Санкт-Петербургский государственный университет

Добронравов Егор Петрович

Выпускная квалификационная работа

Качественные свойства локально вогнутых функций.

Программа магистратуры:
Направление 01.04.01 "Математика"
ВМ.5832.2021 "Современная математика"

Научный руководитель:
доцент факультета Математики
и компьютерных наук СПбГУ,
кандидат ф.-м. наук,
Столяров Дмитрий Михайлович

Рецензент:
Associate Professor
University of Cincinnati,
PhD,
Леонид Юрьевич Славин

Санкт-Петербург
2023

1 Введение

Минимальные локально вогнутые функции и их аналоги — максимальные локально выпуклые функции являются важным объектом математического анализа. Они часто оказываются решениями оптимизационных задач и совпадают с функциями Беллмана. Подобные функции встречаются в работах [2], [3], [4]. Так в работе [2] показано, что в строго выпуклой области (кривизны границы отделены от нуля) с $C^{3,1}$ гладкой границей максимальная выпуклая функция с $C^{3,1}$ гладким граничным значением будет $C^{1,1}$ гладкая вплодь до границы, а так же приведены примеры $C^{3,1-\varepsilon}$ гладких граничных значений на окружности, для которых максимальная выпуклая функция не является $C^{1,1}$ гладкой вплодь до границы и пример бесконечно гладкого граничного значения на окружности, для которого максимальная выпуклая функция не будет дважды дифферинцируема в некоторой внутренней точке.

В работах [6] и [7] доказывается равенство функций Беллмана и соответствующих минимальных локально вогнутых функций для областей, представляющих собой разность двух выпуклых множеств в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^d$ для $d > 2$ соответственно.

Данная работа содержит изучение качественных свойств локально вогнутых функций. Так, например, известно, что локально вогнутые функции на $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ липшицевы во внутренних точках области определения, а также локально вогнутые ограниченные снизу функции на $\Omega \subseteq X$ непрерывны во внутренних точках области определения, если X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. В данной работе будет изучаться, какой уровень гладкости можно гарантировать в граничных точках области определения в зависимости от поведения границы области в данной точке. Более подробно в данной работе изучалось поведение функции в собственных точках вогнутости границы области (см. определение 3.2). Собственные точки вогнутости границы области можно считать основным примером граничных точек области определения локально вогнутой функции. Все точки свободной границы, рассматриваемые в работах [6] и [7], будут точками вогнутости границы области.

2 Общие понятия и определения.

Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, а Ω — его подмножество. Через $\overline{\mathbb{R}}$ обозначим расширенную вещественную прямую, то есть, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Арифметические операции доопределим на $\overline{\mathbb{R}}$ следующим образом:

$$+\infty + (-\infty) = -\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0,$$

остальные операции продлеваются естественным образом.

Определение 2.1. Пусть множество Ω' — выпуклое подмножество множества Ω. Пусть функция $B\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ удволетворяет условиям

$$\forall x,\, y \in \Omega',\, \forall \alpha \in [0,\, 1],\, \alpha B(x) + (1-\alpha)B(y) \leqslant B(\alpha x + (1-\alpha)y),$$

$$B(x) = -\infty, \quad \text{для } x \in \Omega \setminus \Omega'.$$

Тогда функция B называется вогнутой.

Замечание 2.1. *Пусть $\Gamma_B = \big\{(x,\, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}} \big| \, B(x) \geqslant t\big\}$ — подграфик функции B. Тогда B вогнута тогда и только тогда, когда "конечная" часть подграфика B — выпукла. То есть, тогда и только тогда, когда выпукло множество $\Gamma_B \cap \Omega \times \mathbb{R}$.*

Замечание 2.2. *Функция $B\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ вогнута тогда и только тогда, когда функция $-B$ выпукла, где определение выпуклой функции взято из [5].*

Определение 2.2. Пусть функция $B\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяет условию

$$\forall x,\, y \in \Omega, \text{ если } [x,\, y] \subseteq \Omega, \text{ то } \forall \alpha \in [0,\, 1] \text{ верно неравенство } \alpha B(x) + (1-\alpha)B(y) \leqslant B(\alpha x + (1-\alpha)y).$$

В таком случае, функция B называется локально вогнутой.

То есть, локально вогнутая функция — это функция, вогнутая на любом отрезке своей области определения. Если же область Ω оказалась выпуклой, то локально вогнутая функция на Ω будет вогнутой.

3 Определение точек вогнутости.

Начиная с этой главы X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Не умаляя общности, можно считать, что X — локально выпуклое линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{R}$ (любое локально выпуклое линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{C}$ можно рассматривать как локально выпуклое линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{R}$).

Напомним, что окрестность нуля U называется абсолютно выпуклой, если для любых точек $a, b \in U$ и чисел $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$ верно включение $\alpha a + \beta b \in U$.

Определение 3.1. Пусть $x \in \partial\Omega$ и существует такая абсолютно выпуклая окрестность нуля U, что

$$(x + U) \cap \mathrm{int}\Omega = (x + U) \setminus \mathrm{cl}V, \tag{3.1}$$

где V — непустое открытое выпуклое множество. Тогда назовём x точкой вогнутости границы Ω.

Определение 3.2. Пусть x — точка вогнутости границы Ω. Если при этом справедливо вложение

$$(x + U) \cap \partial\Omega \subseteq \Omega,$$

то назовём x собственной точкой вогнутости границы Ω.

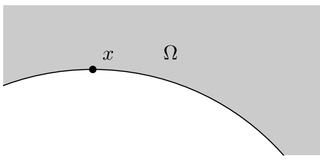

Рис. 1: Собственная точка вогнутости границы.

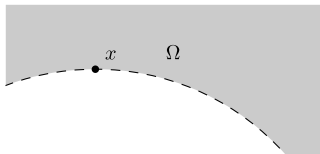

Рис. 2: Несобственная точка вогнутости границы.

Определение 3.3. Пусть x — точка вогнутости границы Ω. Если при этом имеет место равенство

$$(x + U) \cap \partial\Omega \cap \Omega = \varnothing,$$

то назовём x несобственной точкой вогнутости границы Ω.

Пусть x — точка вогнутости границы Ω, множество V такое же открытое выпуклое, как в формуле 3.1. Тогда существует линейный непрерывный функционал $\varphi \in X'$, который отделяет x от V. То есть, $\forall y \in V$ справедливо неравенство $\varphi(y) > \varphi(x)$. Пусть $L = \{y \in X \,|\, \varphi(y) = \varphi(x)\}$ — опорная гиперплоскость к V в точке x (в точке x может быть как единственная, так и множество различных опорных гиперплоскостей).

Определение 3.4. Пусть $x \in \partial\Omega$ — точка вогнутости границы Ω, V — такое же открытое выпуклое множество, как в определении 3.1. Пусть в x существует такая опорная гиперплоскость L, что нашлась абсолютно выпуклая окрестность нуля W, для которой

$$(x + W) \cap L = (x + W) \cap L \cap \partial V.$$

Тогда назовём x плоской точкой границы Ω, в противном случае — не плоской.

Утверждение 3.1. *Пусть точка x — плоская точка вогнутости границы области Ω, множество V такое же открытое выпуклое, как в формуле 3.1. Тогда в x существует единственная опорная гиперплоскость к V.*

Доказательство. Существование мы знаем, нам нужно доказать только единственность. Если существует две различные опорные гиперплоскости L_1 и L_2, то они заданы различными отделяющими линейными функционалами φ_1 и φ_2. Пусть, не умаляя общности, L_1 доказывает, что точка x — плоская, а W — абсолютно выпуклая окрестность нуля, такая что

$$(x + W) \cap L_1 = (x + W) \cap L_1 \cap \partial V.$$

Пусть $y \in L_1 \cap (x + W)$. Тогда, раз $y \in \partial V$, значит, $\varphi_2(y) \geqslant \varphi_2(x)$. С другой стороны, в силу абсолютной выпуклости W имеем $2x - y \in L_1 \cap (x + W)$. Следовательно верна цепочка неравенств:

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_2(x) + \frac{1}{2}\varphi_2(x) \leqslant \frac{1}{2}\varphi_2(y) + \frac{1}{2}\varphi_2(x) \leqslant \frac{1}{2}\varphi_2(y) + \frac{1}{2}\varphi_2(2x - y) = \varphi_2(x).$$

Что означает, что $\varphi_2(x) = \varphi_2(y) = \varphi_2(2x-y)$. То есть, $\varphi_2\big|_{L_1 \cap W} = \varphi_2(x)$. В силу линейности φ_2 это означает, что $\varphi_2\big|_{L_1} = \varphi_2(x)$, то есть, что $L_1 \subseteq L_2$. Но и L_1, и L_2 — это аффиные гиперплоскости коразмерности 1. Следовательно, $L_1 = L_2$. $\square$

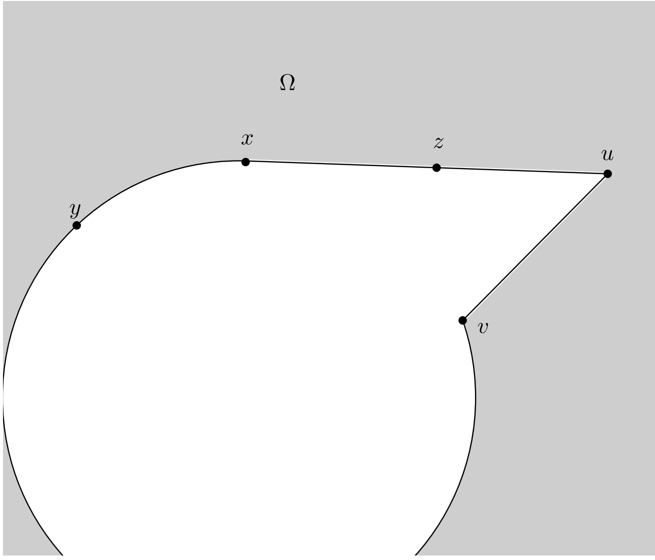

Рис. 3: Точки x, y, u — не плоские точки вогнутости границы Ω, z — плоская точка вогнутости границы Ω, v — не точка вогнутости границы Ω.

4 О непрерывности локально вогнутых функций в точках вогнутости границы области.

Целью данной главы является выяснение в каких точках вогнутости границы области можно гарантировать непрерывность или хотя бы полунепрерывность сверху/снизу. При изучении локально вогнутых функций на локально выпуклом линейном топологическом пространстве естественно требовать локальную ограниченность снизу, так как без этого ограничения даже линейные функционалы могут быть всюду разрывными. Для конечномерного пространства данное ограничение выглядит излишним. В связи с этим фактом теория разбивается на две с очень похожими теоремами и доказательствами, за исключением того, что в конечномерном случае нужно требовать лишь то, чтобы в окрестности изучаемой точки функция не принимала значение $-\infty$, тогда как в локально выпуклом случае приходится требовать ограниченность снизу в окрестности точки. Однако в случае, когда наша точка — точка вогнутости границы, посредствам следующей теоремы можно свести конечномерный случай к локально выпуклому.

Теорема 4.1. *Пусть x — собственная точка вогнутости границы множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Пусть функция $B\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ — локально вогнута и не равна $-\infty$ в окрестности x. Тогда B ограниченна снизу в окрестности x.*

Доказательство. Пусть множество V такое же открытое выпуклое, как в формуле 3.1. Пусть U — такой шар с центром в x, что $B|_{\Omega\cap U}$ не принимает значение $-\infty$. Пусть точки $y_1, \ldots, y_{d+1} \in U$ таковы, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(\{y_1, \ldots, y_{d+1}\}))$ (см. Рис 4). Если для каких-то $i \neq j$ выполнено $[y_i, y_j] \cap V \neq \varnothing$, тогда в силу выпуклости V верно, что пересечение $[y_i, y_j]$ и $\mathrm{cl}V$ — отрезок. Назовём ближний к y_i конец этого отрезка $u_{i,j}$, а другой соответственно $u_{j,i}$ (см. Рис. 4).

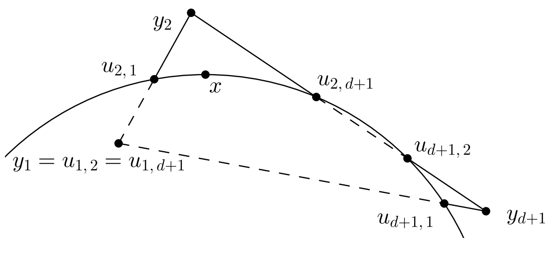

Рис. 4: Конструкция точек y_i и $u_{i,j}$.

Пусть F — следующее множество:

$$F = (\{y_1, \ldots, y_{d_1}\} \cup \{u_{i,j} | [y_i, y_j] \cap V \neq \varnothing\}) \cap \Omega.$$

Пусть множество S — симплекс с вершинами $y_1, \ldots, y_{d+1}$, то есть $S = \operatorname{conv}(\{y_1, \ldots, y_{d+1}\})$. Нам осталось показать, что

$$B(v) \geqslant \min\{B(w) | w \in F\}, \qquad v \in S \cap \Omega.$$

Точка v лежит в симплексе с вершинами $y_1, \dots, y_{d+1}$. Пусть v лежит на грани размерности k симплекса S, где $k \in \{0, 1, \dots, d\}$. Проведём индукцию по k.

База индукции: $k = 0, 1$.

При $k = 0$ выполнено $v \in \{y_1, \dots, y_{d+1}\} \cap \Omega$, соответственно

$$B(v) \geqslant \min\{B(y_j) | y_j \in \Omega\} \geqslant \min\{B(w) | w \in F\}.$$

При $k = 1$ существуют такие номера i, j, что точка v пренадлежит отрезку $[y_i, y_j]$. Если $[y_i, y_j] \cap V = \varnothing$ тогда существует такое число α, что $v = \alpha y_i + (1-\alpha) y_j$ и соответственно

$$B(v) \geqslant \alpha B(y_i) + (1-\alpha) B(y_j) \geqslant \min\{B(y_i), B(y_j)\} \geqslant \min\{B(w) | \, w \in F\}.$$

Если же $[y_i, y_j] \cap V \neq \varnothing$, тогда либо $v \in [y_i, u_{i,j}]$, либо $v \in [y_j, u_{j,i}]$. Пусть, не умаляя общности, выполнено включение $v \in [y_i, u_{i,j}]$. Тогда существует такое число α, что $v = \alpha y_i + (1-\alpha) u_{j,i}$ и соответственно

$$B(v) \geqslant \alpha B(y_i) + (1-\alpha) B(u_{j,i}) \geqslant \min\{B(y_i), B(u_{j,i})\} \geqslant \min\{B(w) | \, w \in F\}.$$

Индукционный переход.

Пусть $v \in \mathrm{conv}(\{y_{i_1}, \dots, y_{i_{k+1}}\})$, где $k \geqslant 2$. Пусть A — аффинная оболочка точек $y_{i_1}, \dots, y_{i_{k+1}}$. Тогда в гиперплоскости A мы можем провести прямую l, проходящую через v, но не пересекающую $V \cap A$, а значит, и само множество V. Прямая l пересекается с гранью $\mathrm{conv}(\{y_{i_1}, \dots, y_{i_{k+1}}\})$ по отрезку, назовём этот отрезок $[w_1, w_2]$ (см. Рис. 5).

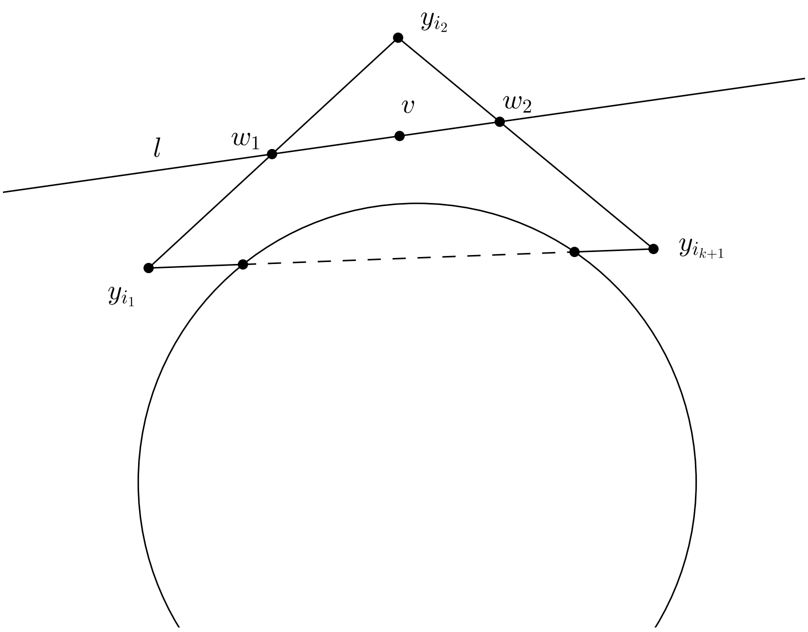

Рис. 5: Построение точек w_1 и w_2.

Весь отрезок $[w_1, w_2]$ лежит в множестве Ω, при этом точки w_1 и w_2 лежат на гранях симплекса S размерности строго меньше чем k. Точка v лежит на отрезке $[w_1, w_2]$, соответственно, существует число $\alpha \in [0, 1]$ такое, что $v = \alpha w_1 + (1-\alpha) w_2$ и верна цепочка неравенств:

$$B(v) \geqslant \alpha B(w_i) + (1-\alpha) B(w_j) \geqslant \min\{B(w_i), B(w_j)\} \overset{\substack{\text{по предположению} \\ \text{индукции}}}{\geqslant} \min\{B(w) | \, w \in F\}.$$

$\square$

Теорема 4.2. *Пусть x — собственная точка вогнутости границы Ω. Пусть функция $B\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ — локально вогнута и существует W — такая абсолютно выпуклая окрестность нуля, что функция $B|_{(x+W)\cap\Omega}$ ограниченна снизу. В таком случае, функция B полунепрерывна снизу в точке x.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x = 0$, $B|_{W\cap\Omega} \geqslant 0$, а также, что множество W совпадает с множеством U из определения собственной точки вогнутости границы области Ω, то есть, что

$$W \cap \Omega = W \setminus V,$$

где V — открытое выпуклое множество. Пусть φ отделяет 0 от V. Пусть $y \in \frac{1}{3}W \cap V$. Не умаляя общности, $\varphi(y) = 1$. Пусть число $\varepsilon > 0$ достаточно мало и

$$z \in \Omega \cap \varepsilon W \cap \left\{ v \in X \,\middle|\, |\varphi(v)| < \varepsilon \right\}.$$

Нам необходимо проверить, что $B(z) \geqslant B(0) + o(1)$.

