Отзыв о дипломной работе “Качественные свойства локально вогнутых функций” студента 2 курса магистратуры 01.04.01 Математика Е. П. Добронравова

Работа Егора Петровича Добронравова посвящена изучению свойств непрерывности и гладкости локально вогнутых функций. Понятие локально вогнутой функции интуитивно ясно. Особый интерес представляют минимальные локально вогнутые функции, то есть, поточечные инфимумы семейств локально вогнутых функций, ограниченных снизу какой-то фиксированной функцией. В последнее время такие функции часто возникают в задачах гармонического анализа и теории вероятностей при применении техники Беллмана–Буркхольдера. Они возникали и ранее, например, при изучении поверхностей нулевой кривизны. Тем не менее, какие-то общие свойства этих функций, по-видимому, не изучены. Существенно отличаться от свойств классических вогнутых и выпуклых функций они могут только в окрестности точек невыпуклости границы.

Прежде, чем описывать результаты Егора, отмечу, что я ставил ему совершенно другие задачи, нежели решённые в работе. Возможно, мои постановки были легкомысленно амбициозными. Я предлагал изучать геометрию минимальных локально-вогнутых функций, то есть, решений вырожденного уравнения Монжа–Ампера на невыпуклых областях. Егор же занимался свойствами непрерывности и гладкости локально вогнутых функций вообще (не обязательно минимальных). Судя по всему, такая постановка делает задачу более простой и менее интересной. Но, как стало понятно после изучения работы Егора, без неё пытаться заниматься поставленными мной задачами затруднительно. Возможно, изучение качественных свойств минимальных локально вогнутых функций предстоит Егору в будущем.

Аналоги вопросов, освещенных в работе Егора, для вогнутых функций — настолько классические результаты, что я даже не знаю, кому они принадлежат: выпуклая или вогнутая функция непрерывна и локально липшицева во внутренних точках области определения.

Что же сделано в работе? Егор ограничился изучением поведения локально вогнутых функций в точках вогнутости границы (в окрестности такой точки область выглядит как надграфик вогнутой функции нескольких переменных). Конечно, у произвольной (даже гладкой) области могут быть и куда более хитрые точки на границе, а не только точки вогнутости и выпуклости, но для функций, появляющихся в приложениях к анализу и теории вероятностей, общности работы Егора пока что достаточно. Оказывается, что в любом случае в таких точках функция полунепрерывна снизу. А вот для того, чтобы гарантировать полунепрерывность сверху, требуется, чтобы граница была строго вогнута. Эти результаты относительно просты, что позволяет распространить их на общность функций, заданных на подобластях локально-выпуклых бесконечномерных пространств. Интересно, что такая общность иногда востребована в теории функций Беллмана–Буркхольдера.

Далее Егор переходит к изучению оценок модулей непрерывности локально вогнутой функции в окрестности точки вогнутости границы. Им получено семейство точных оценок. Приведу следствие его результата. Если в некоторой точке граница вогнута, C^2-гладкая в окрестности, и кривизна отделена от нуля, то любая локально вогнутая функция $1/2$-гёльдерова в окрестности этой точки; более того, оценка принципиально неулучшаема. Для получения оценок Егор построил специальную минимальную локально вогнутую функцию. Хотя специалистам такая функция знакома, проверка её свойств весьма технична и занимает 7 страниц (из-за этого работа довольно длинная). С другой стороны, по-видимому, для областей со столь плохими (никаких условий гладкости границы не наложено), как в работе Егора, границами, минимальные локально-вогнутые функции раньше не строились. Хотя эти результаты могут показаться техническими, они фундаментальны и, по-видимому, весьма нетривиальны.

Считаю, что работа важная, сделана на высоком профессиональном уровне и заслуживает оценки “отлично”.

Д. М. Столяров, научный руководитель Е. П. Добронравова, к. ф.-м. н., доцент.
4 июня 2023