Санкт-Петербургский государственный университет

Добронравов Никита Петрович

Выпускная квалификационная работа

Соболевские мартингалы, согласованные с неоднородными фильтрациями

Программа магистратуры:
Направление 01.04.01 "Математика"
ВМ.5832.2021 "Современная математика"

Научный руководитель:
доцент факультета Математики
и компьютерных наук СПбГУ,
кандидат ф.-м. наук,
Столяров Дмитрий Михайлович

Рецензент:
ПОМИ РАН,
кандидат ф.-м. наук,
Антон Сергеевич Целищев

Санкт-Петербург
2023

1 Введение

Мартингальные аналоги широко распространены в гармоническом анализе и часто служат моделями теорем в евклидовом пространстве. Например, принято рассматривать мартингальные преобразования как модели операторов Кальдерона–Зигмунда. В работе [5] Янсон охарактеризовал H^1 мартингалы, согласованные к m-регулярной фильтрации, в терминах ограниченности конкретного мартингального преобразования. Его теорему можно рассматривать как мартингальный аналог знаменитой теоремы Феффермана-Стейна о характеризации пространства H^1 преобразованиями Рисса. Оригинальный подход [8] к теоремам вложения Соболева основан на неравенстве Харди–Литтлвуда–Соболева. К сожалению, последнее неравенство становится неверным в предельном случае $p = 1$. С другой стороны, верно вложение:

$$\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d) \to L_{\frac{d}{d-1}}, \tag{1}$$

которое позже доказали Гальярдо [4] и Ниренберг [7]. Простое объяснение этого факта состоит в том, что градиенты $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$-функции естественным образом вкладываются в пространство $L_1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, однако они не охватывают все пространство L_1. Первоначальный соболевский подход ставит естественный вопрос: для каких пространств типа L_1 неравенство Харди–Литтлвуда–Соболева верно? Приведенные выше теоремы вложения дают примеры таких пространств (пространство градиентов функций из $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$).

Мы будем рассматривать функции из $L_1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^l)$, т. е. суммируемые функции d переменных, принимающие значения в $\mathbb{C}^l$.

В работе [9] была доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (0, d)$ и $\mathfrak{M}$ замкнутое подпространство в пространстве $S'(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^l)$, инвариантное относительно сдвигов и растяжений. Тогда константа в неравенстве*

$$\|I_\alpha[f]\|_{L_{\frac{d}{d-\alpha}}} \lesssim \|f\|_{L_1}, \qquad f \in \mathfrak{M}, \tag{2}$$

равномерна для всех $f \in \mathfrak{M}$, если и только если пространство $\mathfrak{M}$ не содержит зарядов вида $\delta_0 \times a$, $a \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$.

Здесь $S'(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^l)$ это пространство двойственное к классу Шварца со значениями в $\mathbb{C}^l$, также I_α это оператор Рисса.

Так в работе [1] была построенна вероятностная модель, (фактически очень близкая к модели Янсона из [5]), в этой работе доказан мартингальный аналог теоремы 1.

1.1 Мартингальная модель

В этом разделе мы объясним как перенести предыдущие результаты на язык мартингалов. В нашей работе будут рассматриваться регулярные фильтрации. В работе [1] рассматривались m-равномерные фильтрации, то есть, наша теорема 4 будет обобщением соответствующей теоремы работы [1]. Сначала определим регулярную фильтрацию. Пусть у нас есть атомарная фильтрация $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$, то есть, $\mathcal{F}_0$ состоит из одного атома и любой атом в алгебре $\mathcal{F}_n$ делится на конечное число атомов в алгебре $\mathcal{F}_{n+1}$. Множество атомов в алгебре $\mathcal{F}_n$ будем обозначать $\mathcal{AF}_n$. Пусть даны атомы $\omega \in \mathcal{AF}_n$ и $\omega' \in \mathcal{AF}_{n+1}$ такие, что $\omega' \subset \omega$. Тогда будем говорить, то атом ω' потомок атома ω, а атом ω является предком атома ω', также будем использовать обозначение $(\omega')^\uparrow = \omega$. Фильтрация $\mathcal{F}$ называется регулярной если любой атом имеет хотя бы два потомка, и существует число $\varepsilon > 0$ такое что для любого атома $|\omega| > \varepsilon|\omega^\uparrow|$. Также будем называть фильтрацию псевдо-равномерной, если существует такие числа $0 < \gamma < 1$ и $C > 1$, что для любого атома $\omega \in \mathcal{AF}_n$ выполнено неравенство $C^{-1}\gamma^n \leqslant |\omega| \leqslant C\gamma^n$.

Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_k$ — это потомки атома ω. Для каждого атома ω определим пространство V_ω:

$$V_\omega = \left\{ v \in \mathbb{R}^k \Big| \quad \sum_1^k \frac{|\omega_j|}{|\omega|} v_j = 0 \right\}. \tag{3}$$

Пусть $\{dF_n\}_{n\geqslant 1}$ — это последовательность мартингальных разностей для мартингала F, согласованного с фильтрацией $\mathcal{F}$, то есть:

$$dF_n = F_n - F_{n-1}, \qquad n \geqslant 1. \tag{4}$$

Пусть F — это $\mathbb{R}^l$-значный мартингал, тогда для любого атома $\omega \in \mathcal{AF}_n$ функцию $f_{n+1}|_\omega$ можно естественным образом отождествить с вектором в $V_\omega^l \subset \mathbb{R}^{kl}$, где k — это количество потомков атома ω.

1.2 Потенциал Рисса

Пусть $\alpha \in (0,1)$. Основной объект нашего изучения — это потенциал Рисса:

$$I_\alpha[F] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \mathcal{AF}_n} |\omega^{\uparrow}|^{\alpha} dF_n. \tag{5}$$

Для регулярных мартингалов в работе [6] ранее была доказана следующая теорема (до этого в работе [10] эта теорема была доказана в случае диадических мартингалов).