Рассмотрим два случая: $\varphi(z) \leqslant 0$ и $\varphi(z) > 0$.

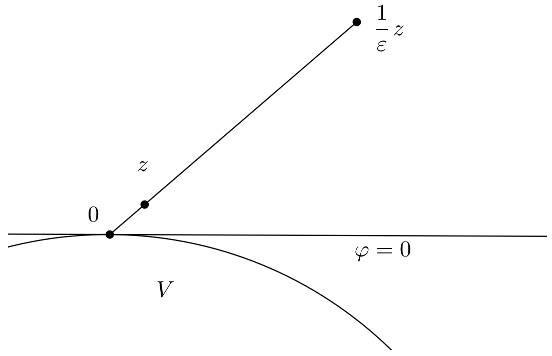

Рис. 6: Случай $\varphi(z) \leqslant 0$.

Случай $\varphi(z) \leqslant 0$ (см. Рис. 6). В данном случае, верно включение

$$\left[0, \frac{1}{\varepsilon}z\right] \subseteq W \setminus V \subseteq \Omega.$$

И следовательно,

$$B(z) \geqslant (1-\varepsilon)B(0) + \varepsilon B\left(\frac{1}{\varepsilon}z\right) \geqslant (1-\varepsilon)B(0). \tag{4.1}$$

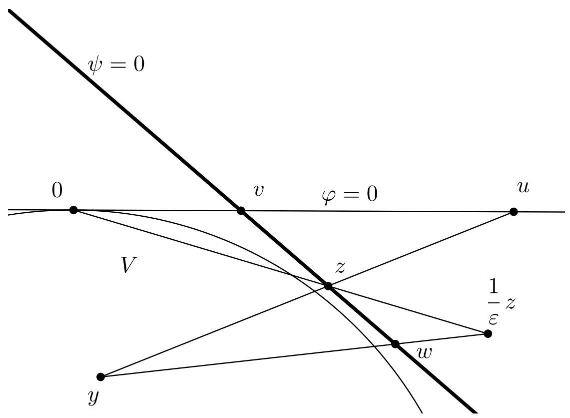

Рис. 7: Случай $\varphi(z) > 0$.

Случай $\varphi(z) = \alpha > 0$ (см. Рис. 7). В таком случае, $0 < \alpha < \varepsilon$. Пусть

$$u = \frac{-\alpha}{1-\alpha}y + \frac{1}{1-\alpha}z.$$

Тогда

$$\varphi(u) = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\varphi(y) + \frac{1}{1-\alpha}\varphi(z) = \frac{-\alpha}{1-\alpha}1 + \frac{1}{1-\alpha}\alpha = 0.$$

С другой стороны, так как $y \in \frac{1}{3}W$, $z \in \varepsilon W$ и W абсолютно выпукла, справедливо включение

$$u \in \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{3} + \frac{1}{1-\alpha}\varepsilon\right)W \overset{\alpha<\varepsilon}{\subseteq} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)W \subseteq 3\varepsilon W.$$

Следовательно, так как $\varphi(u) \geqslant 0$, в силу формулы (4.1) справедливо неравенство $B\big|_{[0,u]} \geqslant (1-3\varepsilon)B(0)$. Так как верно включение $z \in \varepsilon W$, следовательно справедливо и вклчение $\left[0, \frac{1}{\varepsilon}z\right] \in W$. Заметим, что раз V открытое выпуклое и верны соотношения $0 \in \partial V$, $z \notin V$, следовательно имеет место равенство $\left[z,\, \frac{1}{\varepsilon}z\right] \cap V = \varnothing$. Пусть $\widetilde{\psi} \in X'$ отделяет z от V, а $\psi(\cdot) = \widetilde{\psi}(\cdot) - \widetilde{\psi}(z)$. Тогда, не умаляя общности, $\psi(z) = 0$, $\psi(y) > 0$, $\psi(0) \geqslant 0$. С другой стороны $z \in (y,\, u)$ и $z \in \left(0, \frac{1}{\varepsilon}z\right)$. То есть, $\psi(u) < 0$, $\psi\left(\frac{1}{\varepsilon}z\right) \leqslant 0$. Таким образом, на отрезках $[0,\, u]$ и $\left[y, \frac{1}{\varepsilon}z\right]$ есть ровно по одной такой точке, что ψ в ней зануляется. Пусть это будут точки v и w соответственно. Заметим, что, с одной стороны, $z,\, v,\, w \in \operatorname{span}\{z,\, y\}$, с другой $\psi(z) = \psi(v) = \psi(w) = 0$. То есть, точки z, v, w лежат на одной прямой. Кроме того, $\varphi(v) \in [\varphi(0),\, \varphi(u)] = \{0\}$, $\varphi(z) = \alpha$, $\varphi(w) \in \left[\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}z\right),\, \varphi(y)\right] = \left[\frac{\alpha}{\varepsilon},\, 1\right]$. То есть, существует такое $\delta \in (\alpha, \varepsilon)$, что $\delta w + (1-\delta)v = z$. Так как $\psi|_{[v,w]} = 0$, следовательно имеет место равенство $[v,\, w] \cap V = \varnothing$. А значит и включение $[v,\, w] \subseteq \Omega \cap W$, то есть,

$$B(z) \geqslant (1-\delta)B(v) + \delta B(w) \geqslant (1-\delta)B(v) \geqslant (1-\varepsilon)B(v) \geqslant (1-\varepsilon)(1-3\varepsilon)B(0).$$

□

Дальше естественно рассмотреть вопрос о том, в каких точках мы можем гарантировать полунепрерывность сверху. Для начала покажем, что в плоских точках нельзя гарантировать полунепрерывность сверху. Для этого приведём пример локально вогнутой функции разрывной в данной плоской точке вогнутости границы.

Теорема 4.3. *Пусть x — плоская собственная точка вогнутости границы Ω. Существует такая локально вогнутая функция $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$, что B ограничена снизу в окрестности x и B не полунепрерывна сверху в точке x.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x = 0$. Пусть W — абсолютно выпуклая окрестность нуля и функционал $\varphi \in X'$, такие что

$$W \cap \Omega = W \setminus \{x \in X \,|\, \varphi(x) > 0\}. \tag{4.2}$$

Пусть тогда точка y такова, что $\varphi(y) = 1$. А также пусть p_W — полунорма, построенная по окрестности W. Тогда $z \mapsto p_W(z)$ — выпуклая функция, функция $z \mapsto \varphi(z)y - z$ линейна. Следовательно, функция $z \mapsto p_W(\varphi(z)y - z)$ выпукла, а значит, функция $z \mapsto 1 - p_W(\varphi(z)y - z)$ вогнута. Докажем, что подойдёт следующая функция:

$$B(z) = \begin{cases} 1 - p_W(\varphi(z)y - z), & \text{при } z \in \Omega \setminus \left(W \cap \{v \in X \,|\, \varphi(v) = 0\}\right), \\ 0, & \text{при } z \in W \cap \{v \in X \,|\, \varphi(v) = 0\}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Проверим локальную вогнутость функции B.

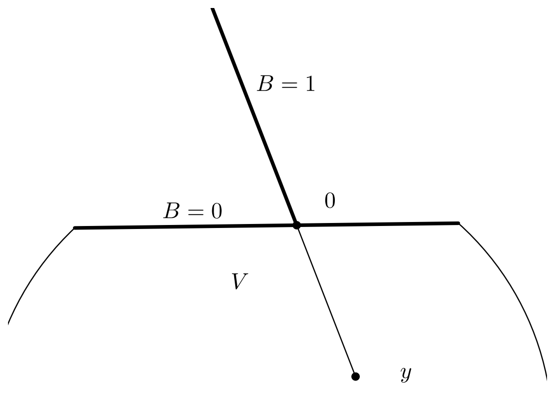

Рис. 8: Пример функции, разрывной в плоской точке.

Когда $z \in W \cap \{v \in X \,|\, \varphi(v) = 0\}$, тогда $1 - p_W(\varphi(z)y - z) = 1 - p_W(z) > 0$. То есть, $B(z) \leqslant 1 - p_W(\varphi(z)y - z)$. Так как функция $z \mapsto 1 - p_W(\varphi(z)y - z)$ вогнута, для проверки локальной вогнутости B достаточно проверить вогнутость вдоль таких отрезков, что они лежат в Ω и содержат какую-нибудь точку z, лежащую в $W \cap \{v \in X \,|\, \varphi(v) = 0\}$, как внутреннюю. В силу (4.2) это означает, что $\varphi = 0$ на всём отрезке. Но $B|_{\{v \in X \,|\, \varphi(v)=0\}} = \min\{0,\, 1 - p_W(z)\}$, а минимум двух вогнутых функций вогнут.

Проверим локальную ограниченность снизу функции B.

Если $z \in \Omega \cap W \cap \left\{v \in X \,\middle|\, |\varphi(v)| < 1\right\}$, тогда

$$B(z) \geqslant \min\{0,\, 1 - p_W(\varphi(z)y - z)\} \geqslant \min\{0,\, 1 - |\varphi(z)| p_W(y) - p_W(z)\} \geqslant \min\{0,\, 1 - p_W(y) - 1\} = -p_W(y).$$

Установим отсутствие полунепрерывности сверху.

Пусть $\varepsilon > 0$, при $\varepsilon < \frac{1}{p_W(y)}$ выполнено $-\varepsilon y \in \Omega \setminus \big(W \cap \{v \in X \big| \varphi(v) = 0\}\big)$. То есть,

$$B(-\varepsilon y) = 1 - p_w(\varphi(-\varepsilon y)y - (-\varepsilon y)) = 1 - p_W(0) = 1.$$

Но при $\varepsilon \to 0$ верно $-\varepsilon y \to 0$. □

Теорема 4.4. *Пусть x — не плоская собственная точка вогнутости границы Ω. Пусть функция $B\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ — локально вогнута и существует W — такая абсолютно выпуклая окрестность нуля, что функция $B|_{(x+W)\cap\Omega}$ — ограниченна снизу. В таком случае, функция B полунепрерывна сверху в точке x.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x = 0$, $B|_{W\cap\Omega} \geqslant 0$, а так же, что W совпадает с U из определения собственной точки вогнутости границы, то есть, что

$$W \cap \Omega = W \setminus V,$$

где V — непустое открытое выпуклое множество. Пусть функционал φ отделяет 0 от V. Пусть $y \in \frac{1}{3}W \cap V$. Не умаляя общности, $\varphi(y) = 1$. Пусть число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Так как x не плоская, верно неравенство

$$\big(\varepsilon W \cap \big\{v \in X \big| \varphi(v) = 0\big\}\big) \setminus \partial V \neq \varnothing.$$

Пусть

$$z_\varepsilon \in \big(\varepsilon W \cap \big\{v \in X \big| \varphi(v) = 0\big\}\big) \setminus \partial V.$$

Пусть u_ε — точка на интервале (y, z_ε), не лежащая в V. Не трудно видеть, что тогда $[u_\varepsilon, z_\varepsilon] \cap V = \varnothing$, с другой стороны, раз верны включения $y \in \frac{1}{3}W$ и $z_\varepsilon \in \varepsilon W$, следовательно верно включение $u_\varepsilon \in \frac{1}{3}W$, а значит имеет место включение $[u_\varepsilon, z_\varepsilon] \subseteq \Omega$. Пусть $\beta_\varepsilon = \varphi(u_\varepsilon)$, тогда $0 < \beta_\varepsilon < 1$. Пусть

$$v \in \Omega \cap \varepsilon W \cap \big\{w \in X \big| -\varepsilon\beta_\varepsilon > \varphi(w) > \varepsilon\big\}.$$

Нам необходимо проверить, что $B(v) \leqslant B(0) + o(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим три случая: $\varphi(v) = 0$, $\varphi(v) > 0$ и $\varphi(v) < 0$.

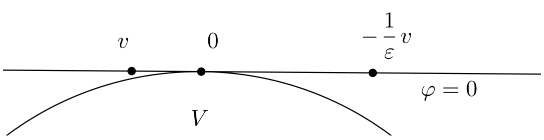

Рис. 9: Случай $\varphi(v) = 0$.

Случай $\varphi(v) = 0$ (см. Рис. 9). В таком случае, точка $-\frac{1}{\varepsilon}v \in W \setminus V$. И весь отрезок $\big[v, -\frac{1}{\varepsilon}v\big]$ лежит в $W \setminus V$. Тогда

$$B(0) \geqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} B\left(-\frac{1}{\varepsilon}v\right) + \frac{1}{1+\varepsilon}B(v) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}B(v).$$

То есть,

$$B(v) \leqslant (1+\varepsilon)B(0). \tag{4.4}$$

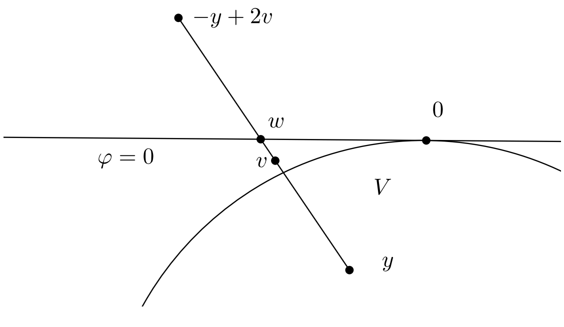

Рис. 10: Случай $\varphi(v) > 0$.

Случай $\varphi(v) > 0$ (см. Рис. 10). Пусть в данном случае $\varphi(v) = \alpha > 0$. Так как $y \in \frac{1}{3}W$ и $v \in \varepsilon W$, весь отрезок $[y,\, -y+2v]$ содержится в W. Из выпуклости V, раз $y \in V$, $v \notin V$, значит верно $[v,\, -y+2v] \cap V = \varnothing$. Таким образом, мы получаем, что $[v,\, -y+2v] \subseteq \Omega \cap W$. Пусть

$$w = \frac{-\alpha}{1-\alpha} y + \frac{1}{1-\alpha} v = \frac{\alpha}{1-\alpha}(-y+2v) + \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} v,$$

тогда $\varphi(w) = 0$, $w \in [v,\, -y+2v]$ и

$$w \in \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{3} + \frac{1}{1-\alpha}\varepsilon\right) W \overset{\alpha \leq \varepsilon}{\subseteq} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) W \subseteq 3\varepsilon W.$$

Таким образом,

$$\frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} B(v) \leqslant \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} B(v) \leqslant \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} B(v) + \frac{\alpha}{1-\alpha} B(-y+2v) \leqslant B(w) \overset{(4.4)}{\leqslant} (1+3\varepsilon) B(0).$$

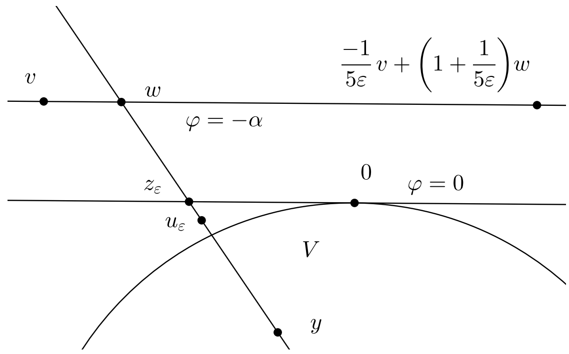

Рис. 11: Случай $\varphi(v) < 0$.

Случай $\varphi(v) = -\alpha < 0$ (см. Рис. 11). В данном случае, $\alpha < \varepsilon\beta_\varepsilon$. Введём точку $w = -\alpha y + (1+\alpha) z_\varepsilon$. Тогда $\varphi(w) = -\alpha = \varphi(v)$, а также

$$w \in \left(\alpha\frac{1}{3} + (1+\alpha)\varepsilon\right) W \overset{\alpha < \varepsilon\beta_\varepsilon}{\subseteq} \left(\varepsilon\beta_\varepsilon\frac{1}{3} + (1+\varepsilon\beta_\varepsilon)\varepsilon\right) W \overset{\beta_\varepsilon < 1}{\subseteq} 3\varepsilon W.$$

Раз $v \in \varepsilon W$, $w \in 3\varepsilon W$, значит верно включение $\left[v,\, \frac{-1}{5\varepsilon}v + \left(1+\frac{1}{5\varepsilon}\right) w\right] \subseteq W$. Тогда

$$\frac{1}{1+5\varepsilon} B(v) \leqslant \frac{1}{1+5\varepsilon} B(v) + \frac{5\varepsilon}{1+5\varepsilon} B\left(\frac{-1}{5\varepsilon} v + \left(1+\frac{1}{5\varepsilon}\right) w\right) \leqslant B(w).$$

Точки y, w, u_ε, z_ε лежат на одной прямой, а так же все лежат в W. Кроме того, из них только y принадлежит V. В силу выпуклости множества V, получаем $[u_\varepsilon,\, w] \subseteq W \setminus V = W \cap \Omega$. Также мы знаем, что $\varphi(z_\varepsilon) = 0$, $\varphi(u_\varepsilon) = \beta_\varepsilon$, $\varphi(w) = -\alpha$, а значит в силу линейности φ выполнено $z_\varepsilon = \frac{\alpha}{\alpha+\beta_\varepsilon} u_\varepsilon + \frac{\beta_\varepsilon}{\alpha+\beta_\varepsilon} w$. Таким образом

$$\frac{1}{1+\varepsilon} B(w) = \frac{\beta_\varepsilon}{\beta_\varepsilon + \varepsilon\beta_\varepsilon} B(w) \leqslant \frac{\beta_\varepsilon}{\beta_\varepsilon+\alpha} B(w) \leqslant \frac{\beta_\varepsilon}{\beta_\varepsilon+\alpha} B(w) + \frac{\alpha}{\beta_\varepsilon+\alpha} B(u_\varepsilon) \leqslant B(z_\varepsilon) \overset{(4.4)}{\leqslant} (1+\varepsilon) B(0).$$

$\square$

5 О гладкости локально вогнутых функций в точках вогнутости границы области.

