

Отзыв научного руководителя о выпускной квалификационной работе  
Николая Андреевича Кароля  
“О стягиваемых множествах вершин в 3-связном графе”

Дипломная работа Николая Кароля посвящена связности, одному из наиболее абстрактных разделов теории графов. Конкретно, задаче о стягиваемых подграфах трехсвязного графа. Подграф  $H$  трехсвязного графа  $G$  называется *стягиваемым*, если этот подграф связан, а  $G - H$  двусвязен. В 1994 году МакКвэйг и Ота сформулировали гипотезу: для любого натурального числа  $m$  существует такое  $n$ , что любой трёхсвязный граф  $G$  с не менее чем  $n$  вершинами имеет стягиваемое множество из  $m$  вершин. Для  $m = 1$  это утверждением очевидно, для  $m = 2$  также достаточно несложно и широко известно. Случай  $m = 3$  доказан авторами гипотезы в 1994 году, случай  $m = 4$  доказал в 2000 году М.Криселл (и уже это доказательство является весьма технически сложным). Случай  $m = 5$  доказан в 2022 году Н.Власовой (на самом деле, работа написана значительно раньше, но проверка сложного текста в 80 страниц заняла много времени). Как видно, каждое дальнейшее продвижение в этой задаче весьма трудоемко. Как правило, авторы выжимали все возможное из своих методов, для следующих случаев требовались новые идеи. Отмечу, что интерес к задаче именно для трехсвязного графа неслучаен: аналогичное утверждение для связности 2 общеизвестно, а для связности 4 и более опровергнуто классиком теории связности В. Мадером.

Существенная часть работы Николая Кароля составляет его версия доказательства случая  $m = 5$  гипотезы МакКвейга-Оты. Как и прежде, рассматривается 4-вершинное стягиваемое множество  $W$  трехсвязного графа  $H$ , после чего в нем и его окрестности ищется 5-вершинное стягиваемое множество. Новой идеей Николая является рассмотрение различных конфигураций подграфа  $G(W)$ , в работе Власовой перебор был организован по-другому. Благодаря этой идее, получилось сократить перебор более, чем в полтора раза. Отмечу, что одна из ключевых идей, используемых в обеих работах (и Власовой, и Кароля) — выделение “плохих” конфигураций, которые сразу разобрать не получается, а потом они разбираются с помощью того, что никаких других конфигураций, кроме весьма ограниченного списка, нет. В дополнении к идее с постепенным исключением конфигураций графа  $G(W)$  это позволяет достичь результата.

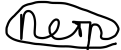
Само по себе упрощение доказательства случая  $k = 5$  мне не кажется особенно интересным, хотя в работе и разобран ранее не разобранный случай графов на 11 и 12 вершинах, найдены все графы-исключения в этих случаях. Но отмечу, что методы, разработанные Николаем, весьма вероятно, позволили ему разобраться со случаем  $m = 6$  гипотезы МакКвейга-Оты. В настоящее время его работа, в которой чуть более 200 страниц, проверена примерно на треть и ошибок не найдено. Поэтому считаю, что разработанный Николаем метод весьма интересен и важен, а ВКР содержит более короткий пример работы этого метода.

Вторая часть работы посвящена вопросу о поиске большого стягиваемого множества в трехсвязном графе. По этому вопросу известно немного результатов. В 2018 году Д. Карпов доказал, что для любого натурального числа  $m \geq 4$ , любой трёхсвязный граф  $G$  с не менее чем  $2m + 1$  вершиной имеет стягиваемое множество  $W$  с  $m \leq |W| \leq 2m - 4$ . Николай Кароль во второй части работы ищет стягиваемое множество конкретного размера, но при этом требует намного больших ограничений на граф. А именно, доказывается, что для любого  $k \geq 5$  любой трехсвязный граф  $G$ , степени вершин которого не менее чем  $\frac{2k+1}{3} + 2$ , имеет  $k$ -вершинное стягиваемое множество. Я не встречал такого подхода в других работах, теорема выглядит интересной.

Идея заняться этими вопросами, как и постановка задачи второй части диплома, принадлежат полностью Николаю. Работа выполнена самостоятельно, на хорошем уровне строгости. На такой длинный текст я нашел лишь два места, где стоило разобрать случаи подробнее, и это несложно было сделать теми же методами, которые применялись в тексте рядом.

Я считаю, что ВКР Николая Кароля должна быть оценена на **отлично**. Отмечу, что вторая часть дипломной работы (теорема 3) опубликована.

научный руководитель  
доктор физико-математических наук  
профессор факультета математики и компьютерных наук  
Санкт-Петербургского государственного университета

 Ф. В. Петров