Санкт-Петербургский государственный университет

КАРОЛЬ Николай Андреевич

Выпускная квалификационная работа

О стягиваемых множествах вершин в 3-связном графе

Уровень образования: магистратура
Направление 01.04.01 «Математика»
Основная образовательная программа ВМ.5832.2021 «Современная математика»

Научный руководитель:
профессор факультета математики
и компьютерных наук СПбГУ,
старший научный сотрудник
ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН,
доктор физико-математических наук
Петров Фёдор Владимирович

Рецензент:
научный сотрудник
ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН,
кандидат физико-математических наук
Пастор Алексей Владимирович

Санкт-Петербург
2023 год

О стягиваемых множествах вершин в 3-связном графе

Николай Кароль *

2023

Абстракт

Пусть G - 3-связный граф. Множество $W \subset V(G)$ называется *стягиваемым*, если $G(W)$ связен и $G - W$ является 2-связным графом. В 1994 году, МакКуэйг и Ота сформулировали гипотезу, гласящую, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что любой 3-связный граф G с $v(G) \geqslant m$ содержит k-вершинное стягиваемое множество. Эта гипотеза была доказана для всех $k \leqslant 5$ разными математиками. Автор утверждает, что гипотеза доказана для $k = 6$ в [2]. Методы, использованные для этого доказательства случая $k = 6$ [2] могут быть использованы для получения доказательства случая $k = 5$, и это доказательство значительно короче и проще оригинального. Это доказательство мы представляем здесь. Более того, мы докажем, что, для любого $k \geqslant 5$ утверждение гипотезы выполнено, если $\delta(G) \geqslant \left[\frac{2k+1}{3}\right] + 2$.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–15–2022–287.

1 Базовые определения

В этой работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер и используются стандартные обозначения. Мы используем обозначение $v(G)$ для числа вершин графа G и $\delta(G)$ для минимальной степени G.

Определение 1. Пусть $R \subset V(G)$.

1) Обозначим через $G - R$ граф, полученный из G удалением всех вершин множества R и всех рёбер, инцидентных вершинам из R.

2) Обозначим через $G(R)$ индуцированный подграф графа G на множестве R.

3) Назовём R *связным*, если $G(R)$ - связный граф.

4) Назовём R *k-вершинным множеством*, если $|R| = k$.

5) Пусть G - 3-связный граф. Назовём R *стягиваемым*, если $G(R)$ связен и $G - R$ является двусвязным графом.

6) Пусть G - 3-связный граф. Назовём R *k-стягиваемым*, если R – это k-вершинное стягиваемое множество.

7) Пусть $R_1 \subset V(G)$, $R \cap R_1 = \varnothing$. Обозначим через $E_G(R, R_1)$ множество таких рёбер $e \in E(G)$, что $e = xy$, $x \in R$, $y \in R_1$. Пусть $e_G(R, R_1) = |E_G(R, R_1)|$. Назовём R_1 *смежным* с R, если $e_G(R, R_1) \geqslant 1$.

2 Введение

Рассмотрим 2-связный граф G на n вершинах и пусть n_1 и n_2 – это такие натуральные числа, что $n_1 + n_2 = n$. Широко известным фактом является то, что $V(G)$ можно разбить на 2 таких связных множества V_1 и V_2, что $|V_1| = n_1$ и $|V_2| = n_2$. В 1994 году МакКуэйг и Ота [8] сформулировали следующую гипотезу для 3-связных графов. Эта гипотеза упомянута в обзорной работе Мадера о связности [7].

Гипотеза. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое натуральное число n, что любой 3-связный граф G на не менее чем n вершинах содержит k-стягиваемое множество.*

Из работ Мадера [6] следует, что ответ на аналогичную проблему для n-связных графов с $n \geqslant 4$ является отрицательным. А именно, для любого $k \geqslant 2$ существует сколь угодно большой (по количеству вершин) n-связный граф G такой, что G не содержит связного множества W такого, что $|W| = k$ и $G - W$ является $(n-1)$-связным. Таким образом, вопрос остаётся открытым только для 3-связных графов.

Следующая теорема из [3] устанавливает существование больших стягиваемых множеств в 3-связных графах.

Теорема 1. [3] *Пусть $m \geqslant 5$ – целое число, а G – это 3-связный граф, $v(G) \geqslant 2m+1$. Тогда G содержит стягиваемое множество W такое, что $m \leqslant |W| \leqslant 2m - 4$.*

Утверждение гипотезы очевидно для $k = 1$. Гипотеза доказана для $k = 2$ в [9], для $k = 3$ в [8], для $k = 4$ в [5], и для $k = 5$ в [10]. Автор утверждает, что гипотеза доказана для $k = 6$ в [2]. Разработанные в [2] методы могут быть адаптированы для получения доказательства результата для $k = 5$, которое значительно проще и короче оригинального из [10]. Таким образом, мы докажем следующее.

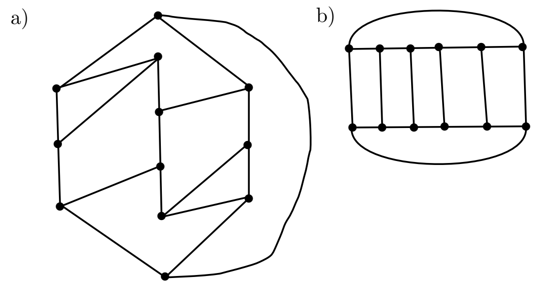

Figure 1: Эти 3-связные графы не содержат 5-стягиваемого множества.

Теорема 2. *Пусть G - 3-связный граф и $v(G) \geqslant 11$. Тогда существует 5-стягиваемое множество в графе G, если G не является одним из графов, изображённых на рисунке 1.*

Вдобавок, мы докажем, что утверждение гипотезы является верным, если минимальная степень графа ограничена снизу.

Теорема 3. *Пусть G - 3-связный граф, пусть $k \geqslant 5$ - натуральное число и пусть $v(G) \geqslant k+3$, $\delta(G) \geqslant \left[\frac{2k+1}{3}\right] + 2$. Тогда существует k-стягиваемое множество в графе G.*

3 Необходимые инструменты

Мы сформулируем несколько определений и фактов о структуре n-связных графов. С их помощью мы докажем теоремы 2 и 3.

Определение 2. Стягиваемое множество $W \subset V(G)$ 3-связного графа G называется *максимальным* или *нерасширяемым*, если не существует $x \in V(G) \setminus W$ такого, что множество $W \cup \{x\}$ является стягиваемым.

Определение 3. Пусть G - n-связный граф.

1) Пусть $R \subset V(G)$. R - *разделяющее множество*, если граф $G - R$ не является связным.

2) Обозначим через $\mathfrak{R}_n(G)$ множество всех n-вершинных разделяющих множеств G.

3) Пусть $R \subset V(G)$ - разделяющее множество. Будем говорить, что R *разделяет* множество $X \subset V(G)$, если $X \setminus R$ не содержится в какой-то одной компоненте связности графа $G - R$.

4) Два разделяющих множества $S, T \in \mathfrak{R}_n(G)$ назовём *независимыми*, если S не разделяет T, а T не разделяет S. В противном случае эти множества *зависимые*.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_n(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ – это *часть* $\mathfrak{S}$*-разбиения* G, если нет разделяющего множества из $\mathfrak{S}$, которое разделяет A, и при этом A – максимальное по включению множество с таким свойством. Через $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ мы обозначим множество всех частей $\mathfrak{S}$-разбиения G.

2) Пусть $A \in \mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$. Вершина A является *внутренней*, если она не принадлежит никакому разделяющему множеству из $\mathfrak{S}$. Множество всех внутренних вершин A называется *внутренностью* A, и мы его обозначаем через $\mathrm{Int}(A)$.

Граница A – это множество $\mathrm{Bound}(A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Определение 5. Пусть G – 2-связный граф.

1) Разделяющее множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ – *одиночное*, если S независимо со всеми разделяющими множествами $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ множество всех одиночных множеств графа G.

2) Мы будем писать $\mathrm{Part}(G)$ вместо $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{O}(G))$. Части этого разбиения будем просто называть *частями* G.

Определение 6. *Дерево разбиения* $\mathrm{BT}(G)$ 2-связного графа G – это двудольный граф с разбиением вершин на две доли $(\mathfrak{O}(G), \mathrm{Part}(G))$, где одиночное разделяющее множество S и часть A смежны тогда и только когда, когда $S \subset A$. Других рёбер в $\mathrm{BT}(G)$ нет.

Нам понадобится следующее свойство $\mathrm{BT}(G)$.

Лемма 1. [4, Лемма 1] *Пусть G - 2-связный граф. Тогда $BT(G)$ является деревом. Каждый лист $BT(G)$ соответствует части $Part(G)$.*

Определение 7. Пусть G – 2-связный граф, пусть $A \in \mathrm{Part}(G)$. Часть A называется *крайней*, если она соответствует листу $\mathrm{BT}(G)$.

Определение 8. Пусть G – 2-связный граф.

1) Обозначим через G' граф, полученный из G добавлением всех отсутствующих рёбер типа ab, где $\{a, b\} \in \mathfrak{O}(G)$.

2) Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ называется *циклом*, если граф $G'(A)$ – это цикл. Если A является циклом, то $|A|$ – это *длина* A.

3) Часть A – это *3-блок*, если $G'(A)$ является 3-связным графом.

Лемма 2. [3, Лемма 13] *Пусть G – 3-связный граф. Пусть $W \subset V(G)$ – максимальное стягиваемое множество такое, что граф $H = G - W$ не является простым циклом. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) Пусть $A \in Part(H)$ является циклом. Тогда каждая внутренняя вершина A смежна с W.

2) Есть хотя бы две крайние части $Part(H)$, и все эти части являются циклами длины не менее 4.

3) Пусть $A \in Part(H)$ – крайняя часть. Тогда $H - Int(A)$ – 2-связный граф.

Следующая Лемма – это очевидное следствие Леммы 2. Оригинальная версия этой леммы была доказана в [5], Лемма 3.

Лемма 3. *Пусть G – 3-связный граф. Пусть $W \subset V(G)$ – максимальное стягиваемое множество такое, что $H = G - W$ – не простой цикл. Пусть A_1, A_2 - две крайние части $G - W$, $W_1 = Int(A_1), W_2 = Int(A_2)$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) $G(W_1)$ и $G(W_2)$ – простые пути.

2) $|W_1| \geqslant 2, |W_2| \geqslant 2$.

3) $W_1 \cap W_2 = \varnothing$.

4) Все вершины $W_1 \cup W_2$ имеют степень 2 в графе $G - W$.

5) Оба графа $G - W - W_1$ и $G - W - W_2$ 2-связны.

6) $N_G(W_1) \cap W_2 = \varnothing, N_G(W_2) \cap W_1 = \varnothing$.

Лемма 4. [10, Лемма 7] *Допустим, условия Леммы 3 выполнены. Установим обозначения Леммы 3, пусть $S_i = Bound(A_i)$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) Граф $G - W - W_1 - W_2$ связен.

2) Допустим, вершины S_i смежны друг с другом для какого-то $i \in \{1, 2\}$. Тогда или граф $G - W - W_1 - W_2$ 2-связен, или этот граф состоит из 2 вершин.

Лемма 5. [10, Лемма 14] *Пусть G – 3-связен. Пусть $W \subset V(G)$ – такое стягиваемое множество, что граф $G - W$ не является простым циклом. Тогда, для любого $x \in N_G(W)$, существует множество $U \subset N_G(W) \setminus \{x\}$ такое, что $W \cup U$ стягиваемо. Более того, если $|U| \geqslant 2$, то $(G-W)(U)$ – это простой путь, любой конец этого пути имеет ровно одного соседа в $G - W - U$, эти концы смежны с различными вершинами в $G - W - U$. Другие вершины U не имеют соседей в $G - W - U$.*

Определение 9. Пусть G – 3-связный граф. Тогда G – *минимальный 3-связный*, если $G - e$ – не 3-связный для любого $e \in E(G)$.

Мы будем использовать следующий результат Халина в доказательстве Теоремы 2.

Лемма 6. [1] *Пусть G – минимальный 3-связный граф. Тогда любой цикл G содержит хотя бы 2 вершины степени 3.*

Наше доказательство использует следующий результат.

Теорема 4. [5] *Пусть G – 3-связный граф, $v(G) \geqslant 7$. Тогда существует 4-стягиваемое множество в графе G или $G = K_{3,4}$.*

4 Доказательство Теоремы 2

По Теореме 4, в графе есть 4-стягиваемое множество W, потому что $v(G) \geqslant 11$.

Мы обозначим вершины W через a_1, a_2, a_3, a_4.

$G(W)$ – это связный граф на 4 вершинах. Существует всего 6 связных 4-вершинных графов (см. Рис. 2).

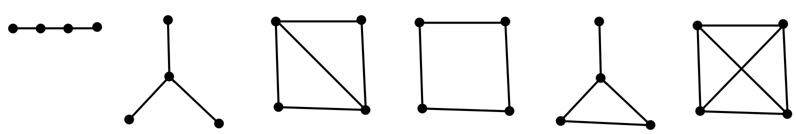

Figure 2: Список всех 4-вершинных связных графов.