Теорема 2. *(Hardy-Littlewood-Sobolev). Для любого $p \in (1,\infty)$ и для любого $q \in (p,\infty)$, оператор $I_{\frac{q-p}{qp}}$ действует из L_p в L_q.*

Замечание 1. *В предельном случае $p = 1$, оператор $I_{\frac{q-1}{q}}$ действует из L_1 в пространство Лоренца $L_{p,\infty}$, но не действует в L_p.*

В книге [3] можно найти общую информацию по пространствам Лоренца.

Теорема 3. *Оператор $I_{\frac{q-1}{q}}$ действует из H_1 в $L_{q,1}$.*

Здесь H_1 — пространство Харди, собственное подпространство в L_1, состоящее из тех мартингалов F, для которых максимальная функция F^* является суммируемой.

Теорема 1 утверждает, что в мире евклидовых пространств потенциалы Рисса действуют из некоторых пространств типа L_1 непрерывно в соответствующие пространства L_p. Переведём эти результаты на язык мартингалов.

Пусть для любого атома ω дано пространство $W_\omega \subset V_\omega^l \subset \mathbb{R}^{k_\omega l}$, где k_ω — это количество потомков атома ω. Определим пространство $\mathfrak{M}$ как следующее подпространство пространства $\mathbb{R}^l$-значных L_1 мартингалов.

$$\mathfrak{M} = \{F \in L_1(\mathbb{R}^l) \Big| \forall n, \omega \in \mathcal{AF}_n \quad dF_{n+1}|_\omega \in W_\omega\}. \tag{6}$$

Можно воспринимать пространство $\mathfrak{M}$ как аналог пространства Соболева.

Определение 1. *Совокупность $W' = (k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk})$ будем называть пространством с параметрами если выполнены следующие условия:*
1)$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$,
2)Для любого вектора $v \in W$ выполнено $\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j = 0$, где $v_j \in \mathbb{R}^l$ и $v = (v_1, \ldots, v_k)$.

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность пространств с параметрами $W'_j = (k_j; \alpha_{j,1}, ..., \alpha_{j,k_j}; W_j, W_j \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk_j})$ стремится к пространству с параметрами $W' = (k; \alpha_1, ..., \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk})$ если выполнены следующие условия:*

1) $k_j = k$,

2) $\alpha_{j,i} \to \alpha_i, \quad \forall i$,

3) $\dim(W_j) = \dim(W)$,

4) $W_j \overset{G(lk, \dim(W))}{\longrightarrow} W$ *(пространства рассматриваются, как подпространства в $\mathbb{R}^{lk}$).*

Здесь $G(l,k)$ — это грассманиан, т. е. совокупность всех k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{C}^l$.

Для атома ω определим пространство с параметрами $W'_\omega = \left(k; \frac{|\omega_1|}{|\omega|}, ..., \frac{|\omega_k|}{|\omega|}; W_\omega, W_\omega \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}\right)$, здесь k — это количество потомков атома ω, атомы ω_1,...,ω_k — это потомки атома ω, а $W_\omega \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}$ — это естественное вложение.

Определим семейства

$$\mathcal{W}_0 = \left\{ W'_\omega \middle| \text{где } \omega \in \mathcal{AF}_n \text{ для некоторого } n \right\}, \tag{7}$$

Семейство $\mathcal{W}$ замыкание семейства $\mathcal{W}_0$ относительно взятия пределов.

Определение 3. *Будем говорить, что семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет первому структурному условию если для любого пространства с параметрами $W' = (k; \alpha_1, ..., \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}) \in \mathcal{W}$ выполнено следующие условие: если вектор $a \otimes v$ принадлежит W, где $v \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ и $a \in \mathbb{R}^k$, тогда $a \neq (-1, ..., -1, \frac{1}{\alpha_j} - 1, -1, ..., -1)$.*

В этой работе мы докажем следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{F}$ — регулярная фильтрация, $p > 1$, а семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет первому структурному условию. Тогда оператор Рисса $I_{\frac{p-1}{p}}$ действует непрерывно из $\mathfrak{M}$ в $L_{p,1}$.*

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{F}$ — псевдо-равномерная фильтрация, $p > 1$, а семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет первому структурному условию. Тогда оператор Рисса $I_{\frac{p-1}{p}}$ действует непрерывно из $\mathfrak{M}$ в $B^{0,1}_{p,1}$.*

Норма в пространстве Бесова определяется следующим образом:

$$\|F\|_{B^{0,1}_{p,1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|dF_n\|_{L_{p,1}}. \tag{8}$$

Из этого равенства видно, что $\|F\|_{B^{0,1}_{p,1}} \lesssim \|F\|_{L_{p,1}}$.

Сначала доказательство теоремы 4 сведём к доказательству теоремы 5, а её сведем к частному случаю (теорема 7). Затем в главе 3 докажем теорему 7.

В этой работе нам понадобятся базовые факты по пространствам Лоренца, а именно следующие факты. Пространство $L_{p,q}$ нормируемо при $1 < p < +\infty$ и $1 \leqslant q \leqslant +\infty$. Также интерполяционная теорема $L_{p_\theta,q} = (L_{p_0,q_0}, L_{p_1,q_1})_{\theta,q}$, где $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ (в книге [3] можно найти базовые факты по интерполяционной теории).

2 Сведение к частному случаю

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — регулярная фильтрация с параметром ε. Существует фильтрация $\mathcal{F}'$, такая что $\mathcal{AF}'_n \subset \bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{AF}_j$, для любого атома $\omega \in \mathcal{AF}'_n$ либо его потомки в фильтрации $\mathcal{F}'$*

такие же как и в фильтрации $\mathcal{F}$, либо у него только один потомок — это сам атом ω, а также выполнено неравенство $(1-\varepsilon)^n \geqslant |\omega| \geqslant \varepsilon(1-\varepsilon)^n$.

В частности, фильтрация $\mathcal{F}'$ псевдо-равномерна с параметрами $\gamma = 1-\varepsilon$ и $C = \varepsilon^{-1}$.

