

Отзыв о дипломной работе “Соболевские мартингалы,
согласованные с неравномерными фильтрациями” студента
2 курса магистратуры 01.04.01 Математика
Н. П. Добронравова

Работа Никиты Петровича Добронравова продолжает мои совместные с Р. Айюшем и М. Войчеховским исследования (ASW) по так называемым неравенствам Бургейна–Брезиса. Эти неравенства — обобщения предельного соболевского вложения $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_{d/(d-1)}$ на случай, когда градиент заменён более сложным дифференциальным (или каким-то иным) выражением. В 2018 году [ASW] предложили дискретную модель таких неравенств. В этой модели функции заменены согласованными с m -равномерной фильтрацией мартингалами (здесь $m \geq 3$ — натуральное число), а дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами — правильным образом самоподобными мартингальными преобразованиями. Дискретная модель раскрыла комбинаторную структуру задачи, а также объяснила её связь с вопросами геометрической теории меры (оценки нижней размерности Хаусдорфа зарядов, подчинённых дифференциальным условиям). Позже разработанные методы были перенесены на классический случай дифференциальных операторов, что позволило разрешить ряд открытых вопросов в этой области. Тем не менее, сама по себе дискретная модель кажется мне очень интересной и достойной изучения.

Я предложил Никите распространить результаты [ASW] в духе теорем вложения на случай регулярных неравномерных фильтраций. В m -равномерной фильтрации в каждый момент времени атом разбивается на m равных частей, а в регулярной фильтрации — на несколько множеств, вероятность каждого из которых не менее, чем ε от вероятности разбиваемого атома; число ε — параметр регулярности, не зависит от разбиваемого атома. Я думал, что предложенное распространение — рутинная работа, и проделав её, мы будем размышлять о применении этих идей к евклидовому случаю (в котором, во-первых, остались открытые вопросы, во-вторых, доказательства пока что довольно трудные). Оказалось, что всё немного сложнее. Методы работы [ASW] довольно прямолинейно распространяются на случай фильтраций, названных Никитой псевдоравномерными. О псевдоравномерной фильтрации можно думать как о метрическом пространстве, размерность Хаусдорфа которого в окрестности каждой точки одна и та же (например, метрическое пространство “дизъюнктивная сумма отрезка и круга” не подходит). В этом случае, результаты о неравенствах Бургейна–Брезиса полностью аналогичны известным в случае m -равномерной фильтрации. А вот в случае регулярной фильтрации, о которой можно думать как о компактном метрическом пространстве, в каждой точке которого локальная размерность Хаусдорфа отделена от нуля, всё становится сложнее. Пришлось дробить фильтрацию, дополнять её сигма-алгебрами множеств таким образом, что получится псевдоравномерная фильтрация, а при этом рассматриваемые мартингальные преобразования не сильно изменятся. Предложенная Никитой процедура позволяет доказать желаемую теорему вложения и в случае регулярных фильтраций с той небольшой потерей, что вложение точно в шкале пространств Лоренца, но, возможно, неточно в более тонкой шкале пространств Бесова–Лоренца.

Работа представляет несомненный интерес и заслуживает оценки “отлично”.

Д. М. Столяров, научный руководитель Н. П. Добронравова, к. ф.-м. н., доцент.
4 июня 2023

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke extending to the right.