Допустим, $G(W)$ совпадает с K_4. Поскольку G 3-связен, $G(W)$ имеет не менее 3 вершин, смежных с $G - W$. Значит, степени этих вершин не менее 4. Противоречие с Леммой 6.

Таким образом, граф $G(W)$ изоморфен одному из 5 связных 4-вершинных графов (см. Рис. 3). Каждый из этих графов на рисунке 3 имеет название, и мы будем пользоваться этими названиями.

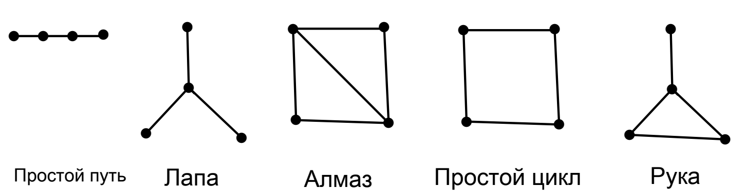

Figure 3: $G(W)$ изоморфно одному из этих 5 графов.

Допустим, граф $G - W$ не является простым циклом. Тогда выполнены утверждения Лемм 2 и 3, и мы будем использовать обозначения из этих лемм. Более того, пусть $G(W_1)$

– это простой путь $u_1...u_k$, пусть $G(W_2)$ – это простой путь $w_1...w_l$. Пусть $\{p, q\}$ и $\{r, s\}$ – это границы частей, содержащих W_1 и W_2 соответственно. Пусть $u_1p, u_kq, w_1r, w_ls \in E(G)$. Отметим, что $p \neq q$, $r \neq s$, но какие-то другие совпадения вершин в четвёрке p, q, r, s возможны.

В [2] у нас были такие же обозначения. Нам понадобятся следующие леммы из [2].

Лемма 7. [2] *Пусть G – 3-связный граф. Допустим, G содержит стягиваемое множество W такое, что $G - W$ не является простым циклом, у W есть вершина a_i такая, что $G(W \setminus \{a_i\})$ связно. Пусть $e_G(W \setminus \{a_i\}, W_2) \geqslant 1$. Пусть $e_G(a_i, G - W - W_2 - \{r, s\}) \geqslant 1$ или $e_G(a_i, G - W - W_2) \geqslant 2$. Тогда G содержит $(|W| + 1)$-стягиваемое множество или выполнены следующие утверждения.*

1) Если $|W_2| = 3$, то $a_iw_1, a_iw_3 \notin E(G)$.

2) Если $|W_2| = 4$, то $a_iw_2, a_iw_3 \notin E(G)$.

Доказательство. 1) Предположим противное. Пусть $a_iw_1 \in E(G)$ (см. Рис. 4 a). Заметим, что если $\{w_2, w_3\} \cup (W \setminus \{a_i\})$ связно, то тогда оно $(|W|+1)$-стягиваемое, потому что есть путь rw_1a_i и $e_G(a_i, G - W - W_2 - \{r, s\}) \geqslant 1$ или $e_G(a_i, G - W - W_2) \geqslant 2$ (см. Рис. 4 a). Следовательно, $\{w_2, w_3\} \cup (W \setminus \{a_i\})$ несвязно. Поскольку $e_G(W \setminus \{a_i\}, W_2) \geqslant 1$ и $\{w_2, w_3\} \cup (W \setminus \{a_i\})$ несвязно, $e_G(W \setminus \{a_i\}, w_1) \geqslant 1$. Следовательно, $(W \setminus \{a_i\}) \cup \{w_1, w_2\}$ связно. Поскольку $\{w_2, w_3\} \cup (W \setminus \{a_i\})$ несвязно, $w_3a_i \in E(G)$ (см. Рис. 4 b). Значит, $(W \setminus \{a_i\}) \cup \{w_1, w_2\}$ стягиваемое, так как sw_3a_i – путь и $e_G(a_i, G - W - W_2 - \{r, s\}) \geqslant 1$ или $e_G(a_i, G - W - W_2) \geqslant 2$.

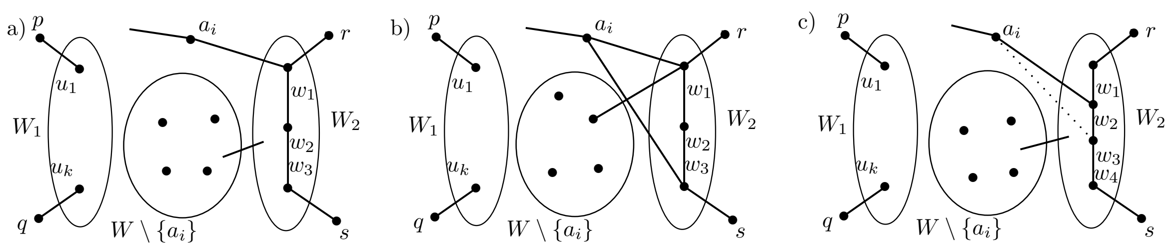

Figure 4: Лемма 7.

Следовательно, $a_iw_1 \notin E(G)$. Аналогично можно получить, что $a_iw_3 \notin E(G)$.

2) Предположим противное. Пусть $a_iw_2 \in E(G)$ (см. Рис. 4 c). Заметим, что если $\{w_3, w_4\} \cup (W \setminus \{a_i\})$ связно, то оно $(|W| + 1)$-стягиваемо, потому что есть путь $rw_1w_2a_i$ и $e_G(a_i, G - W - W_2 - \{r, s\}) \geqslant 1$ или $e_G(a_i, G - W - W_2) \geqslant 2$ (см. Рис. 4 c). Значит, $\{w_3, w_4\} \cup (W \setminus \{a_i\})$ несвязно. Поскольку $e_G(W \setminus \{a_i\}, W_2) \geqslant 1$ и $\{w_3, w_4\} \cup (W \setminus \{a_i\})$ несвязно, $e_G(W \setminus \{a_i\}, \{w_1, w_2\}) \geqslant 1$. Следовательно, $(W \setminus \{a_i\}) \cup \{w_1, w_2\}$ связно. Поскольку $\{w_3, w_4\} \cup (W \setminus \{a_i\})$ несвязно, $w_3a_i \in E(G)$ (см. пунктирное ребро на Рис. 4 c). Значит, $(W \setminus \{a_i\}) \cup \{w_1, w_2\}$ является стягиваемым, потому что $sw_4w_3a_i$ – путь и $e_G(a_i, G - W - W_2 - \{r, s\}) \geqslant 1$ или $e_G(a_i, G - W - W_2) \geqslant 2$.

□

Лемма 7 сформулирована для W_2. Аналогичный результат верен для W_1. Мы будем использовать Лемму 7 для обоих путей W_1, W_2.

Лемма 8. [2] *Пусть G – это 3-связный граф. Предположим, что G содержит стягиваемое множество W такое, что $G - W$ не является простым циклом. Предположим, что $|W_i| = 2$ и a_j – это лист в $G(W)$. Тогда G содержит $(|W| + 1)$-стягиваемое множество или $e_G(a_j, W_i) \geqslant 1$.*

Доказательство. Не умаляя общности, $i = 1$. Предположим, что $e_G(a_j, W_1) = 0$. Поскольку a_j является листом в W, $W \setminus \{a_j\}$ связно. Тогда, поскольку $e_G(a_j, W_1) = 0$, $W_1 \cup (W \setminus \{a_j\})$ связно. Поскольку $e_G(a_j, W_1) = 0$ и a_j - лист в W, $e_G(a_j, G-W-W_1) \geqslant 2$. Тогда $W_1 \cup (W \setminus \{a_j\})$ стягиваемое, потому что $W_1 \cup W$ стягиваемое и $e_G(a_j, G - W - W_1) \geqslant 2$.

□

В следующей серии Лемм, мы покажем существование 5-стягиваемого множества в зависимости от структуры $G(W)$. В каких-то случаях существование 5-стягиваемого множества не будет установлено сразу же. Мы будем называть такие случаи *конфигурациями*. В описаниях конфигураций мы опишем их свойства. Конфигурации будут пронумерованы.

Ради удобства мы будем использовать следующее. Какие-то факты помечены жирным шрифтом **таким образом**. Если какой-то факт выделен жирным, это значит, что этот факт доказан и мы можем его дальше использовать в текущем смысловом куске доказательства (например, если в разборе случая 2.1 какой-то факт помечен жирным, то мы можем им пользоваться дальше внутри случая 2.1, например, в случае 2.1.1, но не в случае 2.2 и не в случае 3). Все жирные факты пронумерованы, и мы будем использовать эту нумерацию для ссылки на факт в доказательстве. Например, 'по (49), $A \subset B$' означает, что $A \subset B$ из-за факта (49).

Лемма 9. *Пусть G - минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Допустим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G - W$ не является простым циклом и $G(W)$ изоморфно простому пути (см. Рис. 3). Пусть $E(G(W)) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4\}$ (см., например, Рис. 5). Тогда G содержит 5-стягиваемое множество или W образует одну из следующих конфигураций, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Конфигурация 1. *$|W_1| = |W_2| = 2$, $e_G(a_i, G - W - W_j) \leqslant 1$ для любых $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2\}$ (см. Рис. 10 b). Для любого $t \in \{1, 4\}$, a_t имеет ровно 2 соседей в $G - W$, один сосед в W_1 и один сосед в W_2. Каждый конец пути W не может иметь 2 смежных между собой соседей в $G - W$.*

Конфигурация 2. *$min(|W_1|, |W_2|) \geqslant 3$, $max(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$, существует 4-стягиваемый подпуть W_i для какого-то $i \in \{1, 2\}$. В частности, $|N_G(W)| \geqslant 7$.*

Конфигурация 3. *W_1, W_2 могут быть пронумерованы так, что $|W_1| = 2$, $|W_2| = 4$, $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$, $e_G(a_4, W_1) \geqslant 1$, каждая вершина W имеет ровно одного соседа в W_2, все эти соседи различны. $N_G(W) = W_1 \cup W_2$ и $|N_G(W)| = 6$.*

Доказательство.

Утверждение 1. *1) Если $|W_i| = 2$ для какого-то $i \in \{1, 2\}$, то $e_G(a_j, G - W - W_i) \leqslant 1$ для любого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, и $e_G(a_1, W_i) \geqslant 1$, $e_G(a_4, W_i) \geqslant 1$.*

2) Допустим, $|W_2| \geqslant 4$ и $|W_1| \geqslant 3$. Тогда $N_G(\{a_1, a_2\}) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ или $N_G(\{a_3, a_4\}) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ или $N_G(\{a_1, a_4\}) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Аналогичное утверждение верно, если $|W_1| \geqslant 4$, $|W_2| \geqslant 3$.

3) Пусть $|W_i| = 3$ для какого-то $i \in \{1, 2\}$. Тогда $e_G(\{a_1, a_4\}, W_i) \geqslant 1$. Более того, a_1, a_2 не имеют различных соседей в $G - W - W_i$ и a_3, a_4 не имеют различных соседей в $G - W - W_i$. Вдобавок, $W_i \cup \{a_1, a_2\}$, $W_i \cup \{a_3, a_4\}$ являются связными множествами.

Доказательство. 1) По Лемме 8, $e_G(a_1, W_i) \geqslant 1$, $e_G(a_4, W_i) \geqslant 1$. Значит, $W_i \cup (W \setminus \{a_j\})$ связно для любого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Поскольку это множество не стягиваемо, $e_G(a_j, G - W - W_i) \leqslant 1$. Это доказывает 1).

2) Не умаляя общности, $|W_2| \geqslant 4$. Очевидно, **если $\mathbf{w_5}$ существует, то $\mathbf{e_G(w_5, W) \geqslant 1}$ (1)**.

Допустим, $e_G(a_1, G - W - \{w_1, w_2, w_3, w_4\}) \geqslant 1$ и $e_G(a_4, G - W - \{w_1, w_2, w_3, w_4\}) \geqslant 1$ (см. Рис. 5 a). Тогда, поскольку (1) и $W_1 \subset N_G(W)$, множество $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ стягиваемо. Это конфигурация 2, так как $|W_1| \geqslant 3$.

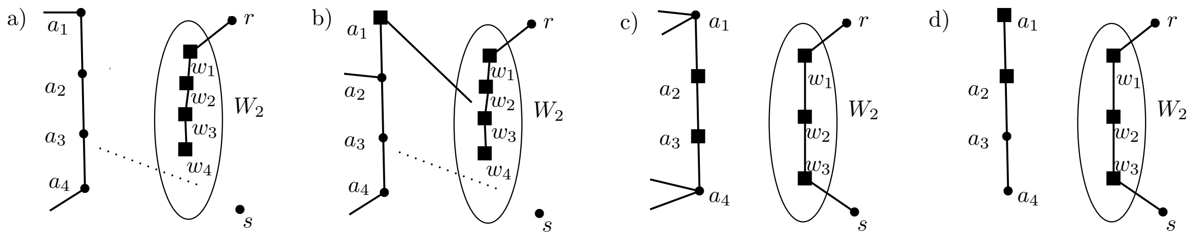

Figure 5: $G(W)$ – простой путь.