Доказательство. Будем строить множества $\mathcal{AF}'_n$ индуктивно. Множество $\mathcal{AF}'_0$ состоит из одного атома. Пусть мы построили множество $\mathcal{AF}'_n$. Определим множество $\mathcal{AF}'_{n+1}$ следующей формулой:

$$\mathcal{AF}'_{n+1} = \left\{\omega \in \mathcal{AF}'_n \middle| |\omega| < (1-\varepsilon)^{n+1}\right\} \bigcup \left\{\omega \middle| \omega^{\uparrow} \in \mathcal{AF}'_n \quad |\omega^{\uparrow}| \geqslant (1-\varepsilon)^{n+1}\right\}. \tag{9}$$

Атомы первого из двух объединяемых множеств удовлетворяют неравенству по индукционному предположению. Для атомов второго множества напишем оценки. Атом ω это потомок атома $\omega^{\uparrow}$, следовательно из регулярности фильтрации выполнено неравенство $\varepsilon|\omega^{\uparrow}| \leqslant |\omega| \leqslant (1-\varepsilon)|\omega^{\uparrow}|$, по предложению индукции выполнено неравенство $|\omega^{\uparrow}| \leqslant (1-\varepsilon)^n$, получаем

$$\varepsilon(1-\varepsilon)^{n+1} \leqslant \varepsilon|\omega^{\uparrow}| \leqslant |\omega| \leqslant (1-\varepsilon)|\omega^{\uparrow}| \leqslant (1-\varepsilon)^{n+1}. \tag{10}$$

□

Заметим, что оператор Рисса для фильтрации $\mathcal{F}$ равен оператору Рисса в фильтрации $\mathcal{F}'$, поэтому теорема 4 следует из теоремы 5, так как $\|.\|_{L_{p,1}} \leqslant \|.\|_{B^{0,1}_{p,1}}$. Дальше будем считать фильтрацию псевдо-равномерной. Здесь мы перешли от регулярной фильтрации к псевдо-равномерной, заодно изменили норму в пространстве Лоренца на норму в пространстве Бесова. Вопрос с нормой в пространстве Бесова и регулярной фильтрацией остаётся открыт, так как при переходе к псевдо-равномерной фильтрации норма Бесова могла сильно уменьшиться.

Для псевдо равномерной фильтрации введём модифицированный оператор Рисса следующей формулой (γ — это параметр псевдо-равномерной фильтрации):

$$I^*_\alpha[F] = \sum_{n \geqslant 1} \gamma^{\alpha n} dF_n. \tag{11}$$

Заметим, что $(I_\alpha[F])_N \asymp (I^*_\alpha[F])_N$ (они отличаются не более чем в C раз), следовательно $\|(I_\alpha[F])_N\|_{L_{p,1}} \asymp \|(I^*_\alpha[F])_N\|_{L_{p,1}}$, из чего получаем $\|I_\alpha[F]\|_{B^{0,1}_{p,1}} \asymp \|I^*_\alpha[F]\|_{B^{0,1}_{p,1}}$ (здесь мы используем обозначение $(g)_n = E(g|\mathcal{F}_n)$). Следовательно нам достаточно следующую доказать теорему.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{F}$ псевдо-равномерная фильтрация, $p > 1$, а семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет первому структурному условию. Тогда оператор Рисса $I^*_{\frac{p-1}{p}}$ действует непрерывно из $\mathfrak{M}$ в $B^{0,1}_{p,1}$.*

Для семейства $\mathcal{W}$, удовлетворяющего первому структурному условию, введем функцию

$$k_{\mathcal{W}}(\theta) = \sup_{W' \in \mathcal{W}} \sup_{\substack{a \otimes v \in W \\ a_j \geqslant -1,\ v \neq 0}} \theta \log\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j |1+a_j|^{\frac{1}{\theta}}\right). \tag{12}$$

Заметим, что $k_{\mathcal{W}}$ выпуклая функция (выражение под супремумом выпукло по параметру θ по неравенству Гёльдера).

Пусть $\mathcal{F}$ — псевдо-равномерная фильтрация, а семейство $\mathcal{W}$ соответствует этой фильтрации. Тогда можно заметить, что для любого пространства с параметрами $W' = (k; \alpha_1, ..., \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}) \in \mathcal{W}$ выполнено неравенство $\alpha_j \geqslant C^{-2}\gamma$. Из этого следует, что для псевдо-равномерной фильтрации выполнено неравенство $k_{\mathcal{W}}(p^{-1}) \leqslant \frac{p-1}{p} \log(C^2\gamma^{-1})$.

Лемма 2. *Пусть семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет первому структурному условию. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что для любого пространства с параметрами $W' = (k; \alpha_1, ..., \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}) \in \mathcal{W}$, и для любого вектора $a \otimes v \in W$, где $v \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^k$ и $a_j \geqslant -1$ выполнено неравенство $a_j \leqslant \frac{1}{\alpha_j}(1-\delta) - 1$.*

Доказательство. Пусть это не так, тогда существует последовательность пространств с параметрами $W'_n = (k_n; \alpha_{n,1}, ..., \alpha_{n,k_n}; W_n, W_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk_n})$ и векторов $a_n \otimes v_n \in \mathbb{R}^{lk_n}$, таких что $v_n \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$, $a_n \in \mathbb{R}^{k_n}$, $a_{n,j} \geqslant -1$ и для некоторого i_n выполненно $a_{n,i_n} \geqslant \frac{1}{\alpha_{n,i}}(1 - \frac{1}{n}) - 1$. Можно считать, что выполнены следующие условия (выбором подпоследовательности):

$$W'_n \to W' = (k; \alpha_1, ..., \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}), \tag{13}$$

$$v_n \to v, \tag{14}$$

$$a_n \to a \tag{15}$$

и последовательность i_n постоянна, пусть $i = i_n$. Тогда $W' \in \mathcal{W}$ и $a \otimes v \in W$. При этом выполнены неравенства $a_j \geqslant -1$, и $a_i \geqslant \frac{1}{\alpha_i} - 1$. По определению пространства с параметрами выполнено равенство:

$$\alpha_i a_i v = -\sum_{j \neq i} \alpha_j a_j v. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\alpha_i a_i = -\sum_{j \neq i} \alpha_j a_j \leqslant \sum_{j \neq i} \alpha_j = 1 - \alpha_i \leqslant \alpha_i a_i. \tag{17}$$

Значит, все неравенства обращаются в равенства. Поэтому $a = (-1, \dots, -1, \frac{1}{\alpha_i} - 1, -1, \dots, -1)$, что противоречит первому структурному условию. $\square$

Лемма 3. *Пусть семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет первому структурному условию, тогда существует число $\varepsilon > 0$, такое что для любого пространства с параметрами $W' = (k; \alpha_1, ..., \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}) \in \mathcal{W}$, и для сонаправленных векторов $v \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$, $v_1 \in \mathbb{R}^l, \dots, v_k \in \mathbb{R}^l$, таких что $(v_1 - v, \dots, v_k - v) \in W$ выполнено неравенство $\alpha_j \|v_j\| \leqslant (1-\varepsilon)\|v\|$.*

На самом деле, эта лемма является переформулировкой предыдущей леммы.

