Отзыв научного руководителя о выпускной квалификационной работе
Николая Андреевича Кароля
“О стягиваемых множествах вершин в 3-связном графе”

Дипломная работа Николая Кароля посвящена связности, одному из наиболее абстрактных разделов теории графов. Конкретно, задаче о стягиваемых подграфах трехсвязного графа. Подграф H трехсвязного графа G называется *стягиваемым*, если этот подграф связен, а $G - H$ двусвязен. В 1994 году МакКвэйг и Ота сформулировали гипотезу: для любого натурального числа m существует такое n, что любой трёхсвязный граф G с не менее чем n вершинами имеет стягиваемое множество из m вершин. Для $m = 1$ это утверждением очевидно, для для $m = 2$ также достаточно несложно и широко известно. Случай $m = 3$ доказан авторами гипотезы в 1994 году, случай $m = 4$ доказал в 2000 году М.Криселл (и уже это доказательство является весьма технически сложным). Случай $m = 5$ доказан в 2022 году Н.Власовой (на самом деле, работа написана значительно раньше, но проверка сложного текста в 80 страниц заняла много времени). Как видно, каждое дальнейшее продвижение в этой задаче весьма трудоемко. Как правило, авторы выжимали все возможное из своих методов, для следующих случаев требовались новые идеи. Отмечу, что интерес к задаче именно для трехсвязного графа неслучаен: аналогичное утверждение для связности 2 общеизвестно, а для связности 4 и более опровергнуто классиком теории связности В. Мадером.

Существенная часть работы Николая Кароля составляет его версия доказательства случая $m = 5$ гипотезы МакКвейга-Оты. Как и прежде, рассматривается 4-вершинное стягиваемое множество W трехсвязного графа H, после чего в нем и его окрестности ищется 5-вершинное стягиваемое множество. Новой идеей Николая является рассмотрение различных конфигураций подграфа $G(W)$, в работе Власовой перебор был организован по-другому. Благодаря этой идее, получилось сократить перебор более, чем в полтора раза. Отмечу, что одна из ключевых идей, используемых в обеих работах (и Власовой, и Кароля) — выделение “плохих” конфигураций, которые сразу разобрать не получается, а потом они разбираются с помощью того, что никаких других конфигураций, кроме весьма ограниченного списка, нет. В дополнении к идее с постепенным исключением конфигураций графа $G(W)$ это позволяет достичь результата.

Само по себе упрощение доказательства случая $k = 5$ мне не кажется особенно интересным, хотя в работе и разобран ранее не разобранный случай графов на 11 и 12 вершинах, найдены все графы-исключения в этих случаях. Но отмечу, что методы, разработанные Николаем, весьма вероятно, позволили ему разобраться со случаем $m = 6$ гипотезы МакКвейга-Оты. В настоящее время его работа, в которой чуть более 200 страниц, проверена примерно на треть и ошибок не найдено. Поэтому считаю, что разработанный Николаем метод весьма интересен и важен, а ВКР содержит более короткий пример работы этого метода.

Вторая часть работы посвящена вопросу о поиске большого стягиваемого множества в трехсвязном графе. По этому вопросу известно немного результатов. В 2018 году Д. Карпов доказал, что для любого натурального числа $m \geq 4$, любой трёхсвязный граф G с не менее чем $2m + 1$ вершиной имеет стягиваемое множество W с $m \leq |W| \leq 2m - 4$. Николай Кароль во второй части работы ищет стягиваемое множество конкретного размера, но при этом требует намного больших ограничений на граф. А именно, доказывается, что для любого $k \geq 5$ любой трехсвязный граф G, степени вершин которого не менее чем $\frac{2k+1}{3} + 2$, имеет k-вершинное стягиваемое множество. Я не встречал такого подхода в других работах, теорема выглядит интересной.

Идея заняться этими вопросами, как и постановка задачи второй части диплома, принадлежат полностью Николаю. Работа выполнена самостоятельно, на хорошем уровне строгости. На такой длинный текст я нашел лишь два места, где стоило разобрать случаи подробнее, и это несложно было сделать теми же методами, которые применялись в тексте рядом.

Я считаю, что ВКР Николая Кароля должна быть оценена на **отлично**. Отмечу, что вторая часть дипломной работы (теорема 3) опубликована.

научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор факультета математики и компьютерных наук
Санкт-Петербургского государственного университета
Петр Ф. В. Петров