Начиная с этой главы, мы будем рассматривать только конечномерный случай.

Мы хотим более детально оценить гладкость локально вогнутых функций в точках вогнутости границы. Даже если мы рассмотрим вогнутую на всём пространстве функцию $B\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, то мы можем гарантировать липшицевость функции, но не можем гарантировать даже поточечную дифференцируемость (например, функция $x \mapsto -|x|$ вогнута, но не дифференцируема в нуле). Соответственно в граничных точках так же не получится гарантировать что-то большее чем липшицевость.

Естественные вопросы, на которые можно попробовать ответить — это в каких точках вогнутости можно гарантировать липшицевость функции, или хотя бы α-гёльдеровость. Эти вопросы могут быть переформулированы через модуль непрерывности функции в точке следующим образом. Пусть x — собственная точка вогнутости границы $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, функция $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ локально вогнута. Пусть ω_x — модуль непрерывности B в точке x, то есть,

$$\omega(\delta) = \sup\Big\{|B(y) - B(x)|\Big|\, |y - x| \leqslant \delta\Big\}.$$

Тогда непрерывность функции B в точке x эквивалентна тому, что $\omega(\delta) = o(1)$, липшицевость в точке x эквивалентна тому, что $\omega(\delta) = O(\delta)$, а α-гёльдеровость в точке x эквивалентна условию $\omega(\delta) = O(\delta^\alpha)$. Таким образом, оценки модуля непрерывности можно рассматривать как более тонкие характеристики гладкости функции в точке. В нашем случае удаётся привести достаточно точные оценки модуля непрерывности в терминах того как быстро отходит граница области от касательной гиперплоскости (опорной к дополнению). Перед формулировкой основного результата данной главы необходимо определить модуль максимального убывания границы области в точке вогнутости. Эта характеристика будет формализацией понятия быстроты отхода границы области от касательной гиперплоскости.

Пусть x — собственная точка вогнутости границы области Ω, пусть U_ε — такой шарик радиуса ε с центром x, что

$$\Omega \cap U_\varepsilon = U_\varepsilon \setminus V,$$

где V — открытое выпуклое множество. Пусть так же в точке x существует единственная опорная гиперплоскость L к множеству V. Сделаем сдвиг пространства, так чтобы точка x совпала с нулём, а затем повернём пространство так, чтобы гиперплоскость L совпадала с гиперплоскостью $\{y \in \mathbb{R}^d |\, y_d = 0\}$, при этом множество V лежало в нижнем полупространстве, то есть, $V \subseteq \{y \in \mathbb{R}^d |\, y_d < 0\}$. Тогда в окрестности U точки 0 граница области выглядит как

$$\partial\Omega \cap U = \{(y_1, \ldots, y_{d-1}, -W(y_1, \ldots, y_{d-1}))\},$$

Где W — некоторая выпуклая неотрицательная функция равная в нуле нулю.

Определение 5.1. Модулем максимального убывания границы области Ω в точке x назовём следующую функцию:

$$\theta(\delta) = \sup\left\{W(y)\big|\, y \in \mathbb{R}^{d-1},\, |y| \leqslant \delta\right\}.$$

Заметим, что, если мы обозначим через S^{d-2} единичную сферу в $\mathbb{R}^{d-1}$, то

$$\theta(\delta) = \sup\left\{W(\delta y)\big|\, y \in S^{d-2}\right\},$$

а значит функция θ выпукла как супремум выпуклых. В частности, θ не дифференцируема не более чем в счётном множестве точек и её производная монотонно не убывает.

Также в дальнейшем важной вспомогательной функцией окажется функция $\theta'(t)t - \theta(t)$. Эта функция — вторая координата точки пересечения касательной в точке $(t, -\theta(t))$ к графику функции $x_2 = -\theta(x_1)$ и оси $x_1 = 0$ (см. Рис. 12). Эта функция в нуле равна нулю и неубывает, так как $(\theta'(t)t - \theta(t))' = t\theta''(t)$ (в случае не гладкого θ равенство можно понимать в смысле распределений).

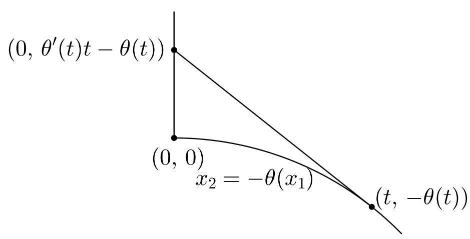

Рис. 12: Касательная к графику функции $x_2 = -\theta(x_1)$.

Из модуля максимального убывания границы в данной точке вогнутости можно получить достаточно точные оценки модуля непрерывности в данной точке. А именно мы будем доказывать следующую теорему.

Теорема 5.1. *Пусть $x \in \Omega$ — собственная точка вогнутости границы области. Пусть функция $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ локально вогнута. Тогда возможно 3 случая.*

1) Если x — плоская, то B полунепрерывна снизу в точке x, но не обязательно полунепрерывна сверху.

2) *Если в точке x существует хотя бы две опорные гиперплоскости (к множеству V), то B липшицева в точке x.*

3) *Если x не плоская, но в ней существует ровно одна опорная гиперплоскость, тогда B в ней непрерывна, но может быть не липшицева. При этом, если B не липшицева в точке x, тогда существуют константа $\varepsilon > 0$ и вогнутая неубывающая функция $f\colon [0,\,\varepsilon] \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такая, что $\omega_x(\delta) = f(\delta) + O(\delta)$, при этом f удовлетворяет двум условиям:*

$$f(\theta'(t)t - \theta(t)) = O\left((\theta'(t)t - \theta(t))\frac{t}{\theta(t)}\right), \tag{5.1}$$

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{f(\theta'(t)t - \theta(t))}{t^2}\,dt < +\infty. \tag{5.2}$$

Более того, если f удовлетворяет условиям (5.1) и (5.2) тогда существует локально вогнутая функция $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$, такая, что $\omega_x(\delta) = f(\delta) + O(\delta)$.

Если бы x была плоской точкой, то модуль максимального убывания в ней был бы нулём и в такой точке, как гласит теорема 4.3, функция может быть разрывна. Если в точке есть несколько опорных гиперплоскостей, то хоть в ней модуль максимального убывания не определён, не формально можно считать, что в ней $\theta(t) \approx ct$ (далее будет показано, что из единственности опорной гиперплоскости следует, что $\theta(t) = o(t)$).

Основным же примером точек вогнутости границы области являются точки, в которых граница области оказалась гладкой и все кривизны в которых отделены от нуля. Так все точки свободной границы, рассматриваемые в работах [6] и [7], обладают данным свойством. Этот случай отдельно рассмотрен в параграфе 5.4.

Замечание 5.2. *В условии теоремы функцию $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ можно заменить на локально вогнутую функцию $B\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, не принимающую значение $-\infty$ в окрестности точки x, так как, если B принимает значение $+\infty$ вблизи не плоской собственной точки вогнутости x, то B равна $+\infty$ в окрестности x.*

Замечание 5.3. *Из монотонности функций f и $\theta'(t)t - \theta(t)$ и условия (5.2) следует, что*

$$f(\theta'(t)t - \theta(t)) = o\,(t)\,. \tag{5.2*}$$

Если же потребовать от функции θ, чтобы она не сильно медленно убывала к нулю, а именно следующее условие регулярности (оно выполнено для $\theta(t) = t^p$ при $p > 1$ и $\theta(t) = e^{-1/t}$, но не выполнено для $\theta(t) = \frac{-t}{\log t}$)

$$\exists p > 1 \text{ такое, что в окрестности нуля выполнено } p\theta(t) \leqslant \theta'(t)t, \tag{5.3}$$

тогда условия (5.1) переписывается следующим образом

$$f(\theta'(t)t - \theta(t)) = O\left((\theta'(t)t - \theta(t))\frac{t}{\theta(t)}\right) = O\left(t\frac{\theta'(t)t}{\theta(t)}\right) \gtrsim O\,(t)\,. \tag{5.1$'$}$$

Таким образом в случае, регулярной, в смысле (5.3), функции θ условие (5.2) влечёт условие (5.1) и тем самым является необходимым и достаточным.

Для начала заметим, что модуль непрерывности в точке можно разбить на две составляющие:

$$\begin{aligned}\omega_x(\delta) = \sup\Big\{|B(y) - B(x)|\,\Big|\, y \in \Omega,\ |y-x| \leqslant \delta\Big\} =\\ = \max\Big\{\sup\Big\{B(y) - B(x)\Big|\, y \in \Omega,\ |y-x| \leqslant \delta\Big\},\ \sup\Big\{B(x) - B(y)\Big|\, y \in \Omega,\ |y-x| \leqslant \delta\Big\}\Big\} =\\ = \max\left\{\omega_{+,\,x}(\delta),\ \omega_{-,\,x}(\delta)\right\}.\end{aligned}$$

Назовём $\omega_{-,\,x}$ — модулем полунепрерывности снизу функции B в точке x, а $\omega_{+,\,x}$ — модулем полунепрерывности сверху функции B в точке x.

Замечание 5.4. *Полунепрерывность снизу в точке x эквивалентна, тому что $\omega_{-,\,x}(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, а полунепрерывность сверху в точке x эквивалентна, тому что $\omega_{+,\,x}(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Далее, не умаляя общности, можно считать, что $x = 0$ и $V \subseteq \{y \in \mathbb{R}^d |\, y_d < 0\}$.

Теперь поймём, что нам нужно изучать только поведение модуля полунепрерывности сверху в точке 0, а именно докажем следующую лемму, усиливающую теорему 4.2.

Лемма 5.5. *Пусть 0 — точка вогнутости границы области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, функция $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — локально вогнута, тогда $\omega_{-,0}(\delta) = O(\delta)$.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $B \geqslant 0$ в ε-окрестности нуля. Посмотрим на доказательство теоремы 4.2. Мы получили, что, если

$$z \in \Omega \cap \delta W \cap \left\{ v \in X \big| \, |\varphi(v)| < \delta \right\},$$

где W — абсолютно выпуклая окрестность нуля, а $\varphi \in X'$, отделяет 0 от V, то

$$B(z) \geqslant (1-\delta)(1-3\delta)B(0).$$

Но в случае, когда $X = \mathbb{R}^d$ как условие $z \in \delta W$, так и условие $|\varphi(z)| < \delta$ можно гарантировать условием $|z| \leqslant c\delta$ для достаточно малого $c > 0$. Но тогда мы получаем, что

$$\omega_{-,0}(c\delta) \leqslant B(0) - (1-\delta)(1-3\delta)B(0) = (4\delta - 3\delta^2)B(0) \leqslant 4B(0)\delta = O(c\delta).$$

□

Перейдём к доказательству теоремы 5.1. Теорема 5.1 разбита на 3 случая. Разберём их отдельно.

5.1 Случай 1 теоремы 5.1.

Случай 1 разобран в главе 4, так полунепрерывность снизу доказана в теореме 4.2, а пример не полунепрерывной функции построен в теореме 4.3.

5.2 Случай 2 теоремы 5.1.

Для разбора случая 2 модифицируем доказательство теоремы 4.4, а именно докажем следующую теорему.

Теорема 5.6. *Пусть 0 — собственная точка вогнутости границы $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, и в нуле есть хотя бы две опорные гиперплоскости (к множеству V). Пусть функция $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ локально вогнута. Тогда B липшицева в точке 0.*

Доказательство. После замены функции B на функцию $\widetilde{B}\colon x \mapsto B(Tx) + c$, где T — обратимое линейное преобразование, а c — некоторая константа, можно считать, что окрестность U для которой $\Omega \cap U = U \setminus V$ — это множество $\left\{ y \big| \, |y| \leqslant 3 \right\}$, а также, что $B(x) \geqslant 0$, при $x \in \Omega \cap U$, при этом одна из касательных гиперплоскостей задаётся уравнением $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x) = -x_d$, а другая задаётся уравнением $\psi(x) = 0$, где $\psi(x) = -x_d - x_1$, а так же, что $-e_d \in V$.

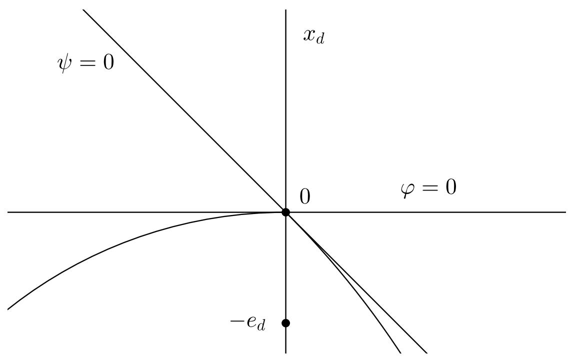

Рис. 13: Случай 2.

В теореме 4.4 для точек вида

$$x \in \Omega \cap \delta W \cap \{z \in X | \varphi(z) \geqslant 0\}$$

получается оценка вида

$$B(x) \leqslant (1+3\delta)\frac{1-\delta}{1-2\delta}B(0) \leqslant (1+10\delta)B(0). \tag{5.4}$$

В нашем случае в качестве W можно взять единичный шар с центром в нуле.

Таким образом для липшицевости осталось оценить функцию в точках вида

$$x \in \Omega \cap \left\{ z \in X \Big| \, |z| < \delta, \, \varphi(z) < 0 \right\}.$$

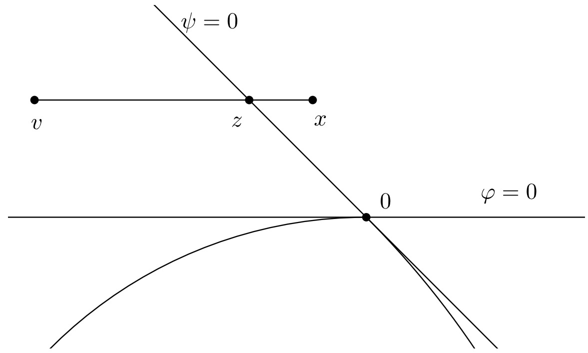

Рис. 14: Случай $\varphi(x) < 0$.

В данном случае пусть $z = x - (x_1 + x_d)e_1$,

$$v = \frac{1}{5\delta}z + \left(-\frac{1}{5\delta} + 1\right)x = x - \frac{1}{5\delta}(x_1 + x_d)e_1.$$

Тогда

$$\psi(z) = \psi(x) - (x_1 + x_d)\psi(e_1) = 0,$$

$|z| \leqslant |x| + |x_1| + |x + d| \leqslant 3\delta$ и $|v| \leqslant \delta + \frac{2\delta}{5\delta} \leqslant \frac{3}{5}$. При этом $\varphi(v) = \varphi(z) = \varphi(x) = -x_d$, то есть, отрезок $[x,\, v]$ лежит в области Ω и $B(v) \geqslant 0$. Заметим так же, что $z = 5\delta v + (1 - 5\delta)x$. Таким образом

$$(1 - 5\delta)B(x) \leqslant (1 - 5\delta)B(x) + 5\delta B(v) \leqslant B(z) \underset{\psi(z)=0}{\overset{5.4}{\leqslant}} (1 + 30\delta)B(0).$$

□

5.3 Случай 3 теоремы 5.1.

В данном случае будем говорить, что Ω стандартного вида, если 0 — не плоская собственная точка вогнутости, в которой существует единственная опорная гиперплоскость $L = \{x \in \mathbb{R}^d |,\, x_d = 0\}$, при этом множество V из определения 3.1 лежит в нижнем полупространстве, то есть, $V \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d |\, x_d < 0\}$.

Непрерывность функции B в данном случае следует из теорем 4.2 и 4.4. Соответственно доказательство случая 3 можно разбить на четыре пункта.

3.1) Найти вогнутую функцию f, для которой $\omega_0(\delta) = f(\delta) + O(\delta)$.

3.2) Показать, что функция f удовлетворяет условиям (5.1) и (5.2).

3.3) Для вогнутой функции f, удовлетворяющей условиям (5.1) и (5.2) построить функцию $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$, для которой $\omega_0(\delta) = f(\delta) + O(\delta)$.

3.4) Показать, что условия (5.1) и (5.2) не влекут липшицевость ни для какого θ.

5.3.1 Разбор пункта 3.1.

Для начала заметим, что если мы найдём несколько функций, таких, что $f\colon\ \omega_0(\delta) = f_1(\delta) + O(\delta) = f_2(\delta) + O(\delta)$, тогда условия (5.1) и (5.2) для них эквивалентны.

$$f_1(\theta'(t)t - \theta(t)) = f_2(\theta'(t)t - \theta(t)) + O(\theta'(t)t - \theta(t)) = O\left((\theta'(t)t - \theta(t))\frac{t}{\theta(t)}\right) + O(\theta'(t)t - \theta(t)) =$$
$$= O\left((\theta'(t)t - \theta(t))\frac{t}{\theta(t)}\right),$$

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{f_1(\theta'(t)t-\theta(t))}{t^2}\,dt = \int\limits_0^\varepsilon \frac{f_2(\theta'(t)t-\theta(t))+O(\theta'(t)t-\theta(t))}{t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \frac{f_2(\theta'(t)t-\theta(t))}{t^2}\,dt + O\left(\int\limits_0^\varepsilon \frac{\theta'(t)t-\theta(t)}{t^2}\,dt\right) = \int\limits_0^\varepsilon \frac{f_2(\theta'(t)t-\theta(t))}{t^2}\,dt + O\left(\frac{\theta(t)}{t}\Big|_0^\varepsilon\right) =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \frac{f_2(\theta'(t)t-\theta(t))}{t^2}\,dt + O\left(\frac{\theta(\varepsilon)}{\varepsilon} - \theta'(0)\right) < +\infty.$$

Следовательно, нам достаточно доказать для одной функции f, такой что $\omega_0(\delta) = f(\delta) + O(\delta)$, что она удовлетворяет условиям (5.1) и (5.2). И тогда любая функция, удовлетворяющая условию $\omega_0(\delta) = f(\delta) + O(\delta)$, будет удовлетворять условиям (5.1) и (5.2). В частности

$$\omega_0(\theta'(t)t-\theta(t)) = O\left(\frac{\theta'(t)t-\theta(t)}{\theta'(t)}\right),$$

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{\omega_0(\theta'(t)t-\theta(t))}{t^2}\,dt < +\infty.$$

Теорема 5.7. *Пусть Ω стандартного вида, а функция $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — локально вогнута. Тогда*

$$\omega_0(\delta) = (B(\delta e_d) - B(0)) + O(\delta).$$

Доказательство. В точке 0 функция B непрерывна, в частности, она ограничена в небольшой окрестности нуля. Пусть, не умаляя общности, в ε-окрестности нуля Ω выглядит как надграфик функции $-W$, а также в этой окрестности выполнено $0 \leqslant B(x) \leqslant M$, для некоторого положительного числа M.