Доказательство. Пусть вектор $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, такой что $v_j - v = a_j v$. Тогда по лемме 2 выполнено неравенство $a_j \leqslant \frac{1}{\alpha_j}(1-\varepsilon) - 1$, следовательно, $\alpha_j \|v_j\| = \alpha_j(a_j + 1)\|v\| \leqslant (1-\varepsilon)\|v\|$. $\square$

Определение 4. *Для псевдо-равномерной фильтрации $\mathcal{F}$, семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет второму структурному условию если $k_{\mathcal{W}}(p^{-1}) < \frac{p-1}{p}\log(\gamma^{-1})$.*

Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F}^{(M)}$, заданную следующим равенством: $\mathcal{F}^{(M)}_n = \mathcal{F}_{nM}$. Пусть $I^{(M)*}_\alpha$ — модифицированный потенциал Рисса, согласованный с фильтрацией $\mathcal{F}^{(M)}$. Пусть $\mathfrak{M}_M$ — это пространство мартингалов класса $\mathfrak{M}$, суженных на фильтрацию $\mathcal{F}^{(M)}$. Теперь опишем, как определяется $\mathcal{W}^{(M)}$. Для каждого атома $\omega \in \mathcal{AF}^{(M)}_n$ определим дерево $\mathcal{T}_\omega$. Вершины дерева — это атомы $\omega' \in \mathcal{AF}_{Mn+r}$ для $r = 0, ..., M$, такие что $\omega' \subset \omega$ (если атом является своим предком, тогда этому атому соответствует одна вершина). Корень дерева — это атом ω. Два атома соединены ребром, если один атом является предком другого в фильтрации $\mathcal{F}$. Пусть ω_1,...,ω_k — это листы дерева $\mathcal{T}_\omega$. Определим пространство

$$V^{(M)}_\omega = \left\{ v \in \mathbb{R}^k \middle| \quad \sum_1^k \frac{|\omega_j|}{|\omega|} v_j = 0 \right\}. \tag{18}$$

Для вектора $v \in \mathbb{R}^{kl}$ и для каждого атома ω' в дереве $\mathcal{T}_\omega$ определим вектор $v_{\omega'} \in \mathbb{R}^l$ следующей формулой ($v = (v_1, ..., v_k)$ где $v_j \in \mathbb{R}^l$):

$$v_{\omega'} = \sum_{\omega_j \subset \omega'} \frac{|\omega_j|}{|\omega|} v_j. \tag{19}$$

Определим пространство $W_\omega^{(M)}$:

$$W_\omega^{(M)} = \left\{ v \in \mathbb{R}^{kl} \middle| \forall \omega' \in \mathcal{T}_\omega \quad \omega' \text{ не лист, } \omega_1', ..., \omega_t' \text{ потомки } \omega', \ (v_{\omega'} - v_{\omega_1'}, ..., v_{\omega'} - v_{\omega_t'}) \in W_{\omega'} \right\}. \tag{20}$$

Видно, что пространство $W_\omega^{(M)}$ имеет структуру, построенную по дереву $\mathcal{T}_\omega$ и пространствам $W_{\omega'}$.

Заметим, что пространство $\mathfrak{M}_M$ можно определить следующей формулой:

$$\mathfrak{M}_M = \{F \in L_1(\mathbb{R}^l) | \forall n, \omega \in \mathcal{AF}_n^{(M)} \quad dF_{n+1}|_\omega \in W_\omega^{(M)}\}. \tag{21}$$

Для атома ω фильтрации $\mathcal{F}^{(M)}$ определим пространство с параметрами

$$W_\omega^{(M)'} = \left(k; \frac{|\omega_1|}{|\omega|}, \dots, \frac{|\omega_k|}{|\omega|}; W_\omega^{(M)}, W_\omega^{(M)} \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}\right), \tag{22}$$

здесь k — это количество потомков атома ω, атомы $\omega_1, \dots, \omega_k$ — это потомки атома ω в фильтрации $\mathcal{F}^{(M)}$, а $W_\omega \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}$ — это естественное вложение. Семейство $\mathcal{W}^{(M)}$ определяется аналогично семейству $\mathcal{W}$.

Лемма 4. *Для любого мартингала F справедливо неравенство*

$$\|I^*_{\frac{p-1}{p}} F\|_{B^{0,1}_{p,1}} \lesssim \|I^{(M)*}_{\frac{p-1}{p}} F^{(M)}\|_{B^{0,1}_{p,1}} \tag{23}$$

Заметим, что константа в этом неравенстве зависит от M.

Доказательство. Выразим $\left(I^*_{\frac{p-1}{p}} F\right)_{Mk+r}$ через $\left(I^{(M)*}_{\frac{p-1}{p}} F^{(M)}\right)_{k+1}$, где $r = 1, 2, ..., M$:

$$\left(I^*_{\frac{p-1}{p}} F\right)_{Mk+r} = E\left(\left(I^{(M)*}_{\frac{p-1}{p}} F^{(M)}\right)_{k+1} \middle| \mathcal{F}_{Mk+r}\right) - E\left(\left(I^{(M)*}_{\frac{p-1}{p}} F^{(M)}\right)_{k+1} \middle| \mathcal{F}_{Mk+r-1}\right). \tag{24}$$

А следовательно (оператор условного матожидания ограничен на пространстве $L_{p,1}$ так как оно нормируемое),

$$\left\|\left(I^*_{\frac{p-1}{p}} F\right)_{Mk+r}\right\|_{L_{p,1}} \lesssim \left\|\left(I^{(M)*}_{\frac{p-1}{p}} F^{(M)}\right)_{k+1}\right\|_{L_{p,1}}. \tag{25}$$

Отсюда получаем

$$\sum_{r=1}^{M} \gamma^{(Mk+r)\frac{p-1}{p}} \left\|\left(I^*_{\frac{p-1}{p}} F\right)_{Mk+r}\right\|_{L_{p,1}} \lesssim \gamma^{(k+1)M\frac{p-1}{p}} \left\|\left(I^{(M)*}_{\frac{p-1}{p}} F^{(M)}\right)_{k+1}\right\|_{L_{p,1}}. \tag{26}$$

Просуммируем по k и получим желаемое неравенство.

