac{J(r/4\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $r = \sqrt{|\log\delta|} \geq \sqrt{\max\{2c_4, 1\}}\varepsilon^{-\frac{\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}$, то $r/4\varepsilon \geq \alpha_0 \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}$, где $\alpha_0 = \sqrt{\max\{2c_4, 1\}}/4$. Функция $J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}$ медленно меняющаяся, значит для любого $\rho > 0$ верно

$$r/4\varepsilon \geq \alpha_0 \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}} \underbrace{\frac{J(1/\varepsilon)^{\frac{1}{2-\beta}}}{\varepsilon^{\rho}}}_{\geq 1/\alpha_0} \varepsilon^{\rho} \geq \varepsilon^{-\frac{2}{2-\beta}+\rho}$$

при малых ε. Поскольку $|\log\delta| = o(\varepsilon^{-\gamma})$ для $\gamma > 0$, то $r = o(\varepsilon^{-\gamma/2})$, тогда $r/4\varepsilon \leq \varepsilon^{-\gamma/2-1}$. Следовательно $r/4\varepsilon = \varepsilon^{-\phi}$ для $2/(2-\beta) - \rho \leq \phi \leq \gamma/2 + 1$, откуда получаем двустороннюю оценку на $1/\phi$:

$$\frac{1}{1+\gamma/2} \leq \frac{1}{\phi} \leq \frac{1}{2/(2-\beta)-\rho}.$$

Используя следствие из теоремы 2.0.1 (см. [1]), получим

$$J(1/\varepsilon) \preceq \sup_{1/(1+\gamma/2) \leq \nu \leq 1/(2/(2-\beta)-\rho)} J((r/4\varepsilon)^{\nu}) \preceq J(r/4\varepsilon),$$

откуда для $\alpha > 0$ получаем

$$\frac{J(r/4\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)} \geq \frac{\alpha J(1/\varepsilon)}{J(1/\varepsilon)} = \alpha.$$

Значит при малых ε верна оценка снизу

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) \geq 2^{-2\beta} c_1 \alpha \Psi(\varepsilon, \delta).$$

2) Пусть $1 \leq |\log\delta|\, \varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}} \leq 2c_4$. Тогда по лемме 10 при малых ε имеем

$$\begin{aligned}
H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) &\geq \frac{c_3}{2}\, \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}} \\
&= \frac{c_3}{2}\, |\log\delta|^{\beta/2} \varepsilon^{-\beta} J(1/\varepsilon) \left(|\log\delta| \varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}}\right)^{-\beta/2} \\
&\geq \frac{c_3}{2} |\log\delta|^{\beta/2} \varepsilon^{-\beta}\, J(1/\varepsilon)(2c_4)^{-\beta/2} \\
&= 2^{-1-\beta/2} c_3 c_4^{-\beta/2} \Psi(\varepsilon, \delta).
\end{aligned}$$

3) Пусть $|\log\delta|\, \varepsilon^{\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{-\frac{2}{2-\beta}} \leq 1$. Тогда по лемме 10 при малых ε просто имеем

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) \geq \frac{c_3}{2}\, \varepsilon^{-\frac{2\beta}{2-\beta}} J(1/\varepsilon)^{\frac{2}{2-\beta}} = \frac{c_3}{2}\, \Psi(\varepsilon, \delta).$$

Таким образом, в любом случае

$$H^{\mathrm{mm}}(\varepsilon, \delta) \geq B_{-} \Psi(\varepsilon, \delta)$$

с константой

$$B_{-} := \min\{2^{-2\beta} c_1 \alpha; 2^{-1-\beta/2} c_3 c_4^{-\beta/2}; \frac{c_3}{2}\}.$$

Список литературы

[1] N. Bingham, C. Goldie and J. Teugels. “Regular Variation” (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). *Cambridge: Cambridge University Press*, 1987.

[2] S. Dereich, “High resolution coding of stochastic processes and small ball probabilities”. Ph.D. dissertation, Technische Univ. Berlin (2003).

[3] S. Dereich, “Small ball probabilities around random centers of Gaussian measures and applications to quantization”. *J. Theoret. Probab.*, **16** (2003), 427–449.