Значит, $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ или $N_G(a_4) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Вспомним то, что мы хотим доказать в пункте 2). Так, не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}}$ **(2)**. Наша цель – это доказать, что $N_G(a_2) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ или $N_G(a_4) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Предположим противное, $\mathbf{e_G(a_2, G - W - \{w_1, w_2, w_3, w_4\}) \geqslant 1}$ **и** $\mathbf{e_G(a_4, G - W - \{w_1, w_2, w_3, w_4\}) \geqslant 1}$ **(3)** (см. Рис. 5 b). Поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ (2), **если $\mathbf{w_5}$ существует, то $\mathbf{e_G(w_5, W \setminus \{a_1\}) \geqslant 1}$ (4)** (см. пунктирное ребро на Рис. 5 b). Поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ (2), $\mathbf{W_1 \subset N_G(\{a_2, a_3, a_4\})}$ **(5)**. Поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ (2), $\{a_1, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ связно. Это множество стягиваемо потому что (4), (3) и $W_1 \subset N_G(\{a_2, a_3, a_4\})$ (5).

3) Не умаляя общности, $|W_2| = 3$.

Предположим, что $e_G(\{a_1, a_4\}, W_2) = 0$. Тогда $W_2 \cup \{a_2, a_3\}$ связно, $e_G(a_1, G - W - W_2) \geqslant 2$ и $e_G(a_4, G - W - W_2) \geqslant 2$ (см. Рис. 5 c). Значит, $W_2 \cup \{a_2, a_3\}$ стягиваемое. Следовательно, $\mathbf{e_G(\{a_1, a_4\}, W_2) \geqslant 1}$ **(6)**.

Заметим, что $W_2 \cup \{a_1, a_2\}$ связное или $W_2 \cup \{a_3, a_4\}$ связное. Не умаляя общности, $\mathbf{W_2 \cup \{a_1, a_2\}}$ **связное (7)** (см. Рис. 5 d). Так как это множество не стягиваемое, a_3 и a_4 не имеют различных соседей в $G - W - W_2$. Тогда, поскольку $e_G(a_4, G - W) \geqslant 2$ и $e_G(a_3, G - W) \geqslant 1$, $W_2 \cup \{a_3, a_4\}$ связно. Тогда, аналогично, a_1 и a_2 не имеют различных соседей в $G - W - W_2$.

□

Случай 1. $min(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$.

По Утверждению 1 (пункт 2) для W_2, $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ или $N_G(a_4) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}}$ **(8)**. По Утверждению 1 (пункт 2) для W_1, $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ или $N_G(a_4) \cap (G - W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Тогда, по (8), $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G - W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\}}$ **(9)**. Вспомним Утверждение 1 (пункт 2) для обоих W_1, W_2 и (8), (9). Тогда может быть получено, что $N_G(\{a_1, a_2\}) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и $N_G(\{a_3, a_4\}) \cap (G - W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Таким образом, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}}$ **(10)**, $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\}}$ **(11)**, $\mathbf{N_G(\{a_1, a_2\}) \cap (G - W) \subset \{w_1, w_2, w_3, w_4\}}$ **(12)**, $\mathbf{N_G(\{a_3, a_4\}) \cap (G - W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\}}$ **(13)**. По (12) и (13), $N_G(W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cup$

$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Следовательно, $|\mathbf{W_1}| = \mathbf{4}$, $|\mathbf{W_2}| = \mathbf{4}$ **(14)**. Из (12), $\mathbf{e_G(a_1, W_2) \geqslant 2}$ **(15)** и $\mathbf{e_G(a_2, W_2) \geqslant 1}$ **(16)**. По (13), $\mathbf{e_G(a_4, W_1) \geqslant 2}$ **(17)**.

Предположим, что $e_G(a_2, \{w_1, w_4\}) \geqslant 1$. Не умаляя общности (см. (14)), $a_2w_4 \in E(G)$ (см. Рис. 6 a). Поскольку $e_G(a_1, W_2) \geqslant 2$ (15), $X = \{a_1, w_1, w_2, w_3\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $sw_4a_2a_3a_4$ – путь и $e_G(a_4, W_1) \geqslant 2$ (17). Заметим, что $G - X$ не является простым циклом, потому что $G - W - W_2$ 2-связен. Тогда, по Лемме 3, $N_G(X) \geqslant 4$. Вспомним (12), (13). Тогда $N_G(X) = \{r, w_4, a_2\}$, противоречие с $N_G(X) \geqslant 4$.

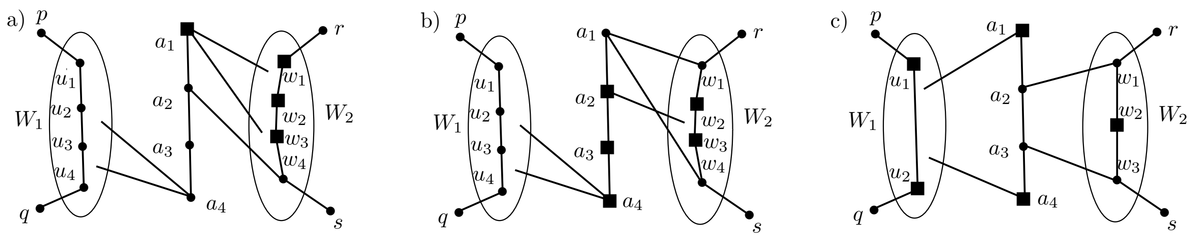

Figure 6: $G(W)$ – простой путь.

Следовательно, $\mathbf{e_G(a_2, \{w_1, w_4\}) = 0}$ **(18)**. Тогда, по (13), $\mathbf{a_1w_4}$, $\mathbf{a_1w_1 \in E(G)}$ **(19)**. Из $e_G(a_2, \{w_1, w_4\}) = 0$ (18), $|W_2| = 4$ (14) и $e_G(a_2, W_2) \geqslant 1$ (16) следует, что $e_G(a_2, \{w_2, w_3\}) \geqslant 1$ (см. Рис. 6 b). Следовательно, $\{w_2, w_3, a_2, a_3, a_4\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $sw_4a_1w_1r$ - путь (19).

Случай 2. $min(|W_1|, |W_2|) = 3$, $max(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$.

Не умаляя общности, $|W_1| = 3$, $|W_2| = 4$. По Утверждению 1 (пункт 3) для W_1, $e_G(\{a_1, a_4\}, W_1) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $e_G(a_4, W_1) \geqslant 1$. Тогда, по Утверждению 1 (пункт 2) для W_2, $N_G(\{a_1, a_2\}) \cap (G - W) \subset W_2$. Значит, $e_G(a_1, W_2) \geqslant 2$ и $e_G(a_2, W_2) \geqslant 1$. Тогда a_1 и a_2 смежны с различными соседями в $G - W - W_1$, противоречие с Утверждением 1 (пункт 3) для W_1.

Случай 3. $min(|W_1|, |W_2|) = 2$, $max(|W_1|, |W_2|) = 3$.

Не умаляя общности, $|W_1| = 2$, $|W_2| = 3$. По Утверждению 1 (пункт 1) для W_1, $\mathbf{e_G(a_1, W_1) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, W_1) \geqslant 1}$ **(20)** и $\mathbf{e_G(a_i, G - W - W_1) \leqslant 1}$ **для любого** $\mathbf{i \in \{1, 2, 3, 4\}}$ **(21)**. По Утверждению 1 (пункт 3), $W_2 \cup \{a_1, a_2\}$, $W_2 \cup \{a_3, a_4\}$ связны. Значит, $\mathbf{|N_G(W_2) \cap W| \geqslant 2}$ **(22)**. Заметим, что $G(W \setminus \{a_1\})$ связен, $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ (20) и $e_G(W \setminus \{a_1\}, W_2) \geqslant 1$ (22). Тогда, по Лемме 7, $e_G(a_1, \{w_1, w_3\}) = 0$. Аналогично, $e_G(a_4, \{w_1, w_3\}) = 0$. Значит, $\mathbf{e_G(\{a_1, a_4\}, \{w_1, w_3\}) = 0}$ **(23)**. Следовательно, $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap (G - W) \subset \{a_2, a_3\}$. Вспомним, что $e_G(a_2, G - W - W_1) \leqslant 1$ (21) и $e_G(a_3, G - W - W_1) \leqslant 1$ (21). Тогда $w_1a_2, w_3a_3 \in E(G)$ или $w_1a_3, w_3a_2 \in E(G)$. Не умаляя общности, $\mathbf{w_1a_2, w_3a_3 \in E(G)}$ **(24)** (см. Рис. 6 c). Вспомним, что $e_G(a_2, G - W - W_1) \leqslant 1$ (21) и $e_G(a_3, G - W - W_1) \leqslant 1$ (21). Значит, $e_G(w_2, \{a_1, a_4\}) \geqslant 1$. Тогда, поскольку $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ и $e_G(a_4, W_1) \geqslant 1$ (20), $\{w_2\} \cup W_1 \cup (W \setminus \{a_2, a_3\})$ связно. В 2-связном графе $G - W - W_1$ есть простой rs-путь rW_2s. В графе $G - (\{w_2\} \cup W_1 \cup (W \setminus \{a_2, a_3\}))$, этот путь заменён путём $rw_1a_2a_3w_3s$ (24). Следовательно, $G - (\{w_2\} \cup W_1 \cup (W \setminus \{a_2, a_3\}))$ двусвязен. Тогда $\{w_2\} \cup W_1 \cup (W \setminus \{a_2, a_3\})$ связно.

Случай 4. $min(|W_1|, |W_2|) = 3$, $max(|W_1|, |W_2|) = 3$.

В этом случае, $|\mathbf{W_1}| = |\mathbf{W_2}| = \mathbf{3}$ **(25)**. По Утверждению 1 (пункт 3) для обоих W_1

и W_2, $\mathbf{e_G(\{a_1,a_4\},W_i)\geqslant 1}$ **для любого** $\mathbf{i\in\{1,2\}}$ (**26**), $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ **не имеют различных соседей в** $\mathbf{G-W-W_i}$ **для любого** $\mathbf{i\in\{1,2\}}$ (**27**), $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$ **не имеют различных соседей в** $\mathbf{G-W-W_i}$ **для любого** $\mathbf{i\in\{1,2\}}$ (**28**). Более того, $\mathbf{W_i\cup\{a_1,a_2\}}$, $\mathbf{W_i\cup\{a_3,a_4\}}$ **являются связными множествами для любого** $\mathbf{i\in\{1,2\}}$ (**29**). Отметим, что (a_1,a_2) и (a_4,a_3) взаимозаменяемы.

Случай 4.1. Существует такое $i\in\{1,2\}$, что $e_G(a_1,G-W-W_i)\geqslant 1$, $e_G(a_2,G-W-W_i)\geqslant 1$ или $e_G(a_3,G-W-W_i)\geqslant 1$, $e_G(a_4,G-W-W_i)\geqslant 1$.

Не умаляя общности, $e_G(a_3,G-W-W_1)\geqslant 1$, $G(a_4,G-W-W_1)\geqslant 1$. Из (28), a_3, a_4 не имеют различных соседей в $G-W-W_1$. Тогда $\mathbf{e_G(a_3,G-W-W_1)=1}$, $\mathbf{e_G(a_4,G-W-W_1)=1}$ (**30**) и $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$ **имеют общего соседа в** $\mathbf{G-W-W_1}$ (**31**). Пусть $\mathbf{x\in V(G-W-W_1)}$ (**32**), $\mathbf{xa_4,xa_3\in E(G)}$ (**33**). Тогда, из (30), $\mathbf{\{x\}=N_G(\{a_3,a_4\})\cap(G-W-W_1)}$ (**34**). Поскольку $G-W$ 2-связен, $d_G(x)\geqslant 4$. Есть цикл xa_4a_3 (33) и $d_G(x)\geqslant 4$. По Лемме 6, $\mathbf{d_G(a_3)=3}$, $\mathbf{d_G(a_4)=3}$ (**35**). Поскольку $d_G(a_3)=3$ (35) и $a_3x\in E(G)$ (33), $\mathbf{N_G(a_3)\cap(G-W)=\{x\}}$ (**36**). Так как $d_G(a_4)=3$ (35) и $e_G(a_4,G-W-W_1)=1$ (30), $\mathbf{e_G(a_4,W_1)=1}$ (**37**). Поскольку $\{x\}=N_G(\{a_3,a_4\})\cap(G-W-W_1)$ (34) и $W_2\cup\{a_3,a_4\}$ связно (29), $\mathbf{x\in W_2}$ (**38**) (см. Рис. 7 a).