□

Лемма 5. *Для любого атома ω минимальное растояние от корня до листа дерева $\mathcal{T}_\omega$ не меньше чем $\frac{-M\log(\gamma) - 2\log(C)}{2\log(C) - \log(\gamma)}$.*

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathcal{AF}_n^{(M)}$, тогда $|\omega| \geqslant C^{-1}\gamma^{Mn}$. Листья дерева $\mathcal{T}_\omega$ принадлежат множеству $\mathcal{AF}_{n+1}^{(M)}$, следовательно, вероятность любого листа не больше чем $C\gamma^{M(n+1)}$. Отношение между вероятностью атома и его потомка в фильтрации $\mathcal{F}$ не больше, чем $C^2\gamma^{-1}$. Следовательно, путь между ω и любым листом имеет длину хотя бы $\frac{-M\log(\gamma)-2\log(C)}{2\log(C)-\log(\gamma)}$. $\square$

Лемма 6. *Путь семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет первому структурному условию (см. определение 3), тогда для достаточно больших M семейство $\mathcal{W}^{(M)}$ удовлетворяет второму структурному условию (см. определение 4).*

Доказательство. Непредельные пространства в $\mathcal{W}^{(M)}$ имеют структуру, построенную по дереву $\mathcal{T}_\omega$ и пространствам $W_{\omega'}$ для вершин ω', не являющихся листами в дереве $\mathcal{T}_\omega$. Докажем, что предельные пространства имеют похожую структуру. Пусть $W_{\omega_j}^{(M)'} \to W'$, можно выбрать подпоследовательность с изоморфными деревьями с корнем $\mathcal{T}_{\omega_j}$ (есть биекция между вершинами, которая отправляет корень в корень и сохраняет ребра дерева). Пусть это дерево $\mathcal{T}$, а его корень — это вершина c. Пусть b вершина в дереве $\mathcal{T}$, пусть она соответствовала атому $\omega_j(b)$. Можно выбрать такую подпоследовательность, что пространства с параметрами $W'_{\omega_j(b)}$ сходятся к пространству с параметрами W'_b. Пусть $W' = (k; \alpha_1, ..., \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk})$, и пусть $b_1, \ldots, b_k$ — это листья в дереве $\mathcal{T}$. Введём на вершинах дерева $\mathcal{T}$ естественный частичный порядок.

Для вектора $v \in \mathbb{R}^{kl}$ и для каждой вершины b в дереве $\mathcal{T}$ определим вектор $v_b \in \mathbb{R}^l$ следующей формулой ($v = (v_1, ..., v_k)$ где $v_j \in \mathbb{R}^l$):

$$v_b = \frac{1}{\sum\limits_{b_j \leqslant b} \alpha_j} \sum_{b_j \leqslant b} \alpha_j v_j. \tag{27}$$

Тогда пространство W имеет вид:

$$W = \left\{ v \in \mathbb{R}^{kl} \middle| \forall b \in \mathcal{T} \quad b \text{ не лист, } b'_1, ..., b'_t \text{ потомки } b,\ (v_b - v_{b'_1}, ..., v_b - v_{b'_t}) \in W_b \right\}. \tag{28}$$

Пусть t_b — это расстояние от корня дерева до вершины b. Перейдём к оценке функции $k_{\mathcal{W}^{(M)}}$. Для вектора $a \otimes v \in W$, вектор $(a \otimes v)_b$ имеет вид $w \otimes v$ пусть это $a_b \otimes v$.

Для каждой вершины b дерева определим вектор $w_b = v(a_b + 1)$. Пусть вершина b' — это потомок вершины b, тогда по лемме 3 выполнено неравенство

$$\frac{\sum\limits_{b_j \leqslant b'} \alpha_j}{\sum\limits_{b_j \leqslant b} \alpha_j} \|w_{b'}\| \leqslant (1-\varepsilon)\|w_b\|. \tag{29}$$

Следовательно $\sum\limits_{b_j \leqslant b} \alpha_j \|w_b\| \leqslant (1-\varepsilon)^{t_b}\|w_c\|$ (c — это корень дерева). Применим это неравенство для листа b_j

$$\alpha_j \|w_{b_j}\| \leqslant (1-\varepsilon)^{t_{b_j}} \|w\|. \tag{30}$$

По лемме 5 выполнено неравенство $t_{b_j} \geqslant \frac{-M\log(\gamma)-2\log(C)}{2\log(C)-\log(\gamma)}$, а следовательно, при достаточно большом числе M верна оценка $(1-\varepsilon)^{t_{b_j}} < \frac{1}{N}$ для некоторого достаточно большого натурального N. Сделаем оценку

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \|w_{b_j}\|^p \leqslant \max_{\substack{0 \leqslant \alpha_j q_j \leqslant \frac{\|w_c\|}{N} \\ \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_k q_k = \|w_c\|}} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j q_j^p \leqslant \|w_c\|^p \left(\frac{1}{N \min \alpha_j}\right)^{p-1} \leqslant \|w_c\|^p \left(\frac{C^2}{N\gamma^M}\right)^{p-1}. \tag{31}$$

Здесь мы пользуемся тем, что максимум выпуклой функции на выпуклом компакте, достигается в крайних точках.