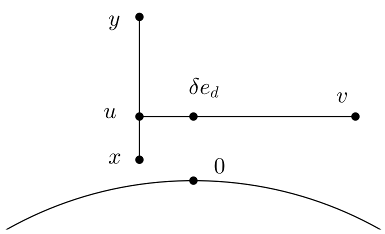

Рис. 15: Рисунок к теореме 5.7.

Пусть $x \in \Omega$, и $|x| \leqslant \delta$, где $\delta < \frac{\varepsilon}{6}$. Пусть точка u задаётся формулой $u = x+(\delta-x_d)e_d = (x_1, \ldots, x_{d-1}, \delta)$, точка y формулой $y = x + \frac{\varepsilon}{2}e_d$, а точка v —

$$v = \frac{\varepsilon}{3\delta}\delta e_d + \left(1 - \frac{\varepsilon}{3\delta}\right)u.$$

Тогда

$$|u| = |x + (\delta - x_d)e_d| \leqslant |x - x_d e_d| + |\delta e_d| \leqslant |x| + \delta \leqslant 2\delta < \varepsilon,$$

$$|y| = \left|x + \frac{\varepsilon}{2}e_d\right| \leqslant |x| + \left|\frac{\varepsilon}{2}e_d\right| \leqslant \delta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

$$|v| = \left|\frac{\varepsilon}{3\delta}\delta e_d + \left(1-\frac{\varepsilon}{3\delta}\right)u\right| \leqslant \left|\frac{\varepsilon}{3\delta}\delta e_d\right| + \left|\left(1-\frac{\varepsilon}{3\delta}\right)u\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2\delta\left(\frac{\varepsilon}{3\delta} - 1\right) < \varepsilon.$$

И соответственно $u \in [x,\, y] \subseteq \Omega$ и $\delta e_d \in [u,\, v] \subseteq \Omega$. Нетрудно видеть, что

$$u = x + (\delta - x_d)e_d = \frac{\delta - x_d}{\frac{\varepsilon}{2}}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}e_d\right) + \frac{\frac{\varepsilon}{2} - \delta + x_d}{\frac{\varepsilon}{2}}x = \frac{\delta - x_d}{\frac{\varepsilon}{2}}y + \frac{\frac{\varepsilon}{2} - \delta + x_d}{\frac{\varepsilon}{2}}x$$

и

$$\delta e_d = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{3\delta}}\left(\frac{\varepsilon}{3\delta}\delta e_d + \left(1 - \frac{\varepsilon}{3\delta}\right)u\right) + \frac{\frac{\varepsilon}{3\delta} - 1}{\frac{\varepsilon}{3\delta}}u = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{3\delta}}v + \frac{\frac{\varepsilon}{3\delta} - 1}{\frac{\varepsilon}{3\delta}}u = \frac{3\delta}{\varepsilon}v + \frac{\varepsilon - 3\delta}{\varepsilon}u.$$

Теперь мы можем написать следующую цепочку неравенств.

$$B(\delta e_d) \geqslant \frac{3\delta}{\varepsilon}B(v) + \frac{\varepsilon-3\delta}{\varepsilon}B(u) \geqslant \frac{\varepsilon-3\delta}{\varepsilon}B(u) \geqslant \frac{\varepsilon-3\delta}{\varepsilon}\left(\frac{\delta - x_d}{\frac{\varepsilon}{2}}B(y) + \frac{\frac{\varepsilon}{2}-\delta+x_d}{\frac{\varepsilon}{2}}B(x)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varepsilon-3\delta}{\varepsilon}\frac{\frac{\varepsilon}{2}-\delta+x_d}{\frac{\varepsilon}{2}}B(x) \geqslant \frac{\varepsilon-3\delta}{\varepsilon}\frac{\frac{\varepsilon}{2}-2\delta}{\frac{\varepsilon}{2}}B(x) = B(x) - \delta B(x)\frac{7\varepsilon-12\delta}{\varepsilon^2} \geqslant B(x) - \delta\frac{7B(x)}{\varepsilon} \geqslant B(x) - \delta\frac{7M}{\varepsilon}.$$

Таким образом мы получили следующее соотношение $(B(\delta e_d) - B(0)) + \frac{7M}{\varepsilon}\delta \geqslant \omega_{+,\,0}(\delta)$. И соответственно

$$B(\delta e_d) - B(0) \leqslant \omega_0(\delta) = \max\{\omega_{+,\,0},\, \omega_{-,\,0}\} \leqslant \omega_{+,\,0} + \omega_{-,\,0} = \omega_{+,\,0} + O(\delta) \leqslant B(\delta e_d) - B(0) + O(\delta).$$

□

Далее мы будем доказывать, что функция $\delta \mapsto B(\delta e_d) - B(0)$ удовлетворяет условиям (5.1) и (5.2), а также для вогнутой не убывающей функции f, удовлетворяющей условиям (5.1) и (5.2), построим локально вогнутую функцию $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такую, что для достаточно малых δ верно равенство $B(\delta e_d) = f(\delta)$.

5.3.2 Модуль убывания вдоль направления, его связь с модулем максимального убывания.

Пусть $y \in S^{d-2}$, тогда модуль убывания в направлении y — это функция $\theta_y(\delta) = W(\delta y)$, $\delta \geqslant 0$. Введём аналоги условий (5.1) и (5.2), для функции θ_y:

$$f(\theta_y'(t)t - \theta_y(t)) = O\left((\theta_y'(t)t - \theta_y(t))\frac{t}{\theta_y(t)}\right), \tag{5.1_y}$$

$$\int\limits_0^{\varepsilon_y} \frac{f(\theta_y'(t)t - \theta_y(t))}{t^2}\,dt < +\infty. \tag{5.2_y}$$

Пункт 3.2 теоремы 5.1 будет разбит на две части

3.2.1) Показать, что функция f удовлетворяет условиям (5.1_y) и (5.2_y) для любого $y \in S^{d-2}$.

3.2.2) Показать, что, если функция f удовлетворяет условиям (5.1_y) и (5.2_y) для любого $y \in S^{d-2}$, тогда f удовлетворяет и условиям (5.1) и (5.2).

В дальнейшем нам понадобится оценивать максимальный модуль убывания и модули убывания вдоль направления через друг друга. В одну сторону $\theta(\delta) = \sup\{\theta_y(\delta)|\, y \in S^{d-2}\}$, то есть, $\theta_y(\delta) \leqslant \theta(\delta)$. Следующая лемма даёт оценку в другую сторону.

Лемма 5.8. *Пусть точки $y_1, \ldots, y_d \in S^{d-2}$ образуют правильный симплекс с центром в нуле. Тогда*

$$\theta\left(\frac{\delta}{d-1}\right) \leqslant \max\{\theta_{y_j}(\delta)|\, j = 1, \ldots, d\}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Так как функция W выпукла,

$$\max\{\theta_{y_j}(\delta)|\, j = 1, \ldots, d\} = \max\{W(\delta y_j)|\, j = 1, \ldots, d\} = \max\{W(y)|\, y \in \operatorname{conv}\{\delta y_1, \ldots, \delta y_d\}\}.$$

Множество $\operatorname{conv}\{\delta y_1, \ldots, \delta y_d\}$ образует правильный симплекс размерности $d-1$ с центром в нуле и радиусом описанной сферы 1 (описанная сфера — S^{d-2}). Тогда радиус вписанной сферы составляет $\frac{1}{d-1}$. Таким образом,

$$\max\{W(y)|\, y \in \operatorname{conv}\{\delta y_1, \ldots, y_d\}\} \geqslant \sup\left\{W(y)|\, |y| \leqslant \frac{1}{d-1}\right\} = \theta\left(\frac{\delta}{d-1}\right).$$

□

Зафиксируем какой-то выбор точек $y_1, \ldots, y_d$. Обозначим через ξ следующую функцию

$$\xi(\delta) = \max\{\theta_{y_j}(\delta)|\, j = 1, \ldots, d\}. \tag{5.6}$$

Таким образом мы получили оценку

$$\xi(\delta) \leqslant \theta(\delta) \leqslant \xi((d-1)\delta). \tag{5.7}$$

Лемма 5.9. *Пусть область Ω стандартного вида и $y \in S^{d-2}$ тогда $\theta_y(\delta) = o(\delta)$.*

Доказательство. Функция θ_y выпукла, неотрицательна и равна в нуле нулю. Соответственно нужно лишь проверить, что у θ_y производная в нуле равна нулю. Если это не так, тогда пусть производная в нуле $\alpha > 0$. Тогда для достаточно малых δ отрезок $[0,\, \delta y - \alpha\delta e_d]$ лежит в Ω. Но тогда функционал, отделяющий отрезок $[0,\, \delta y - \alpha\delta e_d]$ от множества V, задаёт вторую опорную гиперплоскость в точке 0.

□

Следствие 5.10. *Если в точке 0 существует единственная опорная гиперплоскость, тогда $\theta(\delta) = o(\delta)$.*

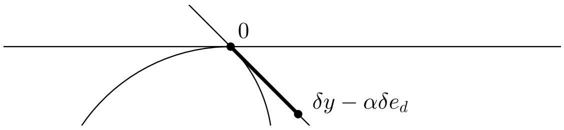

Рис. 16: Рисунок к лемме 5.9.

5.3.3 Минимальная локально вогнутая функция в криволинейном треугольнике.

В данном пункте мы вычислим определённую минимальную локально вогнутую функцию, которая окажется на прямую связана как с получением оценок в пункте 3.2, так и с построением локально вогнутой функции в пункте 3.3, а также будет играть вспомогательную роль в построении примера в пункте 3.4.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\tau\colon [0,\, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ — такая выпуклая, возрастающая функция, что $\tau'(0) = 0$, $\tau'(\varepsilon) < +\infty$. Через $U_{\tau,\,\varepsilon}$ обозначим следущую область

$$U_{\tau,\,\varepsilon} = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\, x_1 \in [0,\, \varepsilon],\, x_2 \geqslant -\tau(x_1),\, x_2 \leqslant \tau'(\varepsilon)(\varepsilon - x_1) - \tau(\varepsilon)\}. \tag{5.8}$$

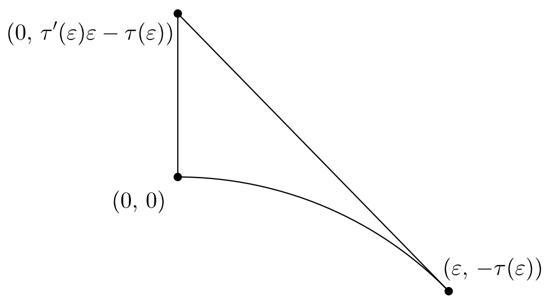

Рис. 17: Область $U_{\tau,\,\varepsilon}$.

Пусть $f\colon [0,\, \tau'(\varepsilon)\varepsilon - \tau(\varepsilon)] \to \mathbb{R}$ — такая вогнутая неубывающая функция, что $f(0) = 0$. Введём следующий класс локально вогнутых функций

$$\Lambda_{\tau,\,\varepsilon,\,f} = \{B\colon U_{\tau,\,\varepsilon} \to \mathbb{R} |\, B \text{ — локально вогнута, } B(0,t) \geqslant f(t),\, B(\varepsilon,\, -\tau(\varepsilon)) \geqslant 0\},$$

а так же $\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}$ — минимальную функцию данного класса, то есть,

$$\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}(x) = \inf\{B(x) |\, B \in \Lambda_{\tau,\,\varepsilon,\,f}\}.$$

Замечание 5.11. *Функция $\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}$ локально вогнута и неотрицательна.*

Если в обозначениях опускается ε, значит подразумевается, что $\varepsilon = 1$.

Через $\tau'_l(u)$ обозначим левую производную τ в точке u, а через $\tau'_r(u)$ — правую. Пусть $x = (x_1,\, x_2) \in U_\tau$ и $x_2 > -\tau(x_1)$, тогда из точки x можно провести единственную касательную к кривой $t \mapsto (t,\, -\tau(t))$, такую, чтобы в точке касания $(u,\, -\tau(u))$ было выполнено $u \geqslant x_1$ (если τ линейна на отрезке $[v,\, w]$, то вместо точки касания может быть целый отрезок касания $[(v,\, -\tau(v)),\, (w,\, -\tau(w))]$, тогда через $(u,\, -\tau(u)$ обозначим правый конец отрезка). Раз это касательная, для её наклона $-a$ выполнено $a \in [\tau'_l(u),\, \tau'_r(u)]$, а значит она пересечёт ось $x_1 = 0$ в точке $(0,\, au - \tau(u))$.

Пусть

$$B_{\tau,\,\varepsilon,\,f}(x_1,\, x_2) = \begin{cases} x_1 \int\limits_u^\varepsilon \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\, ds + \frac{u - x_1}{u} f(au - \tau(u)), & \text{при } (x_1,\, x_2) \in U_{\tau,\,\varepsilon} \setminus \{(0,\, 0)\} \text{ и } x_2 > -\tau(x_1), \\ x_1 \int\limits_{x_1}^\varepsilon \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\, ds, & \text{при } (x_1,\, x_2) \in U_{\tau,\,\varepsilon} \setminus \{(0,\, 0)\} \text{ и } x_2 = -\tau(x_1), \\ 0, & \text{при } (x_1,\, x_2) = (0,\, 0). \end{cases} \tag{5.9}$$

Замечание 5.12. *Пусть $\tau_\varepsilon(t) = \tau\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, тогда, так как аффиные преобразования сохраняют вогнутость,*

$$\mathbb{B}_{\tau_\varepsilon,\,\varepsilon,\,f}(x_1,\, x_2) = \mathbb{B}_{\tau,\,f}\left(\frac{x_1}{\varepsilon},\, x_2\right)$$

и

$$B_{\tau_\varepsilon,\,\varepsilon,\,f}(x_1,\, x_2) = B_{\tau,\,f}\left(\frac{x_1}{\varepsilon},\, x_2\right).$$

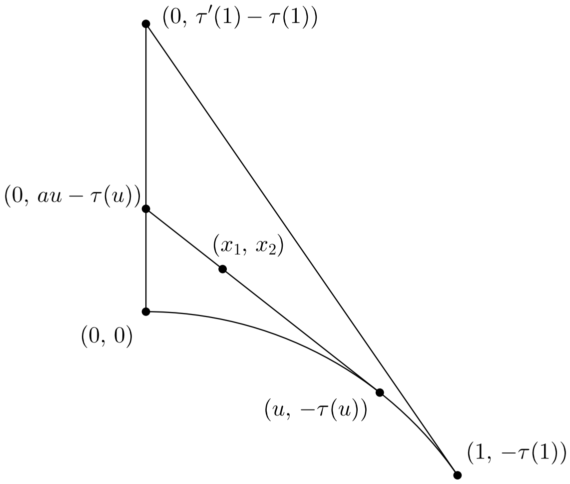

Рис. 18: Рисунок к построению выше, случай касания в точке u.

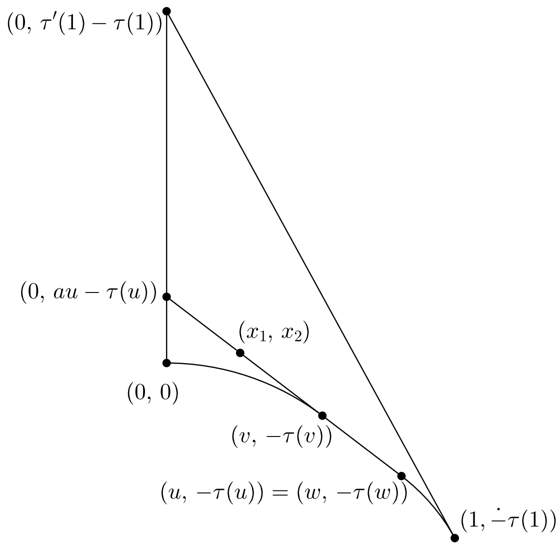

Рис. 19: Рисунок к построению выше, случай касания по отрезку.