Заметим, что $e_G(W\setminus\{a_4\},W_1)\geqslant 1$ и $e_G(W\setminus\{a_4\},W_2)\geqslant 1$ (29), $e_G(a_4,W_1)=1$ (37) и $e_G(a_4,W_2)\geqslant 1$ (33), (38). Тогда, по Лемме 7 для W_1 и W_2, $\mathbf{e_G(a_4,\{u_1,u_3,w_1,w_3\})=0}$ (**39**). Тогда, поскольку $e_G(a_4,W_1)=1$ (37) и $e_G(a_4,W_2)\geqslant 1$ (33), (38), $\mathbf{a_4u_2\in E(G)}$ (**40**) и $\mathbf{a_4w_2\in E(G)}$ (**41**)). Поскольку $\{x\}=N_G(\{a_3,a_4\})\cap(G-W-W_1)$ (34) и $a_4w_2\in E(G)$ (41), $\mathbf{x=w_2}$ (**42**). Тогда, по (33), (34) и (36), $\mathbf{w_2a_4,w_2a_3\in E(G)}$ (**43**), $\mathbf{\{w_2\}=N_G(\{a_3,a_4\})\cap(G-W-W_1)}$ (**44**) и $\mathbf{N_G(a_3)\cap(G-W)=\{w_2\}}$ (**45**). Вспомним, что $e_G(a_4,\{u_1,u_3,w_1,w_3\})=0$ (39) и $N_G(a_3)\cap(G-W)=\{w_2\}$ (45). Значит, $\mathbf{N_G(\{u_1,u_3\})\cap W\subset\{a_1,a_2\}}$, $\mathbf{N_G(\{w_1,w_3\})\cap W\subset\{a_1,a_2\}}$ (**46**).

Предположим, $N_G(\{u_1,u_3\})\cap W=\{a_1,a_2\}$ или $N_G(\{w_1,w_3\})\cap W=\{a_1,a_2\}$. Тогда a_1, a_2 смежны с различными вершинами в $G-W-W_i$ для какого-то $i\in\{1,2\}$, противоречие с (27). Тогда, по (46), $\mathbf{|N_G(\{u_1,u_3\})\cap\{a_1,a_2\}|=1}$, $\mathbf{|N_G(\{w_1,w_3\})\cap\{a_1,a_2\}|=1}$ (**47**).

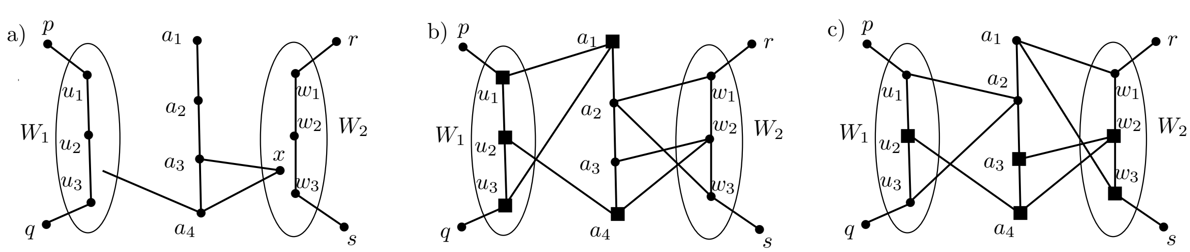

Figure 7: $G(W)$ – простой путь, $|W_1|=3$, $|W_2|=3$.

Предположим, $N_G(\{u_1,u_3\})\cap\{a_1,a_2\}=N_G(\{w_1,w_3\})\cap\{a_1,a_2\}$. Тогда, из (47), a_i смежна со всеми вершинами u_1,u_3,w_1,w_3 для какого-то $i\in\{1,2\}$. Значит, a_1 и a_2 смежны с различными вершинами из $G-W-W_i$ для какого-то $i\in\{1,2\}$, противоречие с (27).

Значит, $\mathbf{N_G(\{u_1,u_3\})\cap\{a_1,a_2\}\neq N_G(\{w_1,w_3\})\cap\{a_1,a_2\}}$ (**48**). Тогда, по (46) и (47), $\mathbf{N_G(\{u_1,u_3\})\cap W=\{a_1\}}$, $\mathbf{N_G(\{w_1,w_3\})\cap W=\{a_2\}}$ **или** $\mathbf{N_G(\{u_1,u_3\})\cap W=\{a_2\}}$, $\mathbf{N_G(\{w_1,w_3\})\cap W=\{a_1\}}$ (**49**).

Предположим, $N_G(\{u_1,u_3\})\cap W=\{a_1\}$ и $N_G(\{w_1,w_3\})\cap W=\{a_2\}$ (см. Рис. 7 b). Поскольку $N_G(\{u_1,u_3\})\cap W=\{a_1\}$ и $a_4u_2\in E(G)$ (40), $W_1\cup\{a_1,a_4\}$ связно. Это множество стягиваемо, потому что $N_G(\{w_1,w_3\})\cap W=\{a_2\}$ и $a_3w_2\in E(G)$ (45).

Значит, по (49), $\mathbf{N_G(\{u_1, u_3\}) \cap W = \{a_2\}}$, $\mathbf{N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W = \{a_1\}}$ **(50)** (см. Рис. 7 c). Поскольку $a_4u_2 \in E(G)$ (40) и $a_4w_2, a_3w_2 \in E(G)$ (43), $\mathbf{X = \{u_2, a_3, a_4, w_2, w_3\}}$ **является связным (51)**. В 2-связном графе $G - W$ есть простой pq-путь pW_1q. В графе $G - X$ путь $pu_1a_2u_3q$ (50) заменяет pW_1q. Значит, $G - X$ 2-связен, потому что $w_1a_1, w_3a_1 \in E(G)$ (50) и $u_1a_2, u_3a_2 \in E(G)$ (50). Тогда, по (51), X - 5-стягиваемое.

Случай 4.2. Не существует $i \in \{1, 2\}$ такого, что $e_G(a_1, G-W-W_i) \geqslant 1$, $e_G(a_2, G-W-W_i) \geqslant 1$ или $e_G(a_3, G - W - W_i) \geqslant 1$, $e_G(a_4, G - W - W_i) \geqslant 1$.

Утверждение 2. *В этом случае выполнены следующие утверждения.*

$N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_1$, $N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_2$ или $N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_1$, $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_2$. $N_G(a_3) \cap (G - W) \subset W_1$, $N_G(a_4) \cap (G - W) \subset W_2$ или $N_G(a_4) \cap (G - W) \subset W_1$, $N_G(a_3) \cap (G - W) \subset W_2$.

Доказательство. Поскольку эти утверждения взаимозаменяемы, достаточно доказать только первое утверждение. Заметим, что $e_G(a_2, G - W - W_1) \geqslant 1$ или $e_G(a_2, G - W - W_2) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $\mathbf{e_G(a_2, G - W - W_1) \geqslant 1}$ **(52)**. Тогда, по условию случая 4.2, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_1}$ **(53)**. Значит, $\mathbf{e_G(a_1, W_1) \geqslant 2}$ **(54)**. Если $e_G(a_2, G - W - W_2) \geqslant 1$, то, по (54), a_1 и a_2 смежны с различными вершинами в $G - W - W_2$, противоречие с (27). Значит, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_2}$ **(55)**. Заметим, что (53) и (55) доказывают требуемое.

$\square$

По Утверждению 2, $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_1$, $N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_2$ или $N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_1$, $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_2$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_1}$ **(56)**, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_2}$ **(57)**. Тогда, поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_1$ (56) и $e_G(W_2, \{a_1, a_4\}) \geqslant 1$ (26), $e_G(a_4, W_2) \geqslant 1$. Тогда, по Утверждению 2, $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) \subset W_1}$ **(58)**, $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G - W) \subset W_2}$ **(59)** (см. Рис. 8 a). По (56)-(59), $\mathbf{N_G(W) \subset W_1 \cup W_2}$ **(60)**. Заметим, что a_2 и a_3 взаимозаменяемы.

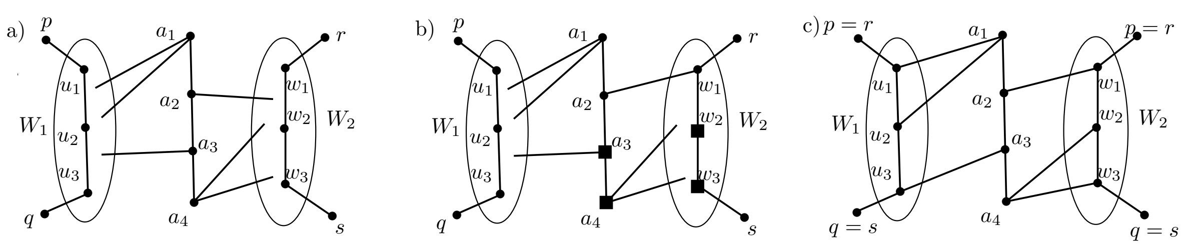

Figure 8: $G(W)$ – простой путь, $|W_1| = 3$, $|W_2| = 3$.

Поскольку $e_G(a_1, W_1) \geqslant 2$ (56) и $e_G(a_3, W_1) \geqslant 1$ (58), $W_1 \cup \{a_1, a_3\}$ связно. Поскольку это множество не стягиваемое и $e_G(a_4, W_2) \geqslant 2$ (59), $e_G(a_2, G - W - W_1) \leqslant 1$. Тогда, поскольку $N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_2$ (57), $\mathbf{e_G(a_2, G - W) = 1}$ **(61)**. Аналогично, $\mathbf{e_G(a_3, G - W) = 1}$ **(62)**.

Утверждение 3. *1) Предположим, $a_2w_1 \in E(G)$. Тогда $e_G(a_3, \{u_1, u_3\}) \geqslant 1$. Если $a_3u_1 \in E(G)$, то $s = p$. Если $a_3u_3 \in E(G)$, то $s = q$.*

2) Предположим, $a_2w_3 \in E(G)$. Тогда $e_G(a_3, \{u_1, u_3\}) \geqslant 1$. Если $a_3u_1 \in E(G)$, то $r = p$. Если $a_3u_3 \in E(G)$, то $r = q$.

3) Предположим, $a_3u_3 \in E(G)$. Тогда $e_G(a_2, \{w_1, w_3\}) \geqslant 1$. Если $a_2w_1 \in E(G)$, то $p = r$. Если $a_2w_3 \in E(G)$, то $p = s$.

4) Предположим, $a_3u_1 \in E(G)$. Тогда $e_G(a_2, \{w_1, w_3\}) \geqslant 1$. Если $a_2w_1 \in E(G)$, то $q = r$. Если $a_2w_3 \in E(G)$, то $q = s$.

Доказательство. Поскольку эти утверждения взаимозаменяемы, достаточно доказать 1). Итак, $\mathbf{a_2w_1 \in E(G)}$ **(63)** (см. Рис. 8 b). Поскольку $e_G(a_4, W_2) \geqslant 2$ (59), $\mathbf{X = \{a_3, a_4, w_2, w_3\}}$ **связно (64)**. Заметим, что $G - X$ не является простым циклом, потому что $G - W - W_2$ 2-связен. Значит, Лемма 3 может быть применена для X. По Лемме 3, есть два несмежных друг с другом пути в $N_G(X)$. Из набора фактов $N_G(a_4) \cap (G - W) \subset W_2$ (59), $N_G(a_3) \cap (G - W) \subset W_1$ (58) и $e_G(a_3, G - W) = 1$ (62) следует, что $N_G(X) = \{a_2, w_1, s\} \cup (N_G(a_3) \cap (G - W))$. Тогда, поскольку $e_G(a_3, G - W) = 1$ и $N_G(a_3) \cap (G - W) \subset W_1$, эти пути – это a_2w_1 и $s \cup (N_G(a_3) \cap (G - W) \subset W_1)$. Таким образом, 1) доказано.

$\square$

Случай 4.2.1. $e_G(a_2, \{w_1, w_3\}) \geqslant 1$ или $e_G(a_3, \{u_1, u_3\}) \geqslant 1$.

Не умаляя общности, $\mathbf{a_2w_1 \in E(G)}$ **(65)**. По Утверждению 3 (пункт 1), $e_G(a_3, \{u_1, u_3\}) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $\mathbf{a_3u_3 \in E(G)}$ **(66)**. Тогда, по Утверждению 3 (пункт 1), $s = q$. По Утверждению 3 (пункт 3), $p = r$. Из набора фактов (56)-(60), $e_G(a_3, G - W) = 1$ (62) и $a_3u_3 \in E(G)$ следует, что $\mathbf{a_1u_1}$, $\mathbf{a_1u_2 \in E(G)}$ **(67)**. Из набора фактов (56)-(60), $e_G(a_2, G - W) = 1$ (61) и $a_2w_1 \in E(G)$ следует, что $\mathbf{a_4w_2}$, $\mathbf{a_4w_3 \in E(G)}$ **(68)** (см. Рис. 8 c). Поскольку $e_G(a_3, G - W) = 1$ (62) и $a_3u_3 \in E(G)$ (66), $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) = \{u_3\}}$ **(69)**. Аналогично, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) = \{w_1\}}$ **(70)**. Если $a_1u_3 \in E(G)$, то $a_1u_2u_3$ – это цикл и $d_G(u_3) \geqslant 4$, $d_G(a_1) \geqslant 4$, противоречие с Леммой 6. Тогда, поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_1$ (56), $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_1, u_2\}}$ **(71)**. Аналогично, $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G - W) = \{w_2, w_3\}}$ **(72)**.

Если $V(G) \neq W \cup W_1 \cup W_2 \cup \{p, q\}$, то $\{p, q\}$ - разделяющее множество, потому что $\{p, q\} = \{r, s\}$ и $N_G(W) \subset W_1 \cup W_2$ (60). Значит, $V(G) = W \cup W_1 \cup W_2 \cup \{p, q\}$. Заметим, что все соседи вершин $a_1 - a_4$ зафиксированы (см. (69)-(72)). Значит, G - фиксированный граф (см. Рис. 9 a). Этот граф не содержит 5-стягиваемого множества (см. Рис. 1 a).