Разделим обе части неравенства 31 на $\|w_c\|^p$ и возьмём логарифм

$$\log\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j|1+a_j|^p\right) \leqslant (p-1)\big(\log(\gamma^{-M})+2\log(C)-\log(N)\big). \tag{32}$$

Отсюда $k_{\mathcal{W}^{(M)}}(p^{-1}) \leqslant \frac{p-1}{p}\log(\gamma^{-M}) - \frac{p-1}{p}(\log(N)-2\log(C))$, следовательно при $N > C^2$ семейство $\mathcal{W}^{(M)}$ удовлетворяет второму структурному условию.

□

Следовательно, чтобы доказать теорему6, достаточно доказать следующую теорему (лемма 4 плюс лемма 6).

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{F}$ псевдо-равномерная фильтрация, $p > 1$, а семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет второму структурному условию. Тогда оператор Рисса $I^*_{\frac{p-1}{p}}$ действует непрерывно из $\mathfrak{M}$ в $B^{0,1}_{p,1}$.*

Доказательство этой теоремы аналогично рассуждениям работы [1] и приведено в следующем разделе.

3 Доказательство Теоремы 7

Лемма 7. *Пусть $p \in (1,\infty)$ и семейство $\mathcal{W}$ удовлетворяет второму структурному условию. Для любого $\delta > 0$ существует $\delta_0 > 0$, для любого пространства с параметрами $W' = (k;\alpha_1,...,\alpha_k;W,W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk}) \in \mathcal{W}$ и векторов $a, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^l$ удовлетворяющих следующим условиям:*

$$(b_1,\dots,b_k) \in W, \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\|a+b_j\| \leqslant (1+\delta_0)\|a\|. \tag{34}$$

Выполнено неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\|a+b_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant e^{k_{\mathcal{W}}(p^{-1})+\delta}\|a\|. \tag{35}$$

Доказательство. Пусть не так, тогда существует $\delta > 0$, последовательности пространств с параметрами $W'_n = (k_n;\alpha_{n,1},...,\alpha_{n,k_n};W_n,W_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk_n}) \in \mathcal{W}$ и векторов $a_n, b_{n,1},\dots,b_{n,k_n} \in \mathbb{R}^l$, такие что выполнены следующие условия:

$$(b_{n,1},\dots,b_{n,k_n}) \in W_n, \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{n,j}\|a_n+b_{j_n}\| \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\|a_n\|. \tag{37}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{n,j}\|a_n+b_{j,n}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant e^{k_{\mathcal{W}}(p^{-1})+\delta}\|a_n\|. \tag{38}$$

Пусть π_{a_n} — это ортогональная проекция на прямую $\mathbb{R}a_n \subset \mathbb{R}^l$, а $\pi_{a_n^\perp}$ — это проекция на ортогональную гиперплоскость. Напишем оценку:

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j} \|a_n + b_{n,j}\| \geqslant \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j} \|a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j})\| \geqslant \|a_n\|. \tag{39}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{n}|a_n| \geqslant \sum_{j=1}^{k_n} \big(\alpha_{n,j}\|a_n + b_{n,j}\| - \alpha_{n,j}\|a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j})\|\big) =$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j} \frac{\|\pi_{a_n^\perp}(b_{n,j})\|^2}{\|a_n + b_{n,j}\| + \|a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j})\|} \asymp \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j} \frac{\|\pi_{a_n^\perp}(b_{n,j})\|^2}{\|a_n + b_{n,j}\|}. \tag{40}$$

А также

$$\frac{1}{n}|a_n| \geqslant \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j}(\|a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j})\| - \|a_n\|) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j}(|a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j})| - a_n) =$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{n,j}\big(|a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j})| - (a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j}))\big) = 2\sum_{j=1}^{k_n} -\alpha_{n,j}(a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j}))\chi_{\{a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j}) < 0\}}. \tag{41}$$

Мы интерпретируем a_n и $\pi_{a_n}(b_{n,j})$ как вещественные числа, так чтобы $a_n = \|a_n\|$. Не умаляя общности будем считать, что $W'_n \to W' = (k; \alpha_1, ..., \alpha_k; W, W \hookrightarrow \mathbb{R}^{lk})$, $\|a_n\| = 1$ и $a_n \to a$. Тогда мы получим

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{n,j}(-1 - \pi_{a_n}(b_{n,j}))\chi_{\{a_n + \pi_{a_n}(b_{n,j}) < 0\}} = o(1) \tag{42}$$

Что эквивалентно $\pi_{a_n}(b_{n,j}) \geqslant -1 + o(1)$ для всех j. С другой стороны, $\sum_j \alpha_{n,j}\pi_{a_n}(b_{n,j})$, так что

$$-1 + o(1) \leqslant \pi_{a_n}(b_{n,j}) \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,j}} - 1 + o(1) \leqslant C^2\gamma^{-1} - 1 + o(1). \tag{43}$$

Из неравенству (40) мы получаем

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{n,j} \frac{\|\pi_{a_n^\perp}(b_{n,j})\|^2}{\|a_n + b_{n,j}\|} = o(1). \tag{44}$$

Применим неравенство треугольника и неравенство (43), получим

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\gamma}{C^2} \frac{\|\pi_{a_n^\perp}(b_{n,j})\|^2}{C^2\gamma^{-1} + \|\pi_{a_n^\perp}(b_{n,j})\|} = o(1). \tag{45}$$

Отсюда $\|\pi_{a_n^\perp}(b_{n,j})\| = o(1)$. Из этого мы получаем $\|b_{n,j}\| \leqslant C^2\gamma^{-1} + o(1)$, значит можно считать, что $b_{n,j} \to b_j$. Видно, что $b_j \parallel a$ и $(b_1, \ldots, b_k) \in W$, следовательно, $(b_1, \ldots, b_k) = v \otimes a$ и $v_j \geqslant -1$. Сделаем оценку

$$e^{k\mathcal{W}(p^{-1})+\delta} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{n,j}\|a_n + b_{j,n}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j |1 + v_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant e^{k\mathcal{W}(p^{-1})}. \tag{46}$$

Противоречие. □

Определение 5. *Будем говорить, что атом $\omega \in \mathcal{AF}_n$ является δ_0-выпуклым для мартингала $F \in \mathfrak{M}$ если*

$$\mathbb{E}(\|F_{n+1}\| - \|F_n\|)\chi_\omega \geqslant \delta_0 \mathbb{E}\|F_n\|\chi_\omega. \tag{47}$$

В противном случае будем говорить, что атом ω является δ_0-плоским для мартингала F.