В будущем мы докажем, что $\mathbb{B}_{\tau,\, f} = B_{\tau,\, f}$, но перед этим нам необходимо немного изучить функцию $B_{\tau,\, f}$. Из определения функции $B_{\tau,\, f}$ (5.9) видно, что на отрезках касательных соответствующих рисунку 18 функция $B_{\tau,\, f}$ линейна. Давайте поймём, что функция $B_{\tau,\, f}$ линейна и на отрезках касательных соответствующих рисунку 19. Для этого достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 5.13. *Пусть τ линейна на отрезке $[v,\, u]$, пусть так же $t \in [v,\, u]$, тогда*

$$t\int\limits_t^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds = t\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{u-t}{u} f(au-\tau(u)).$$

Доказательство. Функция τ линейна на $[v,\, u]$, а отрезок $[(0,\, au-\tau(u)),\, (u,\, -\tau(u))]$ — касательный, значит внутри отрезка $s \in (v,\, u)$ выполнено $\tau'(s) = a$ и, следовательно,

$$s\tau'(s) - \tau(s) = sa - (\tau(u) - (u-s)a) = au - \tau(u).$$

То есть, имеет место следующая цепочка равенств:

$$t\int\limits_t^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds = t\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + t\int\limits_t^u \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds =$$

$$= t\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + t\int\limits_t^u \frac{f(au-\tau(u))}{s^2}\,ds = t\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + tf(au-\tau(u))\int\limits_t^u \frac{1}{s^2}\,ds =$$

$$= t\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + tf(au-\tau(u))\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) = t\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{u-t}{u}f(au-\tau(u)).$$

□

Также отсюда можно вывести следующее замечание.

Замечание 5.14. *Пусть касательная* $[(0,\, au-\tau(u)),\, (u,\, -\tau(u))]$ *касается нижней границы по отрезку* $[(v,\, -\tau(v)),\, (u,\, -\tau(u))]$ *(возможно* $v = u$*). Тогда для любого числа* $w \in [v,\, u]$ *и любой точки* $(x_1,\, x_2) \in [(0,\, au-\tau(u)),\, (u,\, -\tau(u))]$ *верно равенство*

$$B_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2) = x_1\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{w-x_1}{w}f(aw-\tau(w)).$$

Теорема 5.15. *Функция* $B_{\tau,\,f}$ *является минимальной локально вогнутой функцией класса* $\Lambda_{\tau,\,f}$*, то есть,*

$$\mathbb{B}_{\tau,\,f} = B_{\tau,\,f}.$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что

$$\mathbb{B}_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2) = B_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2).$$

Для этого мы отдельно покажем, что

$$\mathbb{B}_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2) \geqslant B_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2),$$

и

$$\mathbb{B}_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2) \leqslant B_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2).$$

Для первого неравенства надо показать, что для любой функции $B \in \Lambda_{\tau,\,f}$ выполнено неравенство $B(x_1,\, x_2) \geqslant B_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2)$, а для второго неравенства нужно показать, что функция $B_{\tau,\,f}$ — локально вогнута.

Лемма 5.16. *Для любой функции* $B \in \Lambda_{\tau,\,f}$ *выполнено* $B(x_1,\, x_2) \geqslant B_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2)$*.*

Доказательство. Заметим, что

$$B_{\tau,\,f}(0,\, x_2) = f(au-\tau(u)) = f(x_2),$$

а так же

$$B_{\tau,\,f}(1,\, -\tau(1)) = 1\int\limits_1^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{1-1}{1}f(au-\tau(u)) = 0.$$

Так же заметим, что $B_{\tau,\,f}$ линейна на отрезках касательных $[(0,\, au-\tau(u)),\, (u,\, -\tau(u))]$, где $a \in [\tau_l'(u),\, \tau_r'(u)]$. Таким образом нам достаточно доказать, что

$$B(u,\, -\tau(u)) \geqslant B_{\tau,\,f}(u,\, -\tau(u)) = u\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds.$$

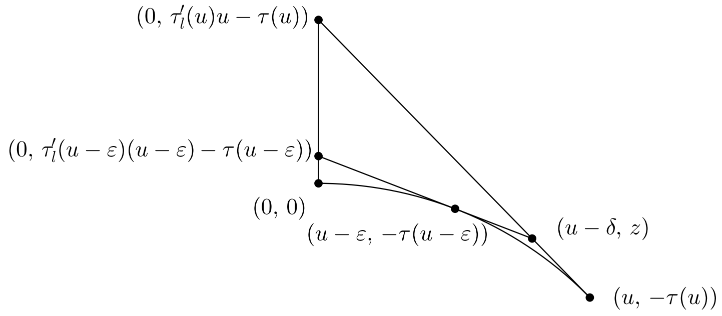

Рис. 20: Рисунок к лемме 5.16.

Пусть $g(u) = B(u,\, -\tau(u))$, $h(u) = f(\tau_l'(u)u - \tau(u))$, δ как на рисунке, тогда $0 \leqslant \delta \leqslant \varepsilon$, h непрерывна слева и

$$g(u-\varepsilon) \geqslant \frac{u-\varepsilon}{u-\delta}B(u-\delta,\, z) + \frac{\varepsilon-\delta}{u-\delta}h(u-\varepsilon) \geqslant \frac{u-\varepsilon}{u-\delta}\left(\frac{u-\delta}{u}g(u) + \frac{\delta}{u}h(u)\right) + \frac{\varepsilon-\delta}{u-\delta}h(u-\varepsilon) =$$
$$= \frac{u-\varepsilon}{u}g(u) + \frac{\varepsilon}{u}h(u) - \frac{\delta}{u}h(u)\left(1 - \frac{u-\varepsilon}{u-\delta}\right) + \frac{\varepsilon-\delta}{u}(h(u-\varepsilon)-h(u)) + \left(\frac{\varepsilon-\delta}{u-\delta} - \frac{\varepsilon-\delta}{u}\right)h(u-\varepsilon) =$$
$$= g(u) - \varepsilon\left(\frac{g(u)}{u} - \frac{h(u)}{u}\right) + o(\varepsilon).$$

Соответственно мы получили

$$g_{l,u}'(u) \leqslant \frac{g(u)}{u} - \frac{h(u)}{u}, \tag{5.10}$$

где $g_{l,u}'(u)$ — левая нижняя производная функции g в точке u. Пусть

$$g_\varepsilon(u) = u\int\limits_u^1 \frac{h(s)}{s^2} - \frac{\varepsilon}{s}\,ds.$$

Из непрерывности слева h следует

$$g_{\varepsilon,\,l}'(u) = \frac{g_\varepsilon(u)}{u} - \frac{h(u)}{u} + \varepsilon. \tag{5.11}$$

Из соотношений (5.10) и (5.11) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $g(u) \geqslant g_\varepsilon(u)$. Но при $\varepsilon \to 0$

$$g_\varepsilon(u) \to u\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds.$$

Тем самым мы получаем

$$g(u) \geqslant u\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds.$$

□

Лемма 5.17. *Функция $B_{\tau,\,f}$ локально вогнута.*

Доказательство. Сперва заметим, что функция $B_{\tau,\,f}$ неотрицательна и в точке $(0,\,0)$ равна нулю. Так как для любого отрезка содержащего точку $(0,\,0)$ и лежащего в области U_τ, точка $(0,\,0)$ является концом отрезка, значит нам достаточно проверить, что функция $B_{\tau,\,f}$ вогнута на области $U_\tau \setminus \{(0,\,0)\}$.

Заметим, что нам достаточно рассматривать только гладкие вне нуля функции f, так как согласно теореме 5 работы [1] для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти гладкую вогнутую функцию f_ε, такую что для $x > 0$ выполнено $f(x) < f_\varepsilon(x) < (1+\varepsilon)f(x)$. Тогда

$$B_{\tau,\,f}(x_1,\,x_2) < B_{\tau,\,f_\varepsilon}(x_1,\,x_2) < (1+\varepsilon)B_{\tau,\,f}(x_1,\,x_2).$$

И как только мы докажем вогнутость функции $B_{\tau,\,f_\varepsilon}$ мы получим и вогнутость функции $B_{\tau,\,f}$ как инфинума вогнутых функций.

Пусть
$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)=\lim_{\delta\searrow 0}\frac{B(x_1+\alpha\delta,\,x_2+\beta\delta)-B(x_1,\,x_2)}{\delta}$$
— производная функции B в точке $(x_1,\,x_2)$ вдоль луча в направлении $\alpha e_1+\beta e_2$ (в отличии от $\frac{\partial B}{\partial(\alpha e_1+\beta e_2)}$ предел берётся только по положительным δ). Для начала вычислим $\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)$.

Утверждение 5.18. *Пусть $(x_1,\,x_2)\in U_\tau\setminus\{(0,\,0)\}$ и для достаточно малого $\delta>0$ верно включение*
$$[(x_1,\,x_2),\,(x_1+\alpha\delta,\,x_2+\beta\delta)]\subseteq U_\tau.$$
Тогда
$$\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)=\alpha\left(\int\limits_u^1\frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{u}f(au-\tau(u))\right)+(\beta+\alpha a)f'(au-\tau(u)),\qquad(5.12)$$
где a и u как на рисунках 18, 19, если $x_2>-\tau(x_1)$, если же $x_2=-\tau(x_1)$, тогда $u=x_1$, если при этом $\beta>0$ и $\alpha\leqslant\frac{-\beta}{\tau_r'(u)}$, тогда $a=\frac{-\beta}{\alpha}$, иначе $a=\tau_r'(u)$.

Доказательство. Для начала заметим, что раз
$$[(x_1,\,x_2),\,(x_1+\alpha\delta,\,x_2+\beta\delta)]\subseteq U_\tau$$
значит при $x_2=\tau(x_1)$ направление $\alpha e_1+\beta e_2$ идёт не ниже нижней касательной, то есть, при $\alpha<0$ выполнено $\beta\geqslant-\alpha\tau_l'(u)$, а при $\alpha>0$ выполнено $\beta\geqslant-\alpha\tau_r'(u)$ (см. Рис. 21).

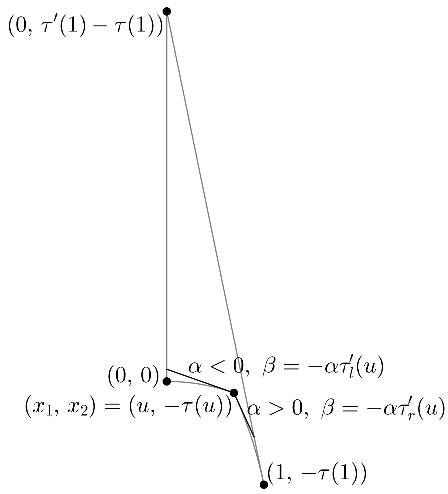

Рис. 21: Нижние касательные.

Таким образом, при $x_2=\tau(x_1)$, $\beta>0$ и $\alpha\leqslant\frac{-\beta}{\tau_r'(u)}$ имеем $a\in[\tau_l'(u),\,\tau_r'(u)]$. То есть, точка $(x_1,\,x_2)$ всегда лежит на отрезке касательной $[(0,\,au-\tau(u)),\,(u,\,-\tau(u))]$. Если же касательная содержащая отрезок $[(0,\,au-\tau(u)),\,(u,\,-\tau(u))]$ касается нижней границы по отрезку, то назовём левый конец отрезка $(u_-,\,-\tau(u_-))$, а правый $(u_+,\,-\tau(u_+))$. Если же касание происходит по точке, тогда $u_-=u_+=u$. Пусть $v\in[u_-,\,u_+]$, тогда
$$au-\tau(u)=av-\tau(v)$$

и

$$\alpha\left(\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{u}f(au-\tau(u))\right)+(\beta+\alpha a)f'(au-\tau(u))-$$
$$-\left(\alpha\left(\int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{v}f(av-\tau(v))\right)+(\beta+\alpha a)f'(av-\tau(v))\right)=$$
$$=\alpha\left(\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{u}f(au-\tau(u))\right)+(\beta+\alpha a)f'(au-\tau(u))-$$
$$-\left(\alpha\left(\int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{v}f(au-\tau(u))\right)+(\beta+\alpha a)f'(au-\tau(u))\right)=$$
$$=-\alpha\int\limits_v^u \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds+\alpha\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)f(au-\tau(u))=-\alpha\int\limits_v^u \frac{f(au-\tau(u))}{s^2}\,ds+\alpha\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)f(au-\tau(u))=0.$$

То есть, нам достаточно доказать, что

$$\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)=\alpha\left(\int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{v}f(av-\tau(v))\right)+(\beta+\alpha a)f'(av-\tau(v)), \tag{5.13}$$

для какого-то $v\in[u_-,\,u_+]$.

Пусть точка $(x_1+\alpha\delta,\,x_2+\beta\delta)$ лежит на касательной $[(0,\,bv-\tau(v)),\,(v,\,-\tau(v))]$, где b и v определены как a и u для точки $(x_1,\,x_2)$. Тогда поймём следующее

Утверждение 5.19. *При $\delta\searrow 0$ выполнено $b\to a$, при этом, если $\beta+\alpha a>0$, тогда $v\to u_+$, если $\beta+\alpha a=0$, тогда $v\to u$, если $\beta+\alpha a<0$, тогда $v\to u_-$.*

Схема доказательства. Не трудно видеть, что во внутренних точках наклон касательной непрерывно зависит от точки, поэтому, если $x_2>-\tau(x_1)$, тогда $b\to a$. Если $x_2=-\tau(x_1)$ и $\beta>0$, $\alpha\leqslant\frac{-\beta}{\tau_r'(u)}$, тогда мы движемся внутрь касательной и $b=a$. В оставшемся случае мы идем в область правее отрезка касательной $[(0,\,\tau_r'(u)u-\tau(u)),\,(u,\,-\tau(u))]$ при этом не трудно видеть, что $b\to\tau_r'(u)=a$.

Из того, что отрезки $[(0,\,au-\tau(u)),\,(u,\,-\tau(u))]$ и $[(0,\,bv-\tau(v)),\,(v,\,-\tau(v))]$ касательные следует, что $a\in[\tau_l'(u),\,\tau_r'(u)]$ и $b\in[\tau_l'(v),\,\tau_r'(v)]$. Раз при этом $b\to a$, значит $\liminf v\geqslant u_-$ и $\limsup v\leqslant u_+$.

Число $\beta+\alpha a$ показывает как мы движемся относительно касательной $[(0,\,au-\tau(u)),\,(u,\,-\tau(u))]$. Если $\beta+\alpha a>0$ тогда мы идём выше касательной и $b>a$, а значит $v\geqslant u_+$. Если $\beta+\alpha a<0$ ниже и $v\leqslant u_-$. Если $\beta+\alpha a=0$, то мы движемся параллельно касательной, при $\alpha\leqslant 0$ или $u<u_+$ мы остаёмся внутри касательной и не трудно видеть, что $v\to u$, если же $\alpha>0$ и $u=u_+$, тогда мы идём в область правее отрезка касательной, а значит $b>a$ и $v\geqslant u_+=u$. □

Соответственно обозначим через w предел v, то есть,

$$w=\begin{cases}u_+, & \text{при } \beta+\alpha a>0,\\ u_-, & \text{при } \beta+\alpha a<0,\\ u, & \text{при } \beta+\alpha a=0.\end{cases} \tag{5.14}$$

Замечание 5.20. *Верно неравенство $x_1\leqslant w$.*

Доказательство. По построению $x_1\leqslant u$, а значит неравенство $x_1>w$ может выполнятся только если $w=u_-\neq u$. То есть, только при $\beta+\alpha a<0$, то есть, когда мы идём в область левее касательной, что возможно только если точка $(x_1,\,x_2)$ не лежит на нижней границы, но тогда $x_1<u_-$. □

Мы будем доказывать, что

$$\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)=\alpha\left(\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{w}f(aw-\tau(w))\right)+(\beta+\alpha a)f'(aw-\tau(w)). \tag{5.15}$$

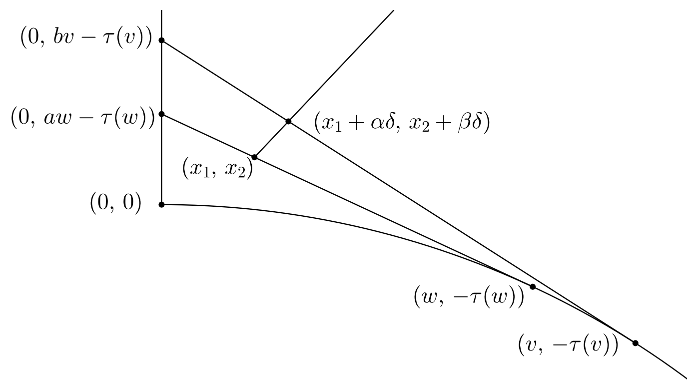

Рис. 22: Направление $\alpha e_1 + \beta e_2$ и точка $(x_1+\alpha\delta,\, x_2+\beta\delta)$.

Сведём случай $w = x_1$ к случаю $w \neq x_1$. Если помимо равенства $w = x_1$ имеет место равенство $x_1+\alpha\delta = v$, тогда мы движемся по отрезку касательной, что означает, что $\beta + \alpha a = 0$, и даёт следующие равенства

$$B_{\tau,f}(x_1,\, x_2) = x_1 \int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\, ds + \frac{w-x_1}{w} f(aw-\tau(w)),$$

$$B_{\tau,f}(x_1+\alpha\delta,\, x_2+\beta\delta) = (x_1+\alpha\delta) \int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\, ds + \frac{w-x_1-\alpha\delta}{w} f(aw-\tau(w)).$$

То есть,

$$B_{\tau,f}(x_1+\alpha\delta,\, x_2+\beta\delta) - B_{\tau,f}(x_1,\, x_2) = \alpha\delta \int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\, ds + \frac{-\alpha\delta}{w} f(aw-\tau(w)) =$$

$$= \delta\left(\alpha\left(\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\, ds - \frac{1}{w} f(aw-\tau(w))\right) + (\beta+\alpha a) f'(aw-\tau(w))\right).$$

Если же $x_1+\alpha\delta \neq v$, то так как и $v \to w$ и $b \to a$, значит

$$B_{\tau,f}(x_1+\alpha\delta,\, x_2+\beta\delta) = (x_1+\alpha\delta) \int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\, ds + \frac{v-x_1-\alpha\delta}{v} f(bv-\tau(v)) \to$$

$$\to x_1 \int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\, ds + \frac{w-x_1}{w} f(aw-\tau(w)), = B_{\tau,f}(x_1,\, x_2)$$

и

$$\frac{\partial_+ B_{\tau,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1+\alpha\delta,\, x_2+\beta\delta) = \alpha\left(\int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\, ds - \frac{1}{v} f(bv-\tau(v))\right) + (\beta+\alpha b) f'(bv-\tau(v)) \to$$

$$\to \alpha\left(\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\, ds - \frac{1}{w} f(aw-\tau(w))\right) + (\beta+\alpha a) f'(aw-\tau(w)).$$

Из чего следует и равенство (5.15).