Случай 4.2.2. $e_G(a_2, \{w_1, w_3\}) = 0$ и $e_G(a_3, \{u_1, u_3\}) = 0$.

По (57) и (58), $N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_2$ и $N_G(a_3) \cap (G - W) \subset W_1$. Тогда, по условию случая, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) = \{w_2\}}$ **(73)** и $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) = \{u_2\}}$ **(74)**. Тогда, по (56)-(59), $\mathbf{a_1u_1, a_1u_3, a_4w_1, a_4w_3 \in E(G)}$ **(75)** (см. Рис. 9 b).

Предположим, $a_1u_2 \in E(G)$. Тогда $a_1u_2u_1$ – это цикл, и $d_G(a_1) \geqslant 4$, $d_G(u_2) \geqslant 4$, противоречие с Леммой 6.

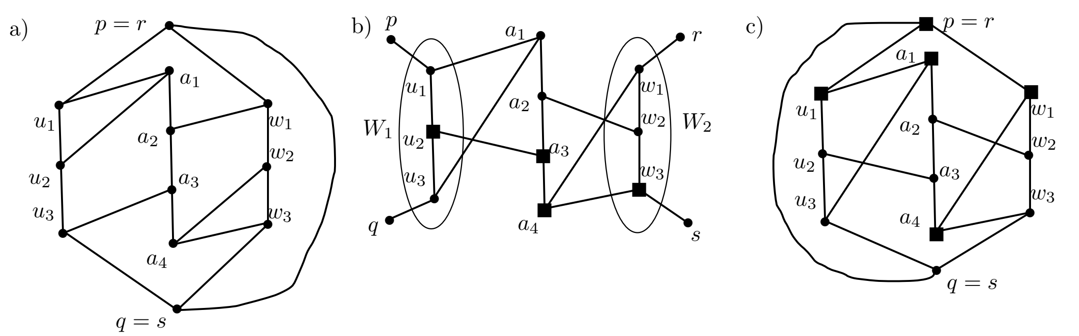

Figure 9: $G(W)$ – простой путь, $|W_1| = 3$, $|W_2| = 3$.

Значит, $a_1u_2 \notin E(G)$. Аналогично, $a_4w_2 \notin E(G)$. Тогда, по (56) и (59), $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_1, u_3\}}$ **(76)** и $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G - W) = \{w_1, w_3\}}$ **(77)**.

Утверждение 4. *В рамках этого случая* $\{p, q\} = \{r, s\}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $s \in \{p, q\}$, поскольку r и s взаимозаменяемы. Поскольку $a_4w_3 \in E(G)$ (75) и $a_3u_2 \in E(G)$ (74), $\mathbf{Y = \{w_3, a_3, a_4, u_2\}}$ **связно (78)**. В 2-связном графе $G - W - W_2$ есть простой pq-путь pW_1q. В графе $G - Y$ этот путь заменён на путь $u_1a_1u_3$ (75). Значит, Y стягиваемо, потому что $a_2w_2 \in E(G)$ (73). Заметим, что $G - Y$ не является простым циклом, потому что $d_{G-Y}(a_1) \geqslant 3$ ($a_1a_2, a_1u_1, a_1u_3 \in E(G)$ (75)). По Лемме 3, есть 2 несмежных друг с другом пути L_1, L_2 таких, что $Y \cup L_1$, $Y \cup L_2$ стягиваемы. Не умаляя общности, $w_2 \notin L_1$. В 2-связном графе $G - Y - L_1$, у w_2 есть хотя бы 2 соседа. Поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset W_1$ (76), эти соседи – это a_2, w_1. Значит, $a_2, w_1, w_2 \notin L_1$. По (56)-(59), (74) и (76), $N_G(Y) = \{u_1, u_3, a_2, w_2, w_1, s\}$. Значит, $L_1 \subset \{s, u_1, u_3\}$. Поскольку L_1 — это путь и $L_1 \neq u_1u_3$, $s \in L_1$. Значит, $su_1 \in E(G)$ или $su_3 \in E(G)$. Следовательно, $s \in \{p, q\}$.

□

Если $V(G) \neq W \cup W_1 \cup W_2 \cup \{p, q\}$, то $\{p, q\}$ – это разделяющее множество, потому что $\{p, q\} = \{r, s\}$ и $N_G(W) \subset W_1 \cup W_2$ (60). Значит, $\mathbf{V(G) = W \cup W_1 \cup W_2 \cup \{p, q\}}$ **(80)**.

Если $p = r$, $q = s$, то, поскольку все соседи у $a_1 - a_4$ зафиксированы, G - зафиксированный граф (см. Рис. 9 c). Этот граф содержит 5-стягиваемое множество $\{u_1, a_1, p, w_1, a_4\}$.

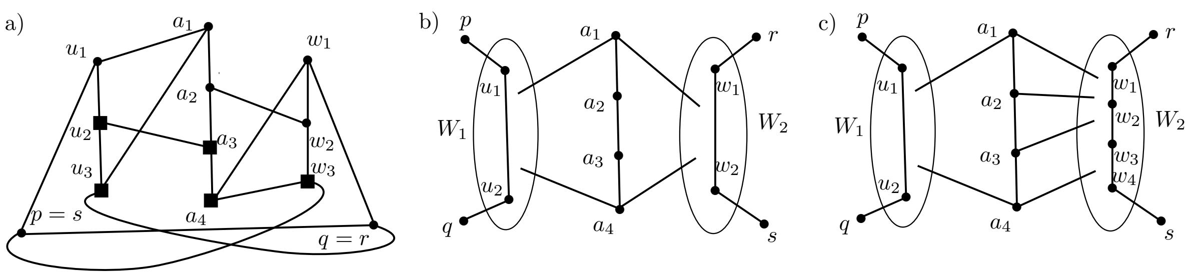

Figure 10: $G(W)$ – простой путь.

Если $p = s$, $q = r$, то, поскольку все соседи $a_1 - a_4$ зафиксированы, G - зафиксированный граф (см. Рис. 10 a). Этот граф содержит 5-стягиваемое множество $\{u_2, u_3, a_3, a_4, w_3\}$.

Случай 5. $|W_1| = |W_2| = 2$.

По Утверждению 1 (пункт 1) для обоих W_1, W_2, $e_G(a_1, W_1) = e_G(a_1, W_2) = e_G(a_4, W_1) = e_G(a_4, W_2) \geqslant 1$ (см. Рис. 10 b). По Утверждению 1 (пункт 1) для обоих W_1, W_2, $e_G(a_i, G - W - W_j) \leqslant 1$ для любых $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2\}$. Значит, для любого $t \in \{1, 4\}$, у a_t есть ровно 2 соседа, один сосед в W_1 и один сосед в W_2. Тогда, очевидно, любой конец пути W не может иметь двух соседей в $G - W$, которые смежны друг с другом. Это конфигурация 1.

Случай 6. $min(|W_1|, |W_2|) = 2$, $max(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$.

Не умаляя общности, $|W_1| = 2$ и $|W_2| \geqslant 4$. По Утверждению 1 (пункт 1) для W_1, $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$, $e_G(a_4, W_1) \geqslant 1$ и $e_G(a_i, G - W - W_1) \leqslant 1$ для любого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Значит, $|W_2| = 4$, и каждая вершина W имеет ровно одного соседа в W_2, все эти соседи различны (см. Рис. 10 c) и $N_G(W) = W_1 \cup W_2$. Следовательно, $|N_G(W)| = 6$. Это конфигурация 3.

□

Лемма 10. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G - W$ не является простым циклом и $G(W)$ изоморфно простому пути (см. Рис. 3). Как обычно, пусть $E(G(W)) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4\}$ (см., например, Рис. 11). Тогда G содержит 5-стягиваемое множество или W образует одну из конфигураций 1, 2, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. По Лемме 9, в этой лемме достаточно доказать, что, если W образует конфигурацию 3, то G содержит 5-стягиваемое множество. Итак, **W образует конфигурацию 3 (1)**. Наша цель – показать, что G содержит 5-стягиваемое множество, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.

Не умаляя общности, $|W_1| = 2$, $|W_2| = 4$, $\mathbf{e_G(a_1, W_1) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, W_1) \geqslant 1}$ **(2)**, **каждая вершина из W имеет ровно одного соседа в $\mathbf{W_2}$, все эти соседи различны (3)**. Дополнительно, $\mathbf{N_G(W) = W_1 \cup W_2}$ **и** $\mathbf{|N_G(W)| = 6}$ **(4)** (см. Рис. 10 c). Заметим, что $W \setminus \{a_1\}$, $W \setminus \{a_4\}$ связны, $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ и $e_G(a_4, W_1) \geqslant 1$ (2), $e_G(W \setminus \{a_1\}, W_2) \geqslant 1$ и $e_G(W \setminus \{a_4\}, W_2) \geqslant 1$ (3). Тогда, по Лемме 7 для W_2, $e_G(\{a_1, a_4\}, \{w_2, w_3\}) = 0$. Тогда, по (3), $a_1w_1, a_4w_4 \in E(G)$ или $a_1w_4, a_4w_1 \in E(G)$. Не умаляя общности, $\mathbf{a_1w_1, a_4w_4 \in E(G)}$ **(5)**. По (5) и (3), $\mathbf{a_2w_2, a_3w_3 \in E(G)}$ **или** $\mathbf{a_2w_3, a_3w_2 \in E(G)}$ **(6)**.

Предположим, что $a_2w_3, a_3w_2 \in E(G)$ (см. Рис. 11 a). Тогда, поскольку $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$, $X = W_1 \cup \{a_1, a_2, w_3\}$ связно. В 2-связном графе $G - W - W_1$, существует простой rs-путь rW_2s. В графе $G - X$ этот путь заменён на $rw_1w_2a_3a_4w_4s$ (5). Значит, $G - X$ связный. Тогда, по (6), X 5-стягиваемо.

Значит, по (6), $\mathbf{a_2w_2, a_3w_3 \in E(G)}$ **(7)** (см. Рис. 11 b). Вспомним, что $N_G(W) = W_1 \cup W_2$ (4). Тогда, по (3), $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W - W_1) = \{w_2\}}$ **и** $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W - W_1) = \{w_3\}}$ **(8)**. Очевидно, $\mathbf{N_G(W_2) \subset W \cup \{r, s\}}$ **(9)**. Заметим, что W_2 стягиваемо, потому что $W \cup W_2$ стягиваемо, $W_1 \subset N_G(W)$ и $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$, $e_G(a_4, W_1) \geqslant 1$ (2). По Лемме 9, $\mathbf{W_2}$ **образует одну из конфигураций 1, 2, 3 (10)**. Поскольку $|N_G(W_2)| \leqslant 6$ (9), $\mathbf{W_2}$ **не образует конфигурацию 2 (11)**. Тогда, по (10), $\mathbf{W_2}$ **образует одну из конфигураций 1, 3 (12)**.

Предположим, W_2 образует конфигурацию 1. Тогда, по условию этой конфигурации, есть 2 несмежных друг с другом пути L_1, L_2 таких, что $N_G(\{w_1, w_4\}) \cap (G - W_2) \subset L_1 \cup L_2$. Тогда, поскольку $w_1a_1, w_4a_4, w_1r, w_4s \in E(G)$ (5), $V(L_1 \cup L_2) = \{a_1, a_4, r, s\}$. Но $e_G(a_1, \{a_4, r, s\}) = 0$ (см. (4)), противоречие.

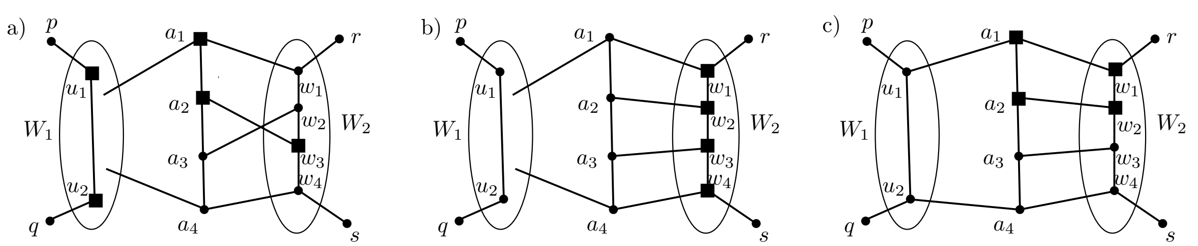

Figure 11: $G(W)$ – простой путь, W образует конфигурацию 3.