[4] S. Dereich, F. Fehringer, A. Matoussi, and M. Scheutsow, “On the link between small ball probabilities and the quantization problem for Gaussian measures on Banach spaces”. *J. Theoret. Probab.*, **16** (2003), 249–265.

[5] S. Dereich, M. Lifshits, “Probabilities of randomly centered small balls and quantization in Banach spaces”, *Ann. Probab.*, **33** (2005), 1397–1421.

[6] M. Gromov, “Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces”, Birkhäuser Boston, 1999.

[7] A.I. Karol, A.I. Nazarov. “Spectral Analysis for Some Multifractional Gaussian Processes”. *Russ. J. Math. Phys.* **28**, 488–500, 2021.

[8] A.I. Karol, A.I. Nazarov, and Ya.Yu. Nikitin. “Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators”. *Transactions of the American Mathematical Society*, **360**(3):1443–1474, 2008.

[9] J. Kuelbs, W.V. Li, “Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures”, *J. Func. Anal.*, **116** (1993), 133–157.

[10] W. Li. “Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms”. *Journal of Theoretical Probability*, **5**(1):1–31, 1992.

[11] W.V. Li, W. Linde, “Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures”, *Ann. Probab.*, **27** (1999), 1556–1578.

[12] H. Luschgy, G. Pagès, “Sharp asymptotics of the functional quantization problem for Gaussian processes”, *Ann. Probab.*, **32** (2004), 1574–1599.

[13] C.E. Shannon, “A mathematical theory of communication”, I,II, *Bell Syst. Techn. J.*, **27** (1948), 3, 379–423; 4, 623–656. К. Шеннон, “Математическая теория связи”. В кн. “Работы по теории информации и кибернетике”, М.: Изд-во иностр. лит., 1963, 243–332.

[14] A.M. Vershik, “Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotics invariants”, *Markov Process and Related Fields*, **16**, 1 (2010), 169–185.

[15] В.И. Богачев, “Гауссовские меры”. М.: Наука, 1997.

[16] А.М. Вершик, “Случайные метрические пространства и универсальность”, *Успехи матем. наук*, **59** (2004), 65–104.

[17] А.М. Вершик, П.Б. Затицкий, Ф.В. Петров, “Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и ее приложения”, *Успехи матем. наук*, **69** (2014), 81–114.

[18] А.М. Вершик, М.А. Лифшиц, “mm-энтропия банахова пространства с гауссовской мерой”, Теория вероятностей и её применения, *в печати*, 2023.

[19] А. И. Кароль, “Сингулярные числа компактных псевдодифференциальных операторов переменного порядка с негладким символом”, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 50, Зап. научн. сем. ПОМИ, 519, ПОМИ, СПб., 2022, 67–104.

[20] А.Н. Колмогоров, “О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств”, *Докл. АН СССР*, **108** (1956), 385–389.

[21] А.Н. Колмогоров, В.М. Тихомиров, “ε-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах”, *Успехи матем. наук*, **14** (1959), 3–86. См. также А.Н. Колмогоров. “Теория информации и теория алгоритмов”. М., Наука, 1987, 119–198.

[22] М.А. Лифшиц, “Гауссовские случайные функции”, ТВиМС, 1995.

[23] М.А. Лифшиц, “Лекции по гауссовским процессам”, Лань, 2016.

[24] М.С. Пинскер, Л.Б. Софман, “(ε, δ)-энтропия вполне эргодических случайных процессов”, *Проблемы передачи информации*, **22**, 4 (1986), 3–8.

[25] В.М. Тихомиров, “ε-энтропия и ε-ёмкость”. В кн.: А.Н. Колмогоров. “Теория информации и теория алгоритмов”. М., Наука, 1987, 262–269.

[26] В.М. Тихомиров, “Работы А.Н. Колмогорова по ε-энтропии функциональных классов и суперпозициям функций”, *Успехи Матем. Наук*, **18** (1963), 55–92.

[27] В.М. Тихомиров, “Поперечники и энтропия”, *Успехи Матем. Наук*, **38** (1983), 91–99.

[28] П. Халмош, “Теория меры”, М.: Изд-во иностранной литературы 1953, М.: Факториал Пресс, 2003.