Если δ_0 и F фиксированы, то будем называть атомы выпуклыми и плоскими. Пусть Co — это множество выпуклых атомов, а Fl — это множество плоских атомов.

Заметим, что по лемме 7 для любого δ_0-плоского атома $\omega \in \mathcal{AF}_n$ выполнено неравенство

$$\|F_{n+1}\chi_\omega\|_{L_p} \leqslant e^{k\mathcal{W}(p^{-1}) + o_{\delta_0 \to 0, p}(1)} \|F_n \chi_\omega\|_{L_p} \tag{48}$$

Определим два новых мартингала F_{Co} и F_{Fl}:

$$F_{Co} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\omega \in Co \cap \mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega; \quad F_{Fl} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\omega \in Fl \cap \mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega. \tag{49}$$

Заметим, что $F = F_{Co} + F_{Fl}$. Дальше мы будем использовать следующее равенство:

$$\|F\|_{L_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(\|F_{n+1}\| - \|F_n\|) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\omega \in \mathcal{AF}_n} \mathbb{E}(\|F_{n+1}\| - \|F_n\|)\chi_\omega. \tag{50}$$

3.1 Оценка выпуклых атомов

Лемма 8. *Пусть $\omega \in \mathcal{AF}_n \cap Fl$. Тогда*

$$\mathbb{E}\|dF_{n+1}\chi_\omega\| \lesssim_{\delta_0} \mathbb{E}(\|F_{n+1} - \|F_n\|\|)\chi_\omega. \tag{51}$$

Доказательство. По определению плоского атома мы получаем неравенство:

$$\mathbb{E}\|F_n\|\chi\omega \leqslant \frac{1}{\delta_0}\mathbb{E}(\|F_{n+1}\| - \|F_n\|)\chi_\omega. \tag{52}$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\|F_{n+1}\|\chi\omega \leqslant \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0}\mathbb{E}(\|F_{n+1}\| - \|F_n\|)\chi_\omega. \tag{53}$$

Отсюда мы получаем оценку:

$$\mathbb{E}\|dF_{n+1}\|\chi_\omega \leqslant \mathbb{E}(\|F_n\| + \|F_{n+1}\|) \leqslant \frac{\delta_0 + 2}{\delta_0}\mathbb{E}(\|F_{n+1}\| - \|F_n\|)\chi_\omega. \tag{54}$$

□

Следствие 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{\omega \in Co \cap \mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega \right\|_{L_1} \lesssim \|F\|_{L_1} \tag{55}$$

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{\omega \in Co \cap \mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega \right\|_{L_1} \lesssim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\omega \in Co \cap \mathcal{AF}_n} \mathbb{E}(\|F_{n+1}\| - \|F_n\|)\chi_\omega \overset{(50)}{\leqslant} \|F\|_{L_1} \tag{56}$$

□

3.2 Оценка плоских атомов

Введём структуру графа на множестве плоских атомов. Два атома соединены ребром, если один из них является предком другого. Заметим, что в графе нет циклов, соответственно этот граф разбивается на деревья (деревья совпадают с компонентами связности). Любое дерево $\mathcal{T}$ имеет корень $\omega_{\mathcal{T}}$, который является плоским атомом. Для каждого дерева $\mathcal{T}$ определим мартингал $F_{\mathcal{T}}$:

$$F_{\mathcal{T}} = \sum_{n\geqslant 0} \sum_{\omega\in\mathcal{T}\cap\mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_{\omega}. \tag{57}$$

Заметим, что $F_{Fl} = \sum_{\mathcal{T}} F_{\mathcal{T}}$.

Заметим, что неравенство (48) влечёт следующую лемму.

Лемма 9. *Пусть $\alpha > k_{\mathcal{W}}(p^{-1})$. Для любого дерева плоских атомов $\mathcal{T}$ с корнем $\omega_{\mathcal{T}} \in \mathcal{AF}_{n_0}$, и для любого $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство*

$$\Big\|\sum_{\omega\in\mathcal{T}\cap\mathcal{AF}_n} F_{n+1}\chi_{\omega}\Big\|_{L_p} \lesssim e^{\alpha(n-n_0)}\|F_{n_0}\|_{L_p} \tag{58}$$

для достаточно маленьких δ_0.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{W}$ удовлетворяет второму структурному условию. Пусть $\mathcal{T}$ — это дерево плоских атомов с корнем $\omega_{\mathcal{T}} \in \mathcal{AF}_{n_0}$. Тогда неравенство*

$$\sum_{n\geqslant n_0} \gamma^{\frac{p-1}{p}n}\Big\|\sum_{\omega\in\mathcal{T}\cap\mathcal{AF}_n} F_{n+1}\chi_{\omega}\Big\|_{L_{p,1}} \lesssim_p \mathbb{E}\|F_{n_0}\|\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}. \tag{59}$$

выполнено при достаточно малом $\delta_0 > 0$.

Доказательство. Можно взять $p' > p$, такое что $k_{\mathcal{W}}(\frac{1}{p'}) < \frac{p-1}{p}\log(\gamma^{-1})$. Тогда, по интерполяционной теореме $L_{p,1} = (L_{\frac{pp'}{2p'-p}}, L_{p'})_{(\frac{1}{2},1)}$ и по лемме 9 выполнены следующие неравенства

$$\begin{multline}\Big\|\sum_{\omega\in\mathcal{T}\cap\mathcal{AF}_n} F_{n+1}\chi_{\omega}\Big\|_{L_{p,1}} \lesssim \Big\|\sum_{\omega\in\mathcal{T}\cap\mathcal{AF}_n} F_{n+1}\chi_{\omega}\Big\|_{L_{p'}}^{\frac12} \Big\|\sum_{\omega\in\mathcal{T}\cap\mathcal{AF}_n} F_{n+1}\chi_{\omega}\Big\|_{L_{\frac{pp'}{2p'-p}}}^{\frac12} \lesssim \\ e^{\alpha(n-n_0)}\|F_{n_0}\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}\|_{L_{p'}}^{\frac12}\|F_{n_0}\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}\|_{L_{\frac{pp'}{2p'-p}}}^{\frac12} = e^{\alpha(n-n_0)}\|F_{n_0}\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}\|_{L_p} \end{multline} \tag{60}$$

для некоторого $\alpha \in (k_{\mathcal{W}}(\frac{1}{p'}), \frac{p-1}{p}\log(\gamma^{-1}))$.

Так как неравенство выполнено для всех n, мы можем написать оценку

$$\begin{multline}\Big\|\sum_{\omega\in\mathcal{T}\cap\mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_{\omega}\Big\|_{L_{p,1}} \lesssim e^{\alpha(n-n_0)}\|F_{n_0}\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}\|_{L_p} = |\omega_{\mathcal{T}}|^{-\frac{p-1}{p}}e^{\alpha(n-n_0)}\|F_{n_0}\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}\|_{L_1} \asymp \\ \gamma^{-n_0\frac{p-1}{p}}e^{\alpha(n-n_0)}\|F_{n_0}\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}\|_{L_1}. \end{multline} \tag{61}$$

Сделаем финальную оценку:

$$\sum_{n\geqslant n_0} \gamma^{\frac{p-1}{p}n}\Big\|\sum_{\omega\in\mathcal{T}\cap\mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_{\omega}\Big\|_{L_{p,1}} \lesssim \sum_{n\geqslant n_0} \gamma^{-\frac{p-1}{p}(n-n_0)}e^{\alpha(n-n_0)}\|F_{n_0}\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}\|_{L_1} \lesssim \|F_{n_0}\chi_{\omega_{\mathcal{T}}}\|_{L_1}. \tag{62}$$

$\square$

Мы доказываем неравенство $\|I^*_{\frac{p-1}{p}}F\|_{B^{0,1}_{p,1}} \lesssim \|F\|_{L_1}$, для этого оценить сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{\frac{p-1}{p}n}\|dF_n\|_{L_{p,1}} \lesssim \sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{\frac{p-1}{p}n}\left\|\sum_{\omega\in Co\cap\mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega\right\|_{L_{p,1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{\frac{p-1}{p}n}\left\|\sum_{\omega\in Fl\cap\mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega\right\|_{L_{p,1}}. \quad (63)$$

Будем оценивать эти суммы отдельно.

Нам понадобится следующее неравенство, для $\mathcal{F}_{n+1}$ измеримой функции g

$$\|g\|_{L_{p,1}} \lesssim \gamma^{-\frac{p-1}{p}n}\|g\|_{L_1}. \quad (64)$$

Это неравенство верно, так как $|\omega| \gtrsim \gamma^{-n}$ для любого атома $\omega \in \mathcal{F}_{n+1}$.

Если совместить это неравенство и следствие 1, мы получим неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{\frac{p-1}{p}n}\left\|\sum_{\omega\in Co\cap\mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega\right\|_{L_{p,1}} \lesssim \|F\|_{L_1}. \quad (65)$$

Пусть $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1, \ldots$ — это деревья нашего графа, а $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — это их корни, и пусть $\omega_j \in \mathcal{AF}_{n_j}$. Мы используем неравенство треугольника (пространство $L_{p,1}$ нормируемое):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{\frac{p-1}{p}n}\left\|\sum_{\omega\in Fl\cap\mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega\right\|_{L_{p,1}} \lesssim \sum_j\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{\frac{p-1}{p}n}\left\|\sum_{\omega\in\mathcal{T}_j\cap\mathcal{AF}_n} dF_{n+1}\chi_\omega\right\|_{L_{p,1}} \overset{\text{след.2}}{\lesssim} \sum_j \|F_{n_j}\|\chi_{\omega_j}. \quad (66)$$

Заметим, что предок любого атома ω_j является выпуклым (иначе ω_j не был бы корнем дерева $\mathcal{T}_j$). По лемме 8

$$\sum_j \mathbb{E}\|F_{n_j}\|\chi_{\omega_j} \lesssim \sum_j \mathbb{E}(\|F_{n_j}\| - \|F_{n_j-1}\|)\chi_{(\omega_j)^\uparrow} \overset{50}{\lesssim} \|F\|_{L_1}. \quad (67)$$

Список литературы

[1] Rami Ayoush, Dmitriy M. Stolyarov, Michal Wojciechowski, *Sobolev martingales*, Rev. Mat. Iberoam. 37 (2021), no. 4, pp. 1225–1246.

[2] J. Bourgain, H. Brezis, *New estimates for the Laplacian, the div-curl, and related Hodge systems*,C. R. Math., Acad. Sci. Paris Journal 338:7 (2004), 539–543.

[3] J. Bergh, J. Lofstrom, *Interpolation spaces: an introduction*,Springer-Verlag, 1976.

[4] E. Gagliardo, *Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabli*, Journal of Fourier Analysis and Applications, Ric. Mat. 8:1 (1959),24–51.

[5] S. Janson, *Characterizations of H^1 by singular integral transforms on martingales and $\mathbb{R}^n$*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 12(2):213–223, 2006.

[6] E. Nakai and G. Sadasue, *Martingale Morrey–Campanato spaces and fractional integrals*,Journal of Function Spaces and Applications (2012), Article ID 673929.

[7] L. Nirenberg, *On ellipltic partial differential equations*,Ann. Scuola Norm. Sup Pisa 13:3 (1959),115–162.

[8] S. Soboleff, *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle*,Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 4(46):3 (1938) (in Russian), 471–497; English translation in Amer. Math. Soc. Transl. 2(34) (1963), 39–68.

[9] D. M. Stolyarov, *Hardy–Littlewood–Sobolev inequality for $p = 1$*, https://arxiv.org/abs/2010.05297

[10] C. Watari, *Multipliers for Walsh–Fourier series*, Tohoku Math. J. 16:3 (1964), 239–251. .

N.P. Dobronravov,
e-mail:dobronravov1999@mail.ru .