Тогда, по (12), W_2 образует конфигурацию 3. Тогда есть 2 несмежных друг с другом пути (по Лемме 3 для W_2) M_1, M_2 в $N_G(W_2)$ таких, что $|M_1| = 4$, $|M_2| = 2$. Поскольку $N_G(W) = W_1 \cup W_2$ (4) и $N_G(W_2) \subset W \cup \{r, s\}$, $M_1 = W$ и $M_2 = rs$. Тогда, по Лемме 3, $\mathbf{e_G(\{a_2, a_3\}, G - W - W_2) = 0}$ **(13)** и $\mathbf{e_G(a_1, G - W - W_2) = 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, G - W - W_2) = 1}$ **(14)**. По (13) и (14), $E_G(W_1, W) = \{u_1a_1, u_2a_4\}$ или $E_G(W_1, W) = \{u_1a_4, u_2a_1\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{E_G(W_1, W) = \{u_1a_1, u_2a_4\}}$ **(15)**. Тогда из набора фактов

(3), (4), (7) и (15) следует, что $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_1, w_1\}}$, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) = \{w_2\}}$, $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) = \{w_3\}}$, $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G - W) = \{u_2, w_4\}}$ **(16)** (см. Рис. 11 c).

Заметим, что (w_1, a_1, a_2) и (w_2, a_4, a_3) взаимозаменяемы (см. (16)).

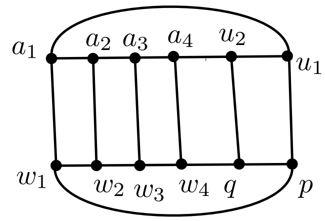

Figure 12: Этот граф не содержит 5-стягиваемого множества.

Заметим, что $T = \{w_1, w_2, a_1, a_2\}$ стягиваемое, потому что $w_4w_3a_3a_4u_2$ - путь (16). Поскольку $G - W - W_2$ 2-связен, $G - T$ не является простым циклом. Тогда, по Лемме 3, есть 2 несмежных друг с другом пути в $N_G(T)$. По (16), $N_G(T) = \{u_1, r, a_3, w_3\}$. Тогда, поскольку $a_3w_3 \in E(G)$ (16), эти пути – это a_3w_3 и u_1r. Значит, $\mathbf{p = r}$ (**17**). Аналогично, $\mathbf{q = s}$ (**18**). Если $V(G) \neq W_1 \cup W \cup W_2 \cup \{p, q\}$, то, поскольку $N_G(W) = W_1 \cup W_2$ (6), $\{p, q\}$ – разделяющее множество, противоречие с 3-связностью G. Значит, $V(G) = W_1 \cup W \cup W_2 \cup \{p, q\}$. Тогда, поскольку все соседи всех вершин W зафиксированы (16), G зафиксирован (см. Рис. 12). Этот граф не содержит 5-стягиваемого множества (см. Рис. 1 b).

□

Лемма 11. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G - W$ не является простым циклом и $G(W)$ изоморфно лапе (см. Рис. 3). Пусть $E(G(W)) = \{a_1a_4, a_2a_4, a_3a_4\}$ (см., например, Рис. 13). Тогда G содержит 5-стягиваемое множество или W образует одну из следующих конфигураций, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Конфигурация 4. *$|W_1| = |W_2| = 2$, $e_G(a_i, G - W - W_j) \leqslant 1$ для любых $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2\}$. Для любого $t \in \{1, 2, 3\}$, у a_t ровно 2 соседа, один сосед в W_1 и один сосед в W_2.*

Конфигурация 5. *$min(|W_1|, |W_2|) \geqslant 3$, $max(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$, существует 4-стягиваемый подпуть W_i, для какого-то $i \in \{1, 2\}$. В частности, $|N_G(W)| \geqslant 7$.*

Доказательство.

Утверждение 5. *1) Если $|W_i| = 2$, то все вершины a_1, a_2, a_3 смежны с W_i. Более того, $e_G(a_j, G - W - W_i) \leqslant 1$ для любого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

2) Если $|W_i| \geqslant 4$, то $N_G(\{a_j, a_t\}) \cap (G - W) \subset W_i$ для каких-то различных j, $t \in \{1, 2, 3\}$.

3) Если $|W_i| = 3$, то $e_G(a_j, G - W - W_i) \leqslant 1$, $e_G(a_t, G - W - W_i) \leqslant 1$ для каких-то различных j, $t \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. 1) Не умаляя общности, $|W_1| = 2$. По Лемме 8, все вершины a_1, a_2, a_3 смежны с W_1. Значит, $W_1 \cup (W \setminus \{a_j\})$ связно для любого j. Поскольку это множество не является стягиваемым, $e_G(a_j, G - W - W_1) \leqslant 1$ для любого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2) Не умаляя общности, $|W_1| \geqslant 4$. Заметим, что **если $\mathbf{u_5}$ существует, то $\mathbf{e_G(u_5, W) \geqslant 1}$ (1)**.

Предположим, у всех вершин a_1, a_2, a_3 есть соседи в $G - W - \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ (см. Рис. 13 a). Тогда $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваемо, потому что $W_1 \cup W$ стягиваемо, $W_2 \subset N_G(W)$ и (1). Это конфигурация 5.

Значит, $N_G(a_i) \cap (G - W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ для какого-то $i \in \{1, 2, 3\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) \subset \{u_1, u_2, u_3, u_4\}}$ **(2)**. Значит, **если $\mathbf{u_5}$ существует, то $\mathbf{e_G(u_5, W \setminus \{a_1\}) \geqslant 1}$ (3)**. По (2), $\mathbf{W_2 \subset N_G(\{a_2, a_3, a_4\}) \cap (G - W)}$ **(4)**.

Предположим, что $e_G(a_2, G - W - W_1) \geqslant 1$ и $e_G(a_3, G - W - W_1) \geqslant 1$ (см. Рис. 13 b). По (2), $\{a_1, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ связно. Это множество стягиваемо, потому что $e_G(a_2, G - W - W_1) \geqslant 1$ и $e_G(a_3, G - W - W_1) \geqslant 1$, $W_2 \subset N_G(\{a_2, a_3, a_4\}) \cap (G - W)$ (4) и (3).

Значит, $e_G(a_2, G - W - W_1) = 0$ или $e_G(a_3, G - W - W_1) = 0$. Тогда, по (2), 2) доказано.

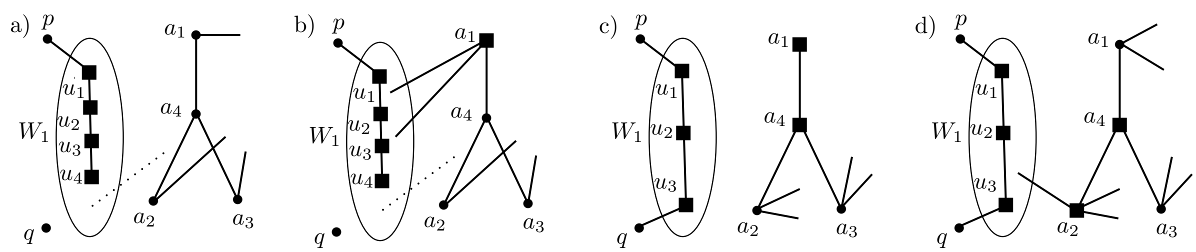

Figure 13: $G(W)$ – лапа, $|W_1| \geqslant 4$.

3) Не умаляя общности, $|W_1| = 3$. Предположим противное. Тогда существуют две вершины a_j, a_t в $\{a_1, a_2, a_3\}$ такие, что $e_G(a_j, G - W - W_1) \geqslant 2$ и $e_G(a_t, G - W - W_1) \geqslant 2$. Не умаляя общности, $\mathbf{e_G(a_2, G - W - W_1) \geqslant 2}$ **и** $\mathbf{e_G(a_3, G - W - W_1) \geqslant 2}$ **(5)** (см. Рис. 13 c). Тогда, если $W_1 \cup \{a_1, a_4\}$ связно, то это множество стягиваемо. Значит, $\mathbf{W_1 \cup \{a_1, a_4\}}$ **несвязно (6)**. Следовательно, $\mathbf{e_G(a_1, G - W - W_1) \geqslant 2}$ **(6)**. Поскольку $W_1 \cup \{a_1, a_4\}$ несвязно, $e_G(a_2, W_1) \geqslant 1$ или $e_G(a_3, W_1) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $\mathbf{e_G(a_2, W_1) \geqslant 1}$ **(7)** (см. Рис. 13 d). Значит, $W_1 \cup \{a_2, a_4\}$ связно. Это множество стягиваемо, потому что $e_G(a_1, G - W - W_1) \geqslant 2$ (6) и $e_G(a_3, G - W - W_1) \geqslant 2$.

□

Предположим, что $max(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$. Не умаляя общности, $|W_1| \geqslant 4$. По Утверждению 5 (пункт 2), $N_G(\{a_j, a_t\}) \cap (G - W) \subset W_1$ для каких-то различных $j, t \in \{1, 2, 3\}$. Не умаляя общности, $N_G(\{a_1, a_2\}) \cap (G - W) \subset W_1$. Значит, $e_G(a_1, W_1) \geqslant 2$ и $e_G(a_2, W_1) \geqslant 2$. Если $|W_2| = 2$, то, по Утверждению 5 (пункт 1), $e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1$, противоречие. Если $|W_2| = 3$, то, по Утверждению 5 (пункт 3), существуют 2 вершины в $\{a_1, a_2, a_3\}$ таких, что у них нет соседей в $G - W - W_2$, противоречие. Следовательно, $|W_2| \geqslant 4$. Тогда, по Утверждению 5 (пункт 2), есть не менее 2 вершины в $\{a_1, a_2, a_3\}$ такие, что у них нет соседей в $G - W - W_2$, противоречие.

Значит, $\mathbf{|W_1| \leqslant 3}$, $\mathbf{|W_2| \leqslant 3}$ **(8)**. Предположим, что существует $xy \in E(G(W))$ такое, что $N_G(x) \cap N_G(y) \cap (G - W) \neq \varnothing$. Не умаляя общности, $a_4t, a_3t \in E(G)$ для какого-то $t \in V(G - W)$. Тогда ta_4a_3 является простым циклом, $d_G(t) \geqslant 4$ и $d_G(a_4) \geqslant 4$, противоречие с Леммой 6. Следовательно, **если $\mathbf{xy \in E(G(W))}$, то $\mathbf{N_G(x) \cap N_G(y) \cap (G - W) = \varnothing}$ (9)**. По (8), имеет место один из следующих случаев.

Случай 1. $|W_1| = |W_2| = 3$, $e_G(a_4, G - W) \geqslant 1$.

Не умаляя общности, $\mathbf{e_G(a_4, G - W - W_1) \geqslant 1}$ **(10)**. По Утверждению 5 (пункт 3) для W_2, есть не менее 2 вершины в $\{a_1, a_2, a_3\}$, которые смежны с W_2. Не умаляя общности,

$\mathbf{e_G(a_2, W_2) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_3, W_2) \geqslant 1}$ **(11)** (см. Рис. 14 a). По Утверждению 5 (пункт 3) для W_1, есть не менее две вершины в $\{a_1, a_2, a_3\}$, смежные с W_1.

Значит, если $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$, то $e_G(a_2, W_1) \geqslant 1$ или $e_G(a_3, W_1) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ и $e_G(a_2, W_1) \geqslant 1$ (см. пунктирные рёбра на Рис. 14 a). Тогда $W_1 \cup \{a_1, a_2\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $e_G(a_3, G - W - W_1) \geqslant 1$ (11), $e_G(a_4, G - W - W_1) \geqslant 1$ (10) и a_3, a_4 смежны с различными вершинами $G - W - W_1$ по (9).

Следовательно, $\mathbf{e_G(a_1, W_1) = 0}$ **(12)**. Значит, $\mathbf{e_G(a_1, G - W - W_1) \geqslant 2}$ **(13)**. По Утверждению 5 (пункт 3) для W_1, не менее две вершины из $\{a_1, a_2, a_3\}$ смежны с W_1. Тогда, по (12), $\mathbf{e_G(a_2, W_1) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_3, W_1) \geqslant 1}$ **(14)** (см. Рис. 14 b). Значит, $W_1 \cup \{a_2, a_3\}$ связно. Это множество стягиваемо, так как $e_G(a_1, G - W - W_1) \geqslant 2$ (13), $e_G(a_4, G - W - W_1) \geqslant 1$ (10).

Случай 2. $|W_1| = |W_2| = 3$, $e_G(a_4, G - W) = 0$.

В этом случае, $\mathbf{e_G(a_4, G - W) = 0}$ **(15)**.

Предположим, что $N_G(\{u_1, u_3\}) \cap N_G(W_2) \cap \{a_1, a_2, a_3\} \neq \varnothing$. Не умаляя общности, $e_G(a_1, \{u_1, u_3\}) \geqslant 1$, $e_G(a_1, W_2) \geqslant 1$. По Утверждению 5 (пункт 3), есть не менее двух вершин из множества $\{a_1, a_2, a_3\}$, которые смежны с W_1. Значит, $e_G(W \setminus \{a_1\}, W_1) \geqslant 1$. Тогда, по Лемме 7 для W_1, G содержит 5-стягиваемое множество.