Далее, не умаляя общности, $w \neq x_1$. Заметим, что, так как

$$(x_1,\, x_2) \in [(0,\, aw-\tau(w)),\, (w,\, -\tau(w))]$$

и

$$(x_1+\alpha\delta,\, x_2+\beta\delta) \in [(0,\, bv-\tau(v)),\, (v,\, -\tau(v))],$$

значит

$$x_2 = -\tau(w) + a(w-x_1)$$

и

$$x_2 + \beta\delta = -\tau(v) + b(v - x_1 - \alpha\delta).$$

Тем самым мы можем выразить δ следующим образом

$$\delta(\beta + \alpha b) = (w - x_1)(b - a) - (v - w)b - (\tau(v) - \tau(w)).$$

Так как τ — выпукла, то у неё существуют производные справа и слева, и они возрастают, а значит

$$\tau(v) - \tau(w) = c(v - w),$$

где

$$c \in [\tau_r'(\min\{v,\, w\}),\, \tau_l'(\max\{v,\, w\})] \subseteq [\min\{a,\, b\},\, \max\{a,\, b\}].$$

То есть,

$$\delta(\beta + \alpha b) = (w - x_1)(b - a) - (v - w)(b - \mathrm{c}).$$

Так как $v \to w$ и $b \to a$, значит $(v - w)(b - \mathrm{c}) = o(b - a)$. Таким образом имеем

$$\begin{aligned}\delta(\beta + \alpha a) = \delta(\beta + \alpha b) - \delta\alpha(b - a) = \delta(\beta + \alpha b) + o(\delta) = (w - x_1)(b - a) - (v - w)(b - \mathrm{c}) + o(\delta) = \\ = (w - x_1)(b - a) + o(b - a) + o(\delta).\end{aligned}$$

И раз $x_1 \neq w$ получаем

$$\delta(\beta + \alpha a) = (w - x_1)(b - a) + o(\delta). \tag{5.16}$$

А так же

$$(v - w)b - (\tau(v) - \tau(w)) = o(\delta), \tag{5.17}$$

и

$$b - a = \frac{\delta(\beta + \alpha a)}{w - x_1} + o(\delta) = O(\delta), \tag{5.18}$$

Так как

$$B_{\tau,\,f}(x_1 + \alpha\delta,\, x_2 + \beta\delta) = (x_1 + \alpha\delta)\int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{v - x_1 - \alpha\delta}{v} f(bv - \tau(v))$$

и

$$B_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2) = x_1\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{w - x_1}{w} f(aw - \tau(w)),$$

значит

$$\begin{aligned}&B_{\tau,\,f}(x_1 + \alpha\delta,\, x_2 + \beta\delta) - B_{\tau,\,f}(x_1,\, x_2) = \\ &= (x_1 + \alpha\delta)\int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{v - x_1 - \alpha\delta}{v} f(bv - \tau(v)) - x_1\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds - \frac{w - x_1}{w} f(aw - \tau(w)) = \\ &= \alpha\delta\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds - \alpha\delta\int\limits_w^v \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds - x_1\int\limits_w^v \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{v - x_1}{v} f(bv - \tau(v)) - \\ &- \alpha\delta\frac{1}{v} f(bv - \tau(v)) - \frac{w - x_1}{w} f(aw - \tau(w)) = \alpha\delta\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds - \alpha\delta\frac{1}{w} f(aw - \tau(w)) + o(\delta) + \\ &+ \left(x_1\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{v}\right) f(aw - \tau(w)) - x_1\int\limits_w^v \frac{f(s\tau'(s) - \tau(s))}{s^2}\,ds\right) + \frac{v - x_1}{v}\left(f(bv - \tau(v)) - f(aw - \tau(w))\right).\end{aligned}$$

Тем самым мы представили разность функции в двух точках как $c\delta + o(\delta)$ плюс ещё два слагаемых. Рассмотрим оставшиеся два слагаемых отдельно. Первое оценивается следующим образом

$$\left|x_1\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)f(aw-\tau(w)) - x_1\int\limits_w^v \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds\right| = \left|x_1\int\limits_w^v \frac{f(aw-\tau(w))-f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds\right| \leqslant$$

$$\overset{\text{из монотонности } f}{\leqslant} \left|x_1\int\limits_w^v \frac{f(aw-\tau(w))-f(bv-\tau(v))}{s^2}\,ds\right| = \left|x_1\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)(f(aw-\tau(w))-f(bv-\tau(v)))\right| \leqslant$$

$$\overset{\text{из вогнутости } f}{\leqslant} \left|x_1\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)\max\{f'(c) \,|\, c\in\{(aw-\tau(w),\, bv-\tau(v))\}\}((aw-\tau(w))-(bv-\tau(v)))\right| =$$

$$= |O(1)o(1)O(1)(w(a-b)-((v-w)b-(\tau(v)-\tau(w))))| \overset{(5.17),\,(5.18)}{=} |O(1)o(1)O(1)(O(\delta)-o(\delta))| = o(\delta). \tag{5.19}$$

А второе следующим

$$\begin{aligned}
&f(bv-\tau(v)) - f(aw-\tau(w)) = \\
&\qquad = f'(aw-\tau(w))((bv-\tau(v))-(aw-\tau(w))) + o((bv-\tau(v))-(aw-\tau(w))) = \\
&= f'(aw-\tau(w))(w(b-a)+((v-w)b-(\tau(v)-\tau(w)))) + o(w(b-a)+((v-w)b-(\tau(v)-\tau(w)))) = \\
&\qquad \overset{(5.17),\,(5.18)}{=} f'(aw-\tau(w))\left(\frac{w}{w-x_1}(w-x_1)(b-a)+o(\delta)\right) + o(O(\delta)+o(\delta)) = \\
&\qquad \overset{5.16}{=} f'(aw-\tau(w))\left(\frac{w}{w-x_1}(\delta(\beta+\alpha a)+o(\delta))+o(\delta)\right) + o(\delta) = \\
&\qquad\qquad = \delta(\beta+\alpha a)\frac{w}{w-x_1}f'(aw-\tau(w)) + o(\delta),
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{v-x_1}{v}(f(bv-\tau(v))-f(aw-\tau(w))) &\overset{5.19,\,(5.14)}{=} \left(\frac{w-x_1}{w}+o(1)\right)\left(\delta(\beta+\alpha a)\frac{w}{w-x_1}f'(aw-\tau(w))+o(\delta)\right) = \\
&= \delta(\beta+\alpha a)f'(aw-\tau(w)) + o(\delta).
\end{aligned}$$

Таким образом мы получили

$$\begin{aligned}
&B_{\tau,f}(x_1+\alpha\delta,\, x_2+\beta\delta) - B_{\tau,f}(x_1,\, x_2) = \\
&\qquad = \alpha\delta\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds - \alpha\delta\frac{1}{w}f(aw-\tau(w)) + \delta(\beta+\alpha a)f'(aw-\tau(w)) + o(\delta)
\end{aligned}$$

□

Замечание 5.21. *В утверждении 5.18 по существу мы не пользовались гладкостью f и для произвольного f мы бы получили*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial_+ B_{\tau,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\, x_2) = \\
&\qquad = \alpha\left(\int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds - \frac{1}{v}f(av-\tau(v))\right) + \begin{cases}(\beta+\alpha a)f'_r(av-\tau(v)), & \text{при } \beta+\alpha a>0,\\ 0, & \text{при } \beta+\alpha a=0,\\ (\beta+\alpha a)f'_l(av-\tau(v)), & \text{при } \beta+\alpha a<0,\end{cases}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

для любого $v\in[u_-,\, u_+]$.

Теперь посмотрим для каких $(x_1,\, x_2)\in U_\tau\setminus\{(0,\,0)\}$ не верно следующее равенство

$$\frac{\partial B_{\tau,f}}{\partial(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\, x_2) = \alpha\left(\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds - \frac{1}{u}f(au-\tau(u))\right) + (\beta+\alpha a)f'(au-\tau(u)).$$

В силу утверждения 5.18, это может быть только в случае, если

$$\frac{\partial_+ B_{\tau,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\, x_2) \neq \frac{\partial_- B_{\tau,f}}{\partial_-(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\, x_2),$$

где

$$\frac{\partial_- B_{\tau,\,f}}{\partial_-(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2) = -\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(-\alpha e_1-\beta e_2)}(x_1,\,x_2).$$

В силу формулы 5.12 это может быть только если для точки $(x_1,\,x_2)$ и направления $\alpha e_1+\beta e_2$ выбираются не такие же a и u, которые выбираются для точки $(x_1,\,x_2)$ и направления $-\alpha e_1-\beta e_2$. Если $(x_1,\,x_2)$ не лежит на нижней границе, тогда числа a и u выбираются не зависимо от значения чисел α и β. Если $(x_1,\,x_2)$ лежит на нижней границы, тогда $u = x_1$ и $a \in [\tau_l'(u),\,\tau_r'(u)]$. Раз при этом осмысленны и $\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)$ и $\frac{\partial_- B_{\tau,\,f}}{\partial_-(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)$, значит $\alpha e_1+\beta e_2$ — это касательное направление. Тогда либо β, либо $-\beta$ меньше нуля, а значит в одном из направлений a выбирается как $\tau_r'(u)$, а в другом $a<\tau_r'(u)$.

Пусть точки $(x_1,\,x_2),\,(y_1,\,y_2) \in U_\tau$, такие, что

$$[(x_1,\,x_2),\,(y_1,\,y_2)] \subseteq U_\tau,$$

Пусть $\alpha = y_1-x_1$, $\beta = y_2-x_2$, тогда, если отрезок $[(x_1,\,x_2),\,(y_1,\,y_2)]$ не касательный, то на нём не может быть таких точек, если он касается по точке, то это может быть только точка касания, если он касается по отрезку, то это может быть только самая правая точка касания, так как левее её на отрезке функция линейна. Пусть, не умаляя общности, $x_1 \leqslant y_1$, а значит и $\alpha \geqslant 0$. Пусть $H\colon [0,\,1]\to\mathbb{R}$ функция заданная следующей формулой

$$H(t) = B(x_1+\alpha t,\,x_2+\beta t).$$

Тогда нам нужно проверить, что H — вогнутая функция. Мы знаем, что у H во всех может быть кроме одной точки $c\in(0,\,1)$ дифференцируема, при этом если такая точка c есть, то в ней существуют $H_l'(c)$ и $H_r'(c)$. Если мы покажем, что $H_l'(c)\geqslant H_r'(c)$, тогда вогнутость H будет следовать из вогнутостей функций $H|_{[0,\,c]}$ и $H|_{[c,\,1]}$. Если такая c существует, тогда, с одной стороны

$$H_l'(c) = \frac{\partial_- B_{\tau,\,f}}{\partial_-(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1+\alpha c,\,x_2+\beta c) = \alpha\left(\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds - \frac{1}{u}f(au-\tau(u))\right) + (\beta+\alpha a)f'(au-\tau(u)),$$

для некоторых u и $a = \frac{-\beta}{\alpha}$, с другой стороны

$$\begin{aligned}H_r'(c) &= \frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1+\alpha c,\,x_2+\beta c) = \\ &= \alpha\left(\int\limits_u^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds - \frac{1}{u}f(\tau_r'(u)u-\tau(u))\right) + (\beta+\alpha\tau_r'(u))f'(\tau_r'(u)u-\tau(u)).\end{aligned}$$

Значит $\beta+\alpha a = 0$ и

$$\begin{aligned}H_r'(c)-H_l'(c) &= \alpha\left(\frac{1}{u}f(au-\tau(u)) - \frac{1}{u}f(\tau_r'(u)u-\tau(u))\right) + \alpha(\tau_r'(u)-a)f'(\tau_r'(u)u-\tau(u)) = \\ &\overset{\substack{\text{для некоторого}\\ t\in[au-\tau(u),\,\tau_r'(u)u-\tau(u)]}}{=} \alpha\frac{1}{u}f'(t)((au-\tau(u))-(\tau_r'(u)u-\tau(u))) + \alpha(\tau_r'(u)-a)f'(\tau_r'(u)u-\tau(u)) = \\ &= \alpha(\tau_r'(u)-a)(f'(\tau_r'(u)u-\tau(u))-f'(t)) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Тепеть, не умаляя общности, H поточечно дифференцируема. Проверим, что H непрерывно дифференцируема. Для этого достаточно проверить, что H_l' непрерывна слева, а H_r' непрерывна справа. Проверим, что H_r' непрерывна справа (то что H_l' непрерывна слева получается аналогично). Пусть числа a, u и b, v выбираются, как в утверждении 5.18, по точкам $(x_1+\alpha t,\,x_2+\beta t)$ и $(x_1+\alpha(t+\delta),\,x_2+\beta(t+\delta))$ соответственно, а число w задаётся формулой (5.14), тогда по утверждению 5.19 мы знаем, что при $\delta\searrow 0$ $v\to w$, $b\to a$. И мы получаем

$$\begin{aligned}H_r'(t+\delta) &= \frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1+\alpha(t+\delta),\,x_2+\beta(t+\delta)) = \\ &= \alpha\left(\int\limits_v^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds - \frac{1}{v}f(bv-\tau(v))\right) + (\beta+\alpha b)f'(bv-\tau(v)) \xrightarrow[\delta\searrow 0]{} \\ \to \alpha&\left(\int\limits_w^1 \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds - \frac{1}{w}f(aw-\tau(w))\right) + (\beta+\alpha a)f'(aw-\tau(w)) = \frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1+\alpha t,\,x_2+\beta t) = \\ &= H_r'(t).\end{aligned}$$

Нам осталось проверить, что H' монотонно не возрастает. Если отрезок $[(x_1,\,x_2),\,(y_1,\,y_2)]$ — касательный, тогда пусть точка $(x_1+\alpha c,\,x_2+\beta c)$ — самая правая точка касания. Тогда $H|_{[0,\,c]}$ — линейна, а значит нам достаточно проверить, что H' монотонно не возрастает на отрезке $[c,\,1]$. Соответственно можно считать, что, не умаляя общности, отрезок $[(x_1,\,x_2),\,(y_1,\,y_2)]$ пересекается с нижней границей максимум по одному из концов. И в этом случае нам достаточно проверить, что внутри отрезка существует $(H'_r)'_r$ и она не положительна. Последнее утверждение следует из следующей леммы.

Лемма 5.22. *Пусть* $(x_1,\,x_2)\in U_\tau\setminus\{0,\,0\}$*, числа* a *и* u *выбираются как в утверждении 5.18, а число* w *задаётся формулой* (5.14). *Пусть так же* $x_1\neq w$*, тогда*

$$\frac{\partial_+}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)=\frac{w(\beta+\alpha a)^2}{w-x_1}f''(aw-\tau(w)).$$

Доказательство. Пусть v и b выбираются по точке $(x_1+\alpha\delta,\,x_2+\beta\delta)$, как в утверждении 5.18. Тогда по утверждению 5.19 при $\delta\searrow 0$ $v\to w$ и $b\to a$.

Мы знаем, что

$$\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)=\alpha\left(\int\limits_w^1\frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{w}f(aw-\tau(w))\right)+(\beta+\alpha a)f'(aw-\tau(w)).$$

и

$$\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1+\alpha\delta,\,x_2+\beta\delta)=\alpha\left(\int\limits_v^1\frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{v}f(bv-\tau(v))\right)+(\beta+\alpha b)f'(bv-\tau(v)).$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1+\alpha\delta,\,x_2+\beta\delta)-\frac{\partial_+ B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)=\\
&\qquad=\alpha\left(\int\limits_v^1\frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{v}f(bv-\tau(v))\right)+(\beta+\alpha b)f'(bv-\tau(v))-\\
&\qquad-\alpha\left(\int\limits_w^1\frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds-\frac{1}{w}f(aw-\tau(w))\right)+(\beta+\alpha a)f'(aw-\tau(w))=\\
&=\left(-\alpha\int\limits_w^v\frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds+\alpha\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)f(aw-\tau(w))\right)-\frac{\alpha}{v}(f(bv-\tau(v))-f(aw-\tau(w)))+\\
&\qquad+(\beta+\alpha a)(f'(bv-\tau(v))-f'(aw-\tau(w)))+\alpha(b-a)f'(bv-\tau(v)).
\end{aligned}$$

Таким образом мы разбили разность на четыре слагаемых, оценим их по отдельности.

Анологично вычислению 5.19 получаем

$$\left(-\alpha\int\limits_w^v\frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds+\alpha\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{v}\right)f(aw-\tau(w))\right)=o(\delta).$$

Анологично вычислению 5.20 получаем

$$f(bv-\tau(v))-f(aw-\tau(w))=\delta(\beta+\alpha a)\frac{w}{w-x_1}f'(aw-\tau(w))+o(\delta),$$

то есть,

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha}{v}(f(bv-\tau(v))-f(aw-\tau(w)))&\overset{5.19,(5.14)}{=}\left(-\frac{\alpha}{w}+o(1)\right)\left(\delta(\beta+\alpha a)\frac{w}{w-x_1}f'(aw-\tau(w))+o(\delta)\right)=\\
&=-\delta(\beta+\alpha a)\frac{\alpha}{w-x_1}f'(aw-\tau(w))+o(\delta).
\end{aligned}$$

Анологично вычислению 5.20 получаем

$$f'(bv-\tau(v))-f'(aw-\tau(w))=\delta(\beta+\alpha a)\frac{w}{w-x_1}f''(aw-\tau(w))+o(\delta),$$

то есть,

$$(\beta+\alpha a)(f(bv-\tau(v))-f(aw-\tau(w)))=\delta(\beta+\alpha a)^2\frac{w}{w-x_1}f''(aw-\tau(w))+o(\delta).$$

Осталось оценить последнее слагаемое

$$\alpha(b-a)f'(bv-\tau(v))\overset{(5.18),\,(5.19),\,(5.14)}{=}\alpha\left(\frac{\delta(\beta+\alpha a)}{w-x_1}+o(\delta)\right)(f'(aw-\tau(w))+o(1))=$$
$$=\alpha\frac{\delta(\beta+\alpha a)}{w-x_1}f'(aw-\tau(w))+o(\delta).$$

Таким образом мы получаем, что

$$\frac{\partial_+B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1+\alpha\delta,\,x_2+\beta\delta)-\frac{\partial_+B_{\tau,\,f}}{\partial_+(\alpha e_1+\beta e_2)}(x_1,\,x_2)=$$
$$=o(\delta)-\left(\delta(\beta+\alpha a)\frac{\alpha}{w-x_1}f'(aw-\tau(w))+o(\delta)\right)+\left(\delta(\beta+\alpha a)^2\frac{w}{w-x_1}f''(aw-\tau(w))+o(\delta)\right)+$$
$$+\left(\alpha\frac{\delta(\beta+\alpha a)}{w-x_1}f'(aw-\tau(w))+o(\delta)\right)=\delta(\beta+\alpha a)^2\frac{w}{w-x_1}f''(aw-\tau(w))+o(\delta).$$

□

□

□

Утверждение 5.23. *Для функции $\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}$ верно равенство*

$$\frac{\partial_+\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_+e_1}(0,\,0)=\sup\left\{\frac{\partial_+\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_+e_1}(x_1,\,x_2)\,\middle|\,(x_1,\,x_2)\in U_{\tau,\,\varepsilon}\right\}.$$

Доказательство. Из локальной вогнутости функции $\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}$ следует равенство

$$\frac{\partial_+\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_+e_1}(0,\,0)=\sup\left\{\frac{\partial_+\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_+e_1}(x_1,\,0)\,\middle|\,(x_1,\,0)\in U_{\tau,\,\varepsilon}\right\}.$$

С другой стороны, так как функция $\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}$ линейна вдоль отрезков касательных, то из вогнутости следует, что величина $\frac{\partial_+\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_+e_1}$ постоянна внутри касательных и может лишь падать на концах. □

Условия аналогичные (5.1) и (5.2) для τ назовём (5.1_τ) и (5.2_τ).

$$f(\tau'(t)t-\tau(t))=O\left((\tau'(t)t-\tau(t))\frac{t}{\tau(t)}\right),\tag{5.1_τ}$$

$$\int\limits_0^\delta\frac{f(\tau'(t)t-\tau(t))}{t^2}\,dt<+\infty.\tag{5.2_τ}$$

Замечание 5.24. *Условия (5.1_τ) и (5.2_τ) — это условия на поведение функции f в нуле, в частности условие (5.2_τ) не зависит от выбора малого δ. А при выборе различных ε_1 и ε_2 функции $\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon_1,\,f}$ и $\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon_2,\,f}$ отличаются на линейную*

$$\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon_2,\,f}(x_1,\,x_2)-\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon_1,\,f}(x_1,\,x_2)=x_1\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{f(\tau'(s)s-\tau(s))}{s^2}\,ds.$$

Утверждение 5.25. *Для функции $\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}$ равенство*

$$\frac{\partial_+\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_+e_1}(0,\,0)<+\infty$$

верно тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет условиям (5.1_τ) и (5.2_τ).

Доказательство. Пусть в точке t функция τ дифференцируема, тогда касательная к нижней границы области U_τ в точке $(t,\,-\tau(t))$ пересекает ось $x_1 = 0$ в точке $(0,\,\tau'(t)t - \tau(t))$, а ость $x_2 = 0$ в точке $\left(\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)},\,0\right)$. Тогда для функции $\mathbb{B}_{\tau,\,f}$ равенство

$$\frac{\partial_+\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_+ e_1}(0,\,0) < +\infty$$

верно тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}\left(\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)},\,0\right) = O\left(\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)}\right).$$

Но

$$\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}\left(\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)},\,0\right) = \frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)}\int\limits_t^\varepsilon \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{t-\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)}}{t} f(\tau'(t)t-\tau(t)) =$$
$$= \frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)}\int\limits_t^\varepsilon \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds + \frac{\tau(t)}{\tau'(t)t} f(\tau'(t)t-\tau(t)).$$

Оба слагаемых неотрицательны, а значит мы получаем, что равенство

$$\mathbb{B}_{\tau,\,\varepsilon,\,f}\left(\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)},\,0\right) = O\left(\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)}\right)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие два равенства

$$\frac{\tau(t)}{\tau'(t)t} f(\tau'(t)t-\tau(t)) = O\left(\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)}\right)$$

и

$$\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)}\int\limits_t^\varepsilon \frac{f(s\tau'(s)-\tau(s))}{s^2}\,ds = O\left(\frac{\tau'(t)t-\tau(t)}{\tau'(t)}\right)$$

Но первое равенство эквивалентно условию (5.1_τ), а второе равенство эквивалентно условию (5.2_τ). $\square$

5.3.4 Разбор пункта 3.2.1.

Пусть Ω стадартного вида, функция $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ локально вогнула и не липшицева в нуле. Пусть число $\varepsilon > 0$ достаточно маленькое, чтобы в ε окрестности нуля область Ω выглядела как надграфик вогнутой функции $-W$ и функция B ограничена снизу. Мы хотим показать, что функция $f(t) = B(te_d) - B(0)$ удовлетворяет условиям (5.1_y) и (5.2_y) для любого $y \in S^{d-2}$. Заметим, что если B не липшицева в нуле, то, в силу теоремы 5.7, функция f также не липшицева в нуле. Но так как f вогнута и непрерывна в нуле, это значит, что в небольшой окрестности нуля f возрастает. Пусть, не умаляя общности, f возрастает в ε окрестности нуля.

Зафиксируем y. Если в окрестности нуля $\theta_y = 0$, то условия (5.1_y) и (5.2_y) эквивалентны тому, что $f(0) = 0$, что заведомо выполнено. Пусть $\theta_y \neq 0$ в окрестности нуля. Пусть тогда $\delta > 0$ точка, в которой функция θ_y дифференцируема при этом δ достаточно мало, чтобы весь криволинейный треугольник

$$\widetilde{U} = \{\alpha y + \beta e_d \,|\, \alpha \in [0,\,\delta],\, \beta \geqslant -\theta_y(\alpha),\, \beta \leqslant \theta_y'(\delta)(\delta - x_1) - \theta_y(\delta)\}$$

лежал в ε окрестности нуля. Тогда на области $U_{\theta_y,\,\delta}$ (см. формулу (5.8) или Рис. 17) есть следующая вогнутая функция

$$\widetilde{B}(x_1,\,x_2) = B\left(x_1 y + x_2 e_d\right) - B(0) - \frac{x_1}{\delta}(B(\delta y - \theta_y(\delta)e_d) - B(0)).$$

Эта функция удовлетворяет следующим условиям

$$1)\widetilde{B}(0,\,t) = B\left(te_d\right) - B(0) = f(t),$$

$$1)\widetilde{B}(0,\,0) = f(0) = 0,$$

$$3)\widetilde{B}(\delta,\,-\theta_y(\delta)) = B\left(\delta y - \theta_y(\delta)e_d\right) - B(0) - (B(\delta y - \theta_y(\delta)e_d) - B(0)) = 0.$$

То есть, $\widetilde{B} \geqslant \mathbb{B}_{\theta_y,\,\delta,\,f}$, а раз при этом $\widetilde{B}(0,\,0) = 0 = \mathbb{B}_{\theta_y,\,\delta,\,f}(0,\,0)$, значит

$$\frac{\partial_+\widetilde{B}}{\partial_+ e_1}(0,\,0) \geqslant \frac{\partial_+\mathbb{B}_{\theta_y,\,\delta,\,f}}{\partial_+ e_1}(0,\,0).$$

Но

$$\frac{\partial_+\widetilde{B}}{\partial_+ e_1}(0,\,0) = \frac{\partial_+ B}{\partial_+ y}(0) - \frac{1}{\delta}(B(\delta y - \theta_y(\delta)e_d) - B(0)).$$

В свою очередь $\frac{\partial_+ B}{\partial_+ y}(0) < +\infty$, так как интервал $(-\varepsilon y,\,\varepsilon y)$ лежит в области. Значит f удовлетворяет условиям (5.1_τ) и (5.2_τ), но в нашем случае они совпадают с условиями (5.1_y) и (5.2_y).

5.3.5 Разбор пункта 3.2.2.

В данном пункте мы хотим показать, что если вогнутая функция f удовлетворяет условиям (5.1_y) и (5.2_y) для любого $y \in S^{d-2}$, тогда f удовлетворяет и условиям (5.1) и (5.2).

Вспомним функцию ξ заданную формулой (5.6). Покажем, что из условий (5.1_y) и (5.2_y) для $y_1, \ldots,\, y_d$ следуют аналогичные условия для функции ξ. То есть, следующие условия

$$f(\xi'(t)t - \xi(t)) = O\left((\xi'(t)t - \xi(t))\frac{t}{\xi(t)}\right), \tag{5.22}$$

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{f(\xi'(t)t - \xi(t))}{t^2}\,dt < +\infty. \tag{5.23}$$

Раз мы выбрали конечное число y_j то мы можем считать, что условия (5.1_y) и (5.2_y) равномерны. То есть, существуют ε, $C > 0$, такие, что

$$f(\theta'_{y_j}(t)t - \theta_{y_j}(t)) \leqslant C\left((\theta'_{y_j}(t)t - \theta_{y_j}(t))\frac{t}{\theta_{y_j}(t)}\right), \qquad \forall t < \varepsilon,\ j = 1, \ldots,\, d,$$

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{f(\theta'_{y_j}(t)t - \theta_{y_j}(t))}{t^2}\,dt < +\infty.$$

Лемма 5.26. *Пусть $\zeta_1,\, \zeta_2\colon [a-\varepsilon,\, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}$ — выпуклые функции. Пусть при этом $\zeta_1 \geqslant \zeta_2$, $\zeta_1(a) = \zeta_2(a)$ и ζ_1 дифференцируема в точке a. Тогда ζ_2 дифференцируема в точке a и $\zeta'_1(a) = \zeta'_2(a)$.*

Доказательство. Раз $\zeta_1 \geqslant \zeta_2$ и $\zeta_1(a) = \zeta_2(a)$, значит $\zeta'_1(a) \geqslant \zeta'_{2r}(a)$ и $\zeta'_1(a) \leqslant \zeta'_{2l}(a)$. То есть, $\zeta'_{2r}(a) \leqslant \zeta'_{2l}(a)$. Но, так как ζ_2 — выпуклая функция, значит $\zeta'_{2r}(a) \geqslant \zeta'_{2l}(a)$. Это возможно только если все неравенства обращаются в равенства. Таким образом $\zeta'_1(a) = \zeta'_2(a)$. ☐

Пусть теперь ξ дифференцируема в точке $t < \varepsilon$, тогда существует $j = j(t)$ такой, что $\xi(t) = \theta_{y_j}(t)$, а значит и $\xi'(t) = \theta'_{y_j}(t)$, тогда

$$f(\xi'(t)t - \xi(t)) = f(\theta'_{y_j}(t)t - \theta_{y_j}(t)) \leqslant C\left((\theta'_{y_j}(t)t - \theta_{y_j}(t))\frac{t}{\theta_{y_j}(t)}\right) = C\left((\xi'(t)t - \xi(t))\frac{t}{\xi(t)}\right).$$

С другой стороны

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{f(\xi'(t)t - \xi(t))}{t^2}\,dt = \int\limits_0^\varepsilon \frac{f(\theta'_{y_{j(t)}}(t)t - \theta_{y_{j(t)}}(t))}{t^2}\,dt \leqslant \int\limits_0^\varepsilon \sum_{j=1}^d \frac{f(\theta'_{y_j}(t)t - \theta_{y_j}(t))}{t^2}\,dt < +\infty.$$

Осталось показать, что если функция f удовлетворяет условиям (5.22) и (5.23), тогда она удовлетворяет и условиям (5.1) и (5.2). Это будет следовать из соотношения (5.7) и следующей леммы.

Лемма 5.27. *Пусть $\tau_1,\, \tau_2\colon [0,\,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ — выпуклые не отрицательные, возрастающие функции, такие, что $\tau'_1(0) = \tau'_2(0) = 0$. Пусть существуют такие константы c, $C > 0$, что*

$$\tau_2(ct) \leqslant \tau_1(t) \leqslant \tau_2(Ct). \tag{5.24}$$

Тогда вогнутая функция f удовлетворяет условиям (5.1_τ) и (5.2_τ) для функции τ_1, тогда и только тога, когда она удовлетворяет условиям (5.1_τ) и (5.2_τ) для функции τ_2.

Доказательство. Условия (5.1_τ) и (5.2_τ) эквивалентны тому, что

$$\frac{\partial_+ \mathbb{B}_{\tau,\,\delta,\,f}}{\partial_+ e_1}(0,\,0) < +\infty.$$

Не трудно видеть, что условия (5.1_τ) и (5.2_τ) в некотором смысле однородны, то есть, для положительных констант c, C и достаточно малого δ верно

$$\frac{\partial_+ \mathbb{B}_{\tau(c\_),\,\delta,\,f}}{\partial_+ e_1}(0,\,0) < +\infty \iff \frac{\partial_+ \mathbb{B}_{\tau(C\_),\,\delta,\,f}}{\partial_+ e_1}(0,\,0) < +\infty.$$

С другой стороны можно заметить монотонность условий (5.1_τ) и (5.2_τ) по τ. Если $\tau_1 \geqslant \tau_2$, тогда для достаточно малого $u < \delta$ верно включение

$$\Lambda_{\tau_2,\,u,\,f} \subseteq \Lambda_{\tau_1,\,\delta,\,f},$$

а значит

$$\mathbb{B}_{\tau_1,\,\delta,\,f}|_{\Lambda_{\tau_2,\,u,\,f}} \in \Lambda_{\tau_2,\,u,\,f}.$$

Таким образом

$$\frac{\partial_+ \mathbb{B}_{\tau_2,\,u,\,f}}{\partial_+ e_1}(0,\,0) \leqslant \frac{\partial_+ \mathbb{B}_{\tau_1,\,\delta,\,f}}{\partial_+ e_1}(0,\,0).$$

От сюда видно, что условие (5.24) влечёт эквивалентность условий (5.1_τ) и (5.2_τ) для функций τ_1 и τ_2 (условия для τ_2 эквивалентны условиям для $\tau_2(C\_)$, что влечёт условия для τ_1, что влечёт условия для $\tau_2(c\_)$, что эквивалентно условиям для τ_2). □

5.3.6 Разбор случая 3.3.

В данном пункте нам дана функция f удовлетворяющая условиям (5.1) и (5.2). Мы хотим построить такую локально вогнутую функцию $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$, что для достаточно малых δ верно равенство $f(\delta) = B(\delta e_d)$.

Мы знаем, что

$$\frac{\partial_+ \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_+ e_1}(0,\,0) < +\infty.$$

Пусть $\delta < \varepsilon$, в точке δ функция θ дифференцируема и $\theta'(\delta) < \theta'_l(\varepsilon)$. Тогда касательная из точки δ внутренняя для области $U_{\theta,\,\varepsilon}$.

$$V_{\theta,\,\delta} = \{(x_1,\,x_2) \in \mathbb{R}^2 |\, \text{либо } x_1 \geqslant \delta,\ \text{либо при } x_1 \in [0,\,\delta) \text{либо } x_2 \leqslant -\tau\delta,\ \text{либо } x_2 \geqslant \tau'(\delta)(\delta - x_1) - \tau(\delta)\}. \tag{5.25}$$

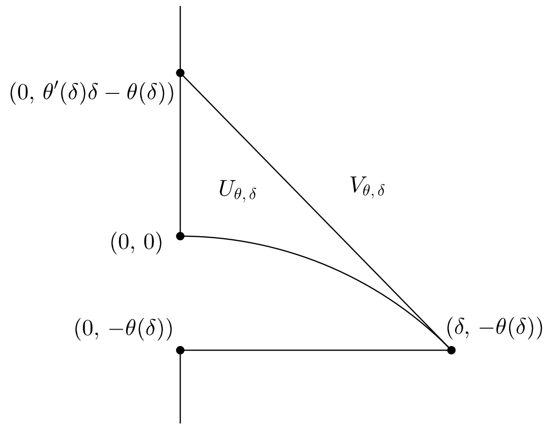

Рис. 23: Области $V_{\theta,\,\delta}$ и $U_{\theta,\,\delta}$.

Утверждение 5.28. *Пусть функция* $T(x_1,\,x_2) = ax_1 + bx_2$ *такая, что* $T(\delta,\,-\theta(\delta)) = \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}(\delta,\,-\theta(\delta))$ *и* $T(0,\,\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)) = f(\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta))$. *Пусть так же*

$$a \leqslant \frac{\partial_- \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_- e_1}\left(\frac{\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)}{\theta'(\delta)},\,0\right).$$

Тогда функция

$$\widetilde{B}(x_1,\,x_2) = \begin{cases} \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}(x_1,\,x_2), & \text{при } (x_1,\,x_2) \in U_{\theta,\,\delta}, \\ T(x_1,\,x_2), & \text{при } (x_1,\,x_2) \in V_{\theta,\,\delta}, \end{cases}$$

локально вогнута.

Доказательство. Функция $\widetilde{B}$ — склейка двух локально вогнутых функций по отрезку линейности, на котором они совпадают. Соответственно вогнутость склейки нужно проверять на новых отрезках, то есть, отрезках не лежащих ни в $U_{\theta,\,\delta}$, ни в $V_{\theta,\,\delta}$. Это отрезки, пересекающие отрезок касательной

$$[(0,\, \theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)),\, (\delta,\, -\theta(\delta))].$$

Пусть $[(x_1,\, x_2),\, (y_1,\, y_2)]$ — такой отрезок. Пусть, не умаляя общности, $(x_1,\, x_2) \in U_{\theta,\,\delta}$ и $(y_1,\, y_2) \in V_{\theta,\,\delta}$. Он разбивается на две части

$$[(x_1,\, x_2),\, (z_1,\, z_2)] \in U_{\theta,\,\delta}$$

и

$$[(z_1,\, z_2),\, (y_1,\, y_2)] \in V_{\theta,\,\delta},$$

где

$$\{(z_1,\, z_2)\} = [(x_1,\, x_2),\, (y_1,\, y_2)] \cap [(0,\, \theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)),\, (\delta,\, -\theta(\delta))].$$

На первом отрезке функция $\widetilde{B}$ вогнута, так как она локально вогнута на $U_{\tau,\,\delta}$, а на втором так как она вогнута на $V_{\tau,\,\delta}$. Пусть $\alpha = y_1 - x_1$, а $\beta = y_2 - x_2$. Тогда для проверки локальной вогнутости функции $\widetilde{B}$ нам осталось установить, что

$$\frac{\partial_+ T}{\partial_+(\alpha e_1 + \beta e_2)}(z_1,\, z_2) \leqslant \frac{\partial_- \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_-(\alpha e_1 + \beta e_2)}(z_1,\, z_2).$$

Так как отрезок $[(x_1,\, x_2),\, (y_1,\, y_2)]$ пересекает касательный отрезок $[(0,\, \theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)),\, (\delta,\, -\theta(\delta))]$ и при этом $(x_1,\, x_2) \in U_{\theta,\,\delta}$, а $(y_1,\, y_2) \in V_{\theta,\,\delta}$, значит $\beta + \alpha\theta'(\delta) > 0$. Раз точка $(z_1,\, z_2)$ лежит на касательном отрезке

$$[(0,\, \theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)),\, (\delta,\, -\theta(\delta))],$$

а точка $\left(\frac{\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)}{\theta'(\delta)},\, 0\right)$ внутренняя как для этого отрезка, так и для области $U_{\theta,\,\varepsilon}$, то из локальной вогнутости функции $\mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}$ и того, что она линейна вдоль этого отрезка следует, что

$$\frac{\partial_- \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_-(\alpha e_1 + \beta e_2)}\left(\frac{\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)}{\theta'(\delta)},\, 0\right) \leqslant \frac{\partial_- \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_-(\alpha e_1 + \beta e_2)}(z_1,\, z_2)$$

(если точка $(z_1,\, z_2)$ внутренняя, тогда было бы равенство). С другой стороны

$$\frac{\partial_+ T}{\partial_+(\alpha e_1 + \beta e_2)}(z_1,\, z_2) = \alpha a + \beta b = \frac{\partial T}{\partial(\alpha e_1 + \beta e_2)}\left(\frac{\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)}{\theta'(\delta)},\, 0\right).$$

То есть, нам достаточно показать, что для $\beta + \alpha\theta'(\delta) \geqslant 0$ верно неравенство

$$\frac{\partial T}{\partial(\alpha e_1 + \beta e_2)}\left(\frac{\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)}{\theta'(\delta)},\, 0\right) \leqslant \frac{\partial_- \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_-(\alpha e_1 + \beta e_2)}\left(\frac{\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)}{\theta'(\delta)},\, 0\right).$$

Из формулы (5.21) видно, что нам нужно сравнить две линейные функции (от α и β) в полуплоскости $\beta + \alpha\theta'(\delta) \geqslant 0$. При этом они равны на прямой $\beta + \alpha\theta'(\delta) = 0$ (так как T и $\mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}$ совпадают на общем отрезке линейности). Таким образом, нам достаточно сравнить их в точке $\beta = 0$, $\alpha = 1$. Но по условию

$$\frac{\partial T}{\partial e_1}\left(\frac{\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)}{\theta'(\delta)},\, 0\right) = a \leqslant \frac{\partial_- \mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}}{\partial_- e_1}\left(\frac{\theta'(\delta)\delta - \theta(\delta)}{\theta'(\delta)},\, 0\right).$$

□

Замечание 5.29. *Как и для функции $\mathbb{B}_{\theta,\,\varepsilon,\,f}$ (смотри утверждение 5.23), для функции $\widetilde{B}$ верно равенство*

$$\frac{\partial_+ \widetilde{B}}{\partial_+ e_1}(0,\, 0) = \sup\left\{\frac{\partial_+ \widetilde{B}}{\partial_+ e_1}(x_1,\, x_2)\,\middle|\, (x_1,\, x_2) \in U_{\tau,\,\delta} \cup V_{\tau,\,\delta}\right\}.$$

Пусть теперь $B'(x_1,\, x_2) = \widetilde{B}(x_1,\, x_2) - x_1 \frac{\partial_+ \widetilde{B}}{\partial_+ e_1}(0,\, 0)$ локально вогнутая функция действующая из $U_{\tau,\,\delta} \cup V_{\tau,\,\delta}$ в $\mathbb{R}$ не возрастающая по x_1. Пусть

$$\Omega' = \{(x',\, x_d) \in \mathbb{R}^d |\, (|x'|,\, x_d) \in U_{\tau,\,\delta} \cup V_{\tau,\,\delta}\}.$$

Тогда не трудно видеть, что $\Omega \subseteq \Omega'$ и нам осталось показать, что функция $B\colon \Omega' \to \mathbb{R}$, заданная формулой $B(x',\, x_d) = B'(|x'|,\, x_d)$ локально вогнута. Что в свою очередь следует из следующей леммы (нужно подставить $b(x_2) = -\theta^{-1}(-x_2)$ при $x_2 \in (-\theta(\delta),\, 0)$ и $b(x_2) = 0$ при других x_2) (аналогичная лемма была рассмотрена в моём бакалаврском дипломе).

Лемма 5.30. *Пусть* $b\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *некоторая функция. Области* Y_b, Y_b' *заданы формулами*

$$Y_b = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\, x_1 \geqslant b(x_2)\},$$

$$Y_b' = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d |\, |x'| \geqslant b(x_d)\} = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d |\, (|x'|, x_d) \in Y_b\}.$$

Пусть функция $B'\colon Y_b \to \mathbb{R}$ *локально вогнута и невозрастает по переменной* x_1, *тогда функция* $B\colon Y_b' \to \mathbb{R}$, *заданная формулой* $B(x', x_d) = B'(|x'|, x_d)$ *локально вогнута.*

Доказательство. Пусть отрезок $[(x', x_d), (y', y_d)]$ лежит в области Y_b', тогда для любого $\alpha \in [0, 1]$ верна следующая цепочка неравенств

$$\alpha|x'| + (1-\alpha)|y'| \geqslant |\alpha x' + (1-\alpha)y'| \geqslant b(\alpha x_d + (1-\alpha)y_d).$$

Тем самым отрезок $[(|x'|, x_d), (|y'|, y_d)]$ лежит в области Y_b и мы можем написать следующую цепочку неравенств

$$B(\alpha x' + (1-\alpha)y', \alpha x_d + (1-\alpha)y_d) = B'(|\alpha x' + (1-\alpha)y'|, \alpha x_d + (1-\alpha)y_d) \geqslant B'(\alpha|x'| + (1-\alpha)|y'|, \alpha x_d + (1-\alpha)y_d) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha B'(|x'|, x_d) + (1-\alpha)B'(|y'|, y_d) = \alpha B(x', x_d) + (1-\alpha)B(y', y_d).$$

□

5.3.7 Разбор пункта 3.4.

В данном пункте нам нужно построить локально вогнутую функцию $B\colon \Omega \to \mathbb{R}$ не липшицеву в нуле. Для этого достаточно найти вогнутую функцию $f\colon [0, \delta] \to [0, +\infty)$ не липшицеву в нуле и удовлетворяющую условиям (5.1) и (5.2), то есть, такую, что для функции $\mathbb{B}_{\theta, \delta, f}$ верно неравенство

$$\frac{\partial_+ \mathbb{B}_{\theta, \delta, f}}{\partial_+ e_1}(0, 0) < +\infty.$$

Мы построим локально вогнутую функцию $B\colon U_{\theta, \delta} \to \mathbb{R}$, такую, что $f(t) = B(0, t) - B(0, 0)$ не липшицева в нуле ипри этом

$$\frac{\partial_+ B}{\partial_+ e_1}(0, 0) < +\infty.$$

Тогда

$$\mathbb{B}_{\theta, \delta, f}(x_1, x_2) \leqslant \widetilde{B}(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} B(x_1, x_2) - B(0, 0) - \frac{x_1}{\delta}(B(\delta, -\theta(\delta)) - B(0, 0))$$

И так как $\widetilde{B}(0, 0) = 0$, значит

$$\frac{\partial_+ \mathbb{B}_{\theta, \delta, f}}{\partial_+ e_1}(0, 0) \leqslant \frac{\partial_+ \widetilde{B}}{\partial_+ e_1}(0, 0) = \frac{\partial_+ B}{\partial_+ e_1}(0, 0) - \frac{1}{\delta}(B(\delta, -\theta(\delta)) - B(0, 0)) < +\infty.$$

Выберем последовательность точек $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$ таких, что $u_0 = \delta$, $u_n > u_{n+1} > 0$ и для u_n при $n \geqslant 1$ выполнены следующие условия

1) θ дифференцируема в точке u_n,
2) $\theta'(u_n) < \theta_l'(u_{n-1})$,
3) $\theta'(u_n)u_n - \theta(u_n) < \theta_l'(u_{n-1})u_{n-1} - \theta(u_{n-1})$,
4) $u_n < \frac{1}{2^n}$,
5) $\theta'(u_n)u_n - \theta(u_n) < \frac{1}{2^n}$,
6) $\theta'(u_n) < \frac{1}{2^n}$.

Они разбивают область $U_{\theta, \delta}$ на следующие полосы

$$U_n = \{(x_1, x_2) \in U_{\theta, \delta} |\, x_1 \leqslant u_n,\ x_2 \leqslant \theta_l'(u_n)(u_n - x_1) - \theta(u_n),\ x_2 \geqslant -\tau x_1$$
$$\text{и при } x_1 \leqslant u_{n+1} \text{ выполнено } x_2 \geqslant \theta'(u_{n+1})(u_{n+1} - x_1) - \theta(u_{n+1})\}.$$

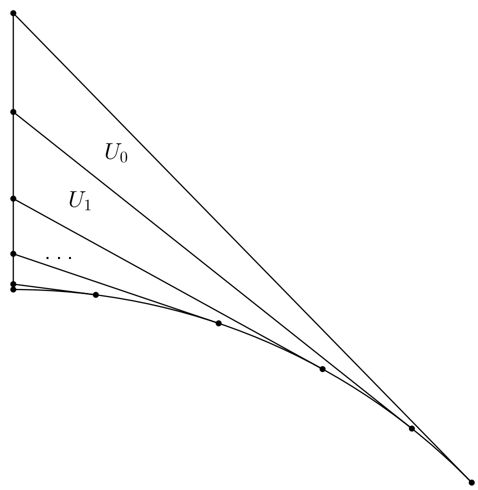

Рис. 24: Разбиение области $U_{\theta,\,\delta}$ на полосы $U_0,\,U_1,\dots$.

Проверим, что подойдёт следующая функция

$$B(x_1,\,x_2)=\begin{cases}0, & \text{при } (x_1,\,x_2)\in U_0,\\ nx_2+\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\theta'(u_j)\right)x_1-\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right), & \text{при } (x_1,\,x_2)\in U_n,\\ -\left(\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right), & \text{при } (x_1,\,x_2)=(0,\,0).\end{cases}\tag{5.26}$$

Заметим, что

$$B|_{U_n}(x_1,\,x_2)=\sum_{j=1}^{n}x_2+\theta'(u_j)x_1-\theta'(u_j)u_j+\theta(u_j).$$

Пусть

$$\widetilde{T}_n(x_1,\,x_2)=x_2+\theta'(u_n)x_1-\theta'(u_n)u_n+\theta(u_n).$$

Тогда функция $\widetilde{T}_n$ зануляется на отрезке

$$[(0,\,\theta'(u_n)u_n-\theta(u_n)),\,(u_n,\,-\theta(u_n))],$$

отрицательна ниже него и положительна выше него. Таким образом следующая функция локально вогнута

$$T_n(x_1,\,x_2)=\begin{cases}0, & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\bigcup\limits_{j<n}U_j,\\ x_2+\theta'(u_n)x_1-\theta'(u_n)u_n+\theta(u_n), & \text{при } (x_1,\,x_2)\in\{(0,\,0)\}\cup\bigcup\limits_{j\geqslant n}U_j.\end{cases}$$

Пусть

$$B_n(x_1,\,x_2)=\sum_{j=1}^{n}T_j(x_1,\,x_2),$$

тогда B_n локально вогнута. При этом $B_n\searrow B$, то есть, и B локально вогнута. Функция B неположительна, как сумма неположительных функций. Раз B локально вогнута на $U_{\theta,\,\delta}$, то её инфимум достигается либо в точке $(\delta,\,-\theta(\delta))$, либо на отрезке $[(0,\,0),\,(0,\,\theta_l'(\delta)\delta-\theta(\delta))]$. В точке $(\delta,\,-\theta(\delta))$ функция зануляется, а на отрезке $[(0,\,0),\,(0,\,\theta_l'(\delta)\delta-\theta(\delta))]$ возрастает по x_2. Таким образом

$$\inf\{B(x_1,\,x_2)|\,(x_1,\,x_2)\in U_{\theta,\,\delta}\}=B(0,\,0)=-\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)\overset{\text{по условию 5}}{\geqslant}-\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j}\right)=-1>-\infty.$$

То есть, $B\colon U_{\theta,\,\delta}\to[-1,\,0]\subseteq\mathbb{R}$. Если

$$x_2\in[\theta'(u_{n+1})u_{n+1}-\theta(u_{n+1}),\,\theta'(u_n)u_n-\theta(u_n)],$$

тогда $(0,\,x_2)\in U_n$ и из условия 5 мы получаем, что $x_2<\frac{1}{2^n}$. То есть,

$$B(0,\,x_2)=nx_2-\left(\sum_{j=1}^{n}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)\leqslant\frac{n}{2^n}-\left(\sum_{j=1}^{n}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)\underset{\substack{n\to+\infty\\(x_2\to0)}}{\longrightarrow}-\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)=$$
$$=B(0,\,0)$$

То есть, $B(0,\,x_2)\underset{x_2\to0}{\longrightarrow}B(0,\,0)$. Таким образом

$$\frac{\partial_+B}{\partial_+e_2}(0,\,0)=\lim_{t\searrow0}\frac{\partial_+B}{\partial_+e_2}(0,\,t)=\lim_{n\to+\infty}n=+\infty.$$

То есть, $f(t)=B(0,\,t)-B(0,\,0)$ не липшицева в нуле.

Если $(x_1,\,0)\in U_n$, тогда при $x_1\to0$ верно $n\to+\infty$ и при этом

$$B(x_1,\,0)=\left(\sum_{j=1}^{n}\theta'(u_j)\right)x_1-\left(\sum_{j=1}^{n}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)\overset{\text{по условию 6}}{\leqslant}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}\right)x_1-\left(\sum_{j=1}^{n}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)$$
$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j}\right)x_1-\left(\sum_{j=1}^{n}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)=x_1-\left(\sum_{j=1}^{n}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)\underset{x_1\to0}{\longrightarrow}-\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\theta'(u_j)u_j-\theta(u_j)\right)=$$
$$=B(0,\,0).$$

А значит, $B(0,\,x_1)\underset{x_1\to0}{\longrightarrow}B(0,\,0)$ и

$$\frac{\partial_+B}{\partial_+e_1}(0,\,0)=\lim_{t\searrow0}\frac{\partial_+B}{\partial_+e_1}(t,\,0)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\theta'(u_j)=\sum_{j=1}^{+\infty}\theta'(u_j)\overset{\text{по условию 6}}{\leqslant}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j}=1<+\infty.$$

Таким образом теорема 5.1 полностью доказана.

5.4 Точки не нулевой кривизны.

Основным примером точек вогнутости границы — точки в которых $\partial\Omega$ гладкая и все кривизны отделены от нуля. В данном случае модуль максимального убывания $\theta(\delta)\sim\delta^2$ и условия (5.1), (5.2) становятся эквивалентны условиям

$$f(\delta)=O(\delta^{\frac{1}{2}}),$$
$$\int_0^\delta\frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt<+\infty.$$

В силу монотонности f второе условие влечёт, то что $f(\delta)=o(\delta^{\frac{1}{2}})$. При этом $f(\delta)=\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{-\log^2(\delta)}$ вогнута в окрестности нуля и удовлетворяет обоим условиям.

Таким образом в данном случае мы можем гарантировать, что модуль непрерывности в точке ведёт себя чуть лучше чем просто $\frac{1}{2}$-гёльдерово, но при этом можем построить локально вогнутую функцию, которая в данной точке вогнутости $\frac{1}{2}$-гёльдерова, но не $\frac{1}{2}+\varepsilon$-гёльдерова ни для какого положительного ε.

Список литературы

[1] Daniel Azagra, Dmitriy Stolyarov, *Inner and outer smooth approximation of convex hypersurfaces. When is it possible?*, Nonlinear Analysis, Volume 230, 2023, 113225,

[2] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck *The Dirichlet Problem for the Degenerate Monge-Ampère Equation*, RMI Volume 2, Issue 1, 1986, pp. 19–27.

[3] Guan, Bo *The Dirichlet problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 12, 4955–4971.

[4] Krylov, N. V. (1990). *Smoothness of the payoff function for a controllable processin a domain*, Math. USSR-Izv. **34**:65–95.

[5] R. Tyrrell Rockafellar , *Convex Analysis*, 1970.

[6] D. M. Stolyarov and P. B. Zatitskiy, *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals*, Adv. Math. **291** (2016).

[7] D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskiy, *On locally concave functions on simplest non-convex domains*, https://arxiv.org/abs/2204.12719.