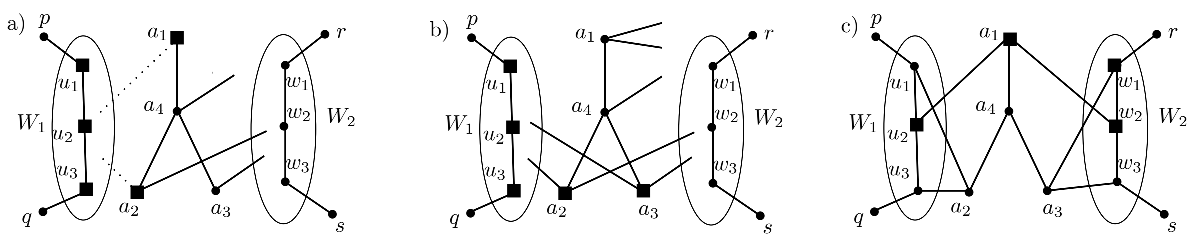

Figure 14: $G(W)$ – лапа, $|W_1| = 3$, $|W_2| = 3$.

Следовательно, $\mathbf{N_G(\{u_1, u_3\}) \cap N_G(W_2) \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \varnothing}$ **(16)**. Аналогично, $\mathbf{N_G(\{w_1, w_3\}) \cap N_G(W_1) \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \varnothing}$ **(17)**.

По Утверждению 5 (пункт 3) для W_2, $e_G(a_j, G - W - W_2) \leqslant 1$, $e_G(a_t, G - W - W_2) \leqslant 1$ для каких-то различных j, $t \in \{1, 2, 3\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1}$ **и** $\mathbf{e_G(a_3, G - W - W_2) \leqslant 1}$ **(18)**. Значит, $\mathbf{e_G(a_1, W_2) \geqslant 1}$ **и** $\mathbf{e_G(a_3, W_2) \geqslant 1}$ **(19)**. Тогда, по (16), $e_G(\{u_1, u_3\}, \{a_1, a_3\}) = 0$. Тогда, поскольку $e_G(a_4, G - W) = 0$ (15), $\mathbf{N_G(\{u_1, u_3\}) \cap W = \{a_2\}}$ **(20)**. Аналогично, можно вывести, что $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W = \{a_{j_0}\}$ для какого-то $j_0 \in \{1, 2, 3\}$. По (17) и (20), $j_0 \in \{1, 3\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W = \{a_3\}}$ **(21)**. По Утверждению 5 (пункт 3) для W_1, $e_G(a_{j_0}, G - W - W_1) \leqslant 1$, $e_G(a_{t_0}, G - W - W_1) \leqslant 1$ для каких-то различных j_0, $t_0 \in \{1, 2, 3\}$. Тогда, по (21), $\mathbf{e_G(a_1, G - W - W_1) \leqslant 1}$ **и** $\mathbf{e_G(a_2, G - W - W_2) \leqslant 1}$ **(22)**. По (18) и (22), $e_G(a_1, G - W - W_1) \leqslant 1$ и $e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1$. Тогда, по (20) и (21), $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_2, w_2\}}$ **(23)** (см. Рис. 14 c). Тогда $\mathbf{A = \{u_2, a_1, w_2, w_1\}}$ **является простым путём (24)**. В 2-связном графе $G - W - W_2$ есть простой pq-путь pW_1q. В графе $G - A$ этот путь заменён на $pu_1a_2u_3q$ (20). Значит, $G - A$ 2-связен, потому что $w_3a_4a_2$ – путь (21) и $u_1a_2, u_3a_2 \in E(G)$ (20). Тогда, по (24), A стягиваемо. Заметим, что $G - A$ не является простым циклом, потому что $d_{G-A}(a_2) \geqslant 3$ (a_2u_1, a_2u_3, $a_2a_4 \in E(G)$ (20)). Тогда, по Лемме 10, **A образует одну из конфигураций 1, 2 (25)**. Если $a_2u_2 \in E(G)$, то $a_2u_2u_3$ – просто цикл, $d_G(u_2) \geqslant 4$, $d_G(a_2) \geqslant 4$, противоречие с Леммой 6. Значит, $\mathbf{u_2a_2 \notin E(G)}$ **(26)**.

Предположим, что $e_G(a_2, W_2) \geqslant 1$. Заметим, что $W \setminus \{a_2\}$ связно. Поскольку $a_1u_2 \in E(G)$ (23), $e_G(W \setminus \{a_2\}, W_1) \geqslant 1$. Тогда, по Лемме 7 для W_1, G содержит 5-стягиваемое множество.

Значит, $e_G(a_2, W_2) = 0$. Аналогично, $\mathbf{e_G(a_3, W_1) = 0}$ **(27)**. Тогда, по (26), $e_G(a_2, A) = 0$. Тогда, поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_2, w_2\}$ (23), $N_G(A) = \{r, w_3, a_3, a_4, u_1, u_3\}$. Значит, $|N_G(A)| \leqslant 6$. Следовательно, A не образует конфигурацию 2. Тогда, по (25), A образует конфигурацию 1. В этой конфигурации $N_G(\{u_2, w_1\}) \cap (G - A) \subset L_1 \cup L_2$, где L_1, L_2 – 2 несмежных друг с другом пути из Леммы 3 для A и $|L_1| = |L_2| = 2$. Поскольку $u_2u_1, u_2u_3, w_1r, w_1a_3 \in E(G)$, вершины из $\{u_1, u_3, a_3, r\}$ образуют 2 несмежных друг с другом пути. Поскольку $e_G(a_3, W_1) = 0$ (27), $e_G(a_3, \{u_1, u_3\}) = 0$. Следовательно, эти пути – u_1u_3, a_3r, противоречие с $u_1u_3 \notin E(G)$.

Случай 3. $min(|W_1|, |W_2|) = 2$, $max(|W_1|, |W_2|) = 3$.

Не умаляя общности, $|W_1| = 2$, $|W_2| = 3$. По Утверждению 5 (пункт 1) для W_1, $\mathbf{e_G(a_1, W_1) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_2, W_1) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_3, W_1) \geqslant 1}$ **(28)** и $\mathbf{e_G(a_i, G - W - W_1) \leqslant 1}$ **для любого** $\mathbf{i \in \{1, 2, 3\}}$ **(29)**. По (29), $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W \neq \{a_4\}$. Следовательно, $e_G(\{w_1, w_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $\mathbf{w_1a_1 \in E(G)}$ **(30)**. По Утверждению 5 (пункт 3) для W_2, есть не менее двух вершин из $\{a_1, a_2, a_3\}$, смежных с W_2. Значит, $e_G(W \setminus \{a_1\}, W_2) \geqslant 1$. Вспомним (30) и $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ (28). Тогда, по Лемме 7 для W_2, G содержит 5-стягиваемое множество.

Случай 4. $|W_1| = 2$, $|W_2| = 2$.

Применив Утверждение 5 (пункт 1) для обоих W_1, W_2, можно вывести, что $e_G(a_i, G - W - W_j) \leqslant 1$ для любых $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2\}$. Более того, для любого $t \in \{1, 2, 3\}$, у a_t ровно 2 соседа в $G - W$, один сосед в W_1 и один сосед в W_2. Это конфигурация 4.

□

Лемма 12. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G - W$ не является простым циклом и $G(W)$ изоморфно простому пути (см. Рис. 3). Тогда G содержит 5-стягиваемое множество или W образует конфигурацию 2, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. Как обычно, пусть $E(G(W)) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4\}$ (см., например, Рис. 15). По Лемме 10, W образует одну из конфигураций 1, 2. Значит, W образует конфигурацию 1. Доказательство этой леммы состоит из серии Утверждений. **Как только утверждение доказано, оно выполнено для любого множества, образующего конфигурацию 1 (0).**

По условию конфигурации 1, $|W_1| = |W_2| = 2$, $\mathbf{e_G(a_i, G - W - W_j) \leqslant 1}$ **для любых** $\mathbf{i \in \{1, 2, 3, 4\}}$, $\mathbf{j \in \{1, 2\}}$ **(1). Для любого** $\mathbf{t \in \{1, 4\}}$, $\mathbf{a_t}$ **имеет ровно 2 соседей в** $\mathbf{G - W}$**, один сосед в** $\mathbf{W_1}$ **и один сосед в** $\mathbf{W_2}$ **(2). Любой конец пути** $\mathbf{W}$ **не может иметь двух соседе в** $\mathbf{G - W}$ **, которые смежны друг с другом (3).**

Утверждение 6. *Предположим, что $T \subset W \cup W_i$ для какого-то $i \in \{1, 2\}$, $|T| = 4$ и $T \neq W$. Тогда $|N_G(T)| \leqslant 6$.*

Доказательство. Не умаляя общности, $T \subset W_1 \cup W$.

Предположим, что $W_1 \subset T$. Тогда $T = W_1 \cup \{a_x, a_y\}$ для каких-то различных $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$. Следовательно, $N_G(T) \subset \{p, q\} \cup (W \setminus \{a_x, a_y\}) \cup (N_G(\{a_x, a_y\}) \cap (G - W - W_1))$.

По условию конфигурации 1, $e_G(a_i, G - W - W_1) \leqslant 1$ для любого $i \in \{x, y\}$. Следовательно, $|N_G(\{a_x, a_y\}) \cap (G - W - W_1)| \leqslant 2$. Значит, $|N_G(T)| \leqslant 6$.

Следовательно, $W_1 \not\subset T$. Но $T \subset W_1 \cup W$ и $T \neq W$. Тогда $|T \cap W_1| = 1$ и $|T \cap W| = 3$. Не умаляя общности, $u_1 \in T$. Следовательно, $T = \{u_1, a_x, a_y, a_t\}$ для каких-то различных $x, y, t \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда $N_G(T) \subset \{p, u_2\} \cup (W \setminus \{u_1, a_x, a_y, a_t\}) \cup (N_G(\{u_1, a_x, a_y, a_t\}) \cap (G - W - W_1))$. По условию конфигурации 1, $e_G(a_i, G - W - W_1) \leqslant 1$ для любого $i \in \{x, y, t\}$. Следовательно, $|N_G(\{a_x, a_y, a_t\}) \cap (G - W - W_1)| \leqslant 3$. Значит, $|N_G(T)| \leqslant 6$.

□

Утверждение 7. *У a_1 и a_4 – различные соседи в обоих путях W_1 и W_2.*

Доказательство. Предположим противное, a_1 и a_4 не имеют различных соседей в W_2. По условию конфигурации 1, a_1 и a_4 смежны с W_2. Значит, они имеют общего соседа в W_2. Не умаляя общности, $\mathbf{a_1 w_2}$, $\mathbf{a_4 w_2 \in E(G)}$ (**4**). По условию конфигурации 1, $e_G(a_1, W_2) = e_G(a_4, W_2) = 1$. Значит, $\mathbf{a_1 w_1}$, $\mathbf{a_4 w_1 \notin E(G)}$ (**5**). Следовательно, $\mathbf{e_G(w_1, \{a_2, a_3\}) \geqslant 1}$ (**6**). Пусть $\mathbf{Y = N_G(w_1) \cap W}$ (**7**). Поскольку $e_G(w_1, \{a_2, a_3\}) \geqslant 1$ (6), $Y \neq \varnothing$. По (5), $\mathbf{Y \subset \{a_2, a_3\}}$ (**8**). Тогда имеет место один из следующих случаев.

Случай 1. $Y = \{a_2, a_3\}$.

По (7), $\mathbf{\{a_2, a_3\} = N_G(w_1) \cap W}$ (**9**) (см. Рис. 15 a). Заметим, что $w_1 a_2 a_3$ – цикл, $d_G(w_1) \geqslant 4$. Тогда, по Лемме 6, $d_G(a_2) = 3$, $d_G(a_3) = 3$. Значит, по (9), $\mathbf{N_G(\{a_2, a_3\}) \cap (G - W) = \{w_1\}}$ (**10**). Тогда, по (2), $E_G(W_1, W) = \{a_1 u_1, a_4 u_2\}$ или $E_G(W_1, W) = \{a_1 u_2, a_4 u_1\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{E_G(W_1, W) = \{a_1 u_1, a_4 u_2\}}$ (**11**) (см. пунктирные рёбра на Рис. 15 a). Значит, $W_1 \cup \{a_4, a_3\}$ – простой путь. Это множество стягиваемое, потому что $a_2 w_1, a_1 w_2 \in E(G)$ (9), (4). По Утверждению 6, $|N_G(W_1 \cup \{a_4, a_3\})| \leqslant 6$. Тогда $W_1 \cup \{a_4, a_3\}$ не образует конфигурацию 2. Тогда, по Лемме 10, $W_1 \cup \{a_4, a_3\}$ образует конфигурацию 1. По условию конфигурации 1, a_3 (конец пути $W_1 \cup \{a_4, a_3\}$) не имеют двух соседей в $G - (W_1 \cup \{a_4, a_3\})$, смежных друг с другом. Но $a_3 a_2, a_3 w_1, a_2 w_1 \in E(G)$ (9), противоречие.

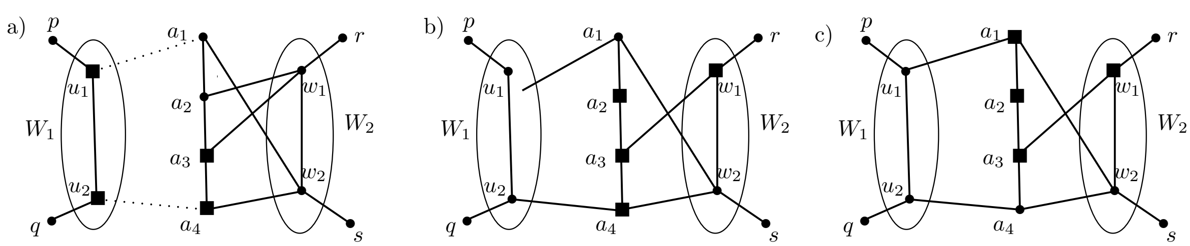

Figure 15: $G(W)$ – простой путь, W образует конфигурацию 1.

Случай 2. $Y = \{a_2\}$ или $Y = \{a_3\}$.

Не умаляя общности (см. (1)-(8)), $Y = \{a_3\}$. Тогда, по (7), $\mathbf{N_G(w_1) \cap W = \{a_3\}}$ (**12**). По (2), a_4 смежно с W_1. Не умаляя общности, $\mathbf{a_4 u_2 \in E(G)}$ (**13**) (см. Рис. 15 b). Значит, $\mathbf{A = \{w_1, a_2, a_3, a_4\}}$ **– лапа (14)**. Заметим, что A стягиваемо, потому что $w_2 a_1 \in E(G)$ (4) и $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ (2). Заметим, что $G - A$ не является простым циклом, потому что $G - W - W_2$ 2-связен. По Утверждению 6, $|N_G(A)| \leqslant 6$. По Лемме 11, A образует одну из конфигураций 4, 5. Поскольку $|N_G(A)| \leqslant 6$, A не образует конфигурацию 5. Значит, A образует конфигурацию 4. По условию этой конфигурации, существуют 2 несмежных друг с другом пути L_1, L_2 таких, что $|L_1| = 2$, $|L_2| = 2$ и **все соседи $\mathbf{a_4}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{w_1}$ в $\mathbf{G - A}$ находятся в $\mathbf{L_1 \cup L_2}$ (15)**. Поскольку a_1 – сосед a_2 в $G - A$ и w_2 – сосед w_1 в $G - A$, w_2 и a_1 находятся в $L_1 \cup L_2$. Поскольку $w_2a_1 \in E(G)$ (4), $L_1 = a_1w_2$ или $L_2 = a_1w_2$. Не умаляя общности, $\mathbf{L_1 = a_1w_2}$ **(16)**. Вспомним (15). Вспомним, что $a_4u_2, w_1r \in E(G)$ (13). Значит, $\mathbf{L_2 = u_2r}$ **(17)**. Значит, $\mathbf{r = q}$ **(18)**. Вспомним (16), (17) и $e_G(L_1, L_2) = 0$. Значит, $a_1u_2 \notin E(G)$. По (2), $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$. Значит, $\mathbf{a_1u_1 \in E(G)}$ **(19)** (см. Рис. 15 c). Поскольку $N_G(w_1) \cap W = \{a_3\}$, $\mathbf{B = \{w_1, a_3, a_2, a_1\}}$ **– простой путь (20)**. По Утверждению 6, $\mathbf{|N_G(B)| \leqslant 6}$ **(21)**. Заметим, что B стягиваемо, потому что $w_2a_4u_2$ – путь (4), (13). Заметим, что $G - B$ не является простым циклом, так как $G - W - W_2$ 2-связен. Тогда, по Лемме 10, B образует одну из конфигураций 1, 2. Поскольку $|N_G(B)| \leqslant 6$ (21), B не образует конфигурацию 2. Значит, B образует конфигурацию 1. В этой конфигурации соседи концов путей (a_1 и w_1) образуют два несмежных друг с другом пути M_1 и M_2 таких, что $\mathbf{e_G(a_1, M_i) = 1}$, $\mathbf{e_G(w_1, M_i) = 1}$ **для любого $\mathbf{i \in \{1, 2\}}$ (22)**. Поскольку $a_1w_2, w_1w_2 \in E(G)$, w_2 находится в одном из путей. Не умаляя общности, $w_2 \in M_2$. Поскольку $a_1u_1, w_1r \in E(G)$ (19) и (22), u_1r – второй путь. Значит, $p = r$, противоречие с $r = q$ (18).

□

Вспомним (2). Вспомним, что Утверждение 7 доказано. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_1, w_1\}}$ **и** $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G - W) = \{u_2, w_2\}}$ **(23)**.

Утверждение 8. *$e_G(a_2, G - W) = 1$, $e_G(a_3, G - W) = 1$.*

Доказательство. Поскольку a_2 и a_3 взаимозаменяемы (см. (1)-(3) и (23)), достаточно показать, что $e_G(a_3, G - W) = 1$. Предположим противное, $\mathbf{e_G(a_3, G - W) \geqslant 2}$ **(24)**. Значит, $\mathbf{d_G(a_3) \geqslant 4}$ **(25)**.

Предположим, $a_3u_2 \in E(G)$ или $a_3w_2 \in E(G)$. Не умаляя общности (см. (1)-(3) и (23)), $a_3u_2 \in E(G)$ (см. Рис. 16 a). Заметим, что $u_2a_3a_4$ – цикл, $d_G(u_2) \geqslant 4$, $d_G(a_3) \geqslant 4$ (25), противоречие с Леммой 6. Значит, $\mathbf{a_3u_2}$, $\mathbf{a_3w_2 \notin E(G)}$ **(26)**.

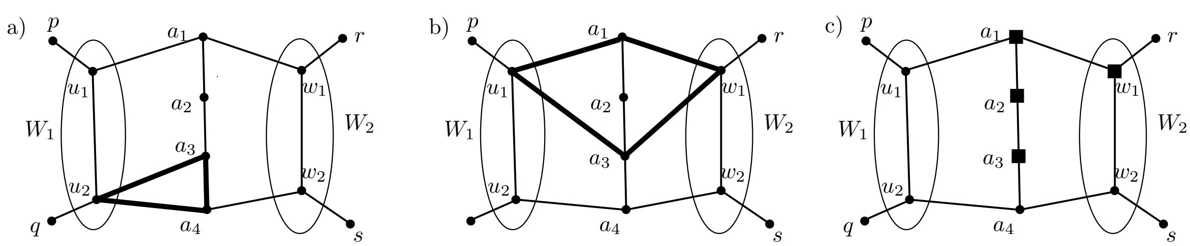

Figure 16: $G(W)$ – простой путь, W образует конфигурацию 1.

По (1), $e_G(a_3, G - W - W_1) \leqslant 1$ и $e_G(a_3, G - W - W_2) \leqslant 1$. Тогда, поскольку $e_G(a_3, G - W) \geqslant 2$ (24), $e_G(a_3, W_1) = 1$, $e_G(a_3, W_2) = 1$. По (26), a_3u_2, $a_3w_2 \notin E(G)$. Следовательно, $\mathbf{a_3u_1, a_3w_1 \in E(G)}$ **(27)** (см. Рис. 16 b). Значит, $u_1a_1w_1a_3$ – цикл (23), $d_G(u_1) \geqslant 4$, $d_G(w_1) \geqslant 4$, $d_G(a_3) \geqslant 4$ (25), противоречие с Леммой 6.

□

Утверждение 9. *Предположим, в G есть путь $a_1a_2a_3a_4$ такой, что $G(\{a_1, a_2, a_3, a_4\})$ – простой путь и образует конфигурацию 1. Пусть $a_1x \in E(G)$, где $x \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Тогда $\{x, a_1, a_2, a_3\}$ стягиваемое, $G - \{x, a_1, a_2, a_3\}$ не является простым циклом и $|N_G(\{x, a_1, a_2, a_3\})| \leqslant 6$.*

Доказательство. Вспомним (23). Не умаляя общности, $x = w_1$. Заметим, что $T_0 = \{w_1, a_1, a_2, a_3\}$ стягиваемо, потому что $w_2 a_4 u_2$ – путь (23) (см. Рис. 16 с). По Утверждению 6, $|N_G(T_0)| \leqslant 6$. Поскольку $G - W - W_2$ 2-связен, $G - W_0$ не является простым циклом.

□

Утверждение 10. *$e_G(\{a_2, a_3\}, W_1) = 0$ или $e_G(\{a_2, a_3\}, W_2) = 0$.*

Доказательство. Предположим противное, $e_G(\{a_2, a_3\}, W_1) \geqslant 1$ и $e_G(\{a_2, a_3\}, W_2) \geqslant 1$. По Утверждению 8, $e_G(a_2, G - W) = 1$, $e_G(a_3, G - W) = 1$. Тогда, не умаляя общности, $\mathbf{e_G(a_3, W_1) = 1}$, $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) \subset W_1}$ **(28)** и $\mathbf{e_G(a_2, W_2) = 1}$, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) \subset W_2}$ **(29)**.

Предположим, $a_2 u_1 \in E(G)$ или $a_3 w_2 \in E(G)$. Не умаляя общности, $a_2 u_1 \in E(G)$ (см. Рис. 17 a). Тогда, по (28) и (29), $\{u_2, a_4, a_3, a_2\}$ – простой путь. По Утверждению 6, $|N_G(\{u_2, a_4, a_3, a_2\})| \leqslant 6$. Заметим, что это множество стягиваемо, потому что $u_1 a_1 w_1$ – путь (23). Тогда, по Лемме 10, это множество образует конфигурацию 1. Но a_2 смежно с 2 вершинами, которые смежны друг с другом (a_1 и u_1), противоречие с условием конфигурации 1.

Значит, $a_2 u_1, a_3 w_2 \notin E(G)$. Тогда, по (28) и (29), $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) = \{u_2\}}$ **и** $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) = \{u_1\}}$ **(30)** (см. Рис. 17 b). Тогда, по (23), $\mathbf{N_G(W) = W_1 \cup W_2}$ **(31)**. По (30) и (23), $\mathbf{\{a_2, a_3, a_4, w_2\}}$ **– стягиваемый простой путь (32)**. По Утверждению 1, $|N_G(\{a_2, a_3, a_4, w_2\})| \leqslant 6$. Заметим, что $G - \{a_2, a_3, a_4, w_2\}$ не является простым циклом, потому что $G - W - W_2$ 2-связен. Тогда, по Лемме 10, $\{a_2, a_3, a_4, w_2\}$ образует конфигурацию 1. В этой конфигурации, соседи концов путей (a_2, w_2) в $G - \{a_2, a_3, a_4, w_2\}$ образует 2 несмежных друг с другом пути. По (23) и (30), эти соседи – a_1, w_1, s, u_2. Тогда, поскольку $a_1 w_1 \in E(G)$, эти пути – $a_1 w_1$ и $s u_2$. Значит, $s = q$. Аналогично, можно вывести, что $p = r$. Значит, $\{p, q\} = \{r, s\}$. Поскольку $v(G) \geqslant 11$ и $N_G(W) = W_1 \cup W_2$ (31), $\{p, q\}$ – разделяющее множество, противоречие.

□

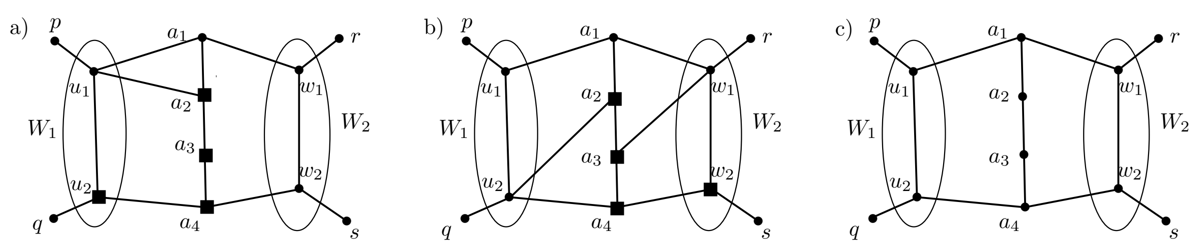

Figure 17: $G(W)$ – простой путь, W образует конфигурацию 1.

Утверждение 11. *Все вершины W имеют степень 3.*

Доказательство. Это очевидно следует из Утверждения 8 и (23).

□

Утверждение 12. *Если $e_G(\{a_2, a_3\}, W_1) = 0$, то $e_G(\{a_2, a_3\}, W_2) = 0$, a_2, a_3 смежны с различными вершинами в $G - W - W_1$, $qr, ps \in E(G)$, p, q, r, s различны. Если $e_G(\{a_2, a_3\}, W_2) = 0$, то $e_G(\{a_2, a_3\}, W_1) = 0$, a_2, a_3 смежны с различными вершинами в $G - W - W_2$, $qr, ps \in E(G)$, p, q, r, s различны.*

Доказательство. Так как эти утверждения взаимозаменяемы, достаточно доказать только второе утверждение. Не умаляя общности, $\mathbf{e_G(\{a_2,a_3\},W_2)=0}$ (**33**) (см. Рис. 17 c).

По Утверждению 9, $Y_0=\{w_1,a_1,a_2,a_3\}$ стягиваемое, $G-Y_0$ не является простым циклом и $|N_G(Y_0)|\leqslant 6$. Поскольку $e_G(\{a_2,a_3\},W_2)=0$ (33) и $N_G(a_1)\cap(G-W)=\{u_1,w_1\}$ (23), Y_0 – простой путь (см. Рис. 17 c). По Лемме 10, Y_0 образует конфигурацию 1, потому что $|N_G(Y_0)|\leqslant 6$. Значит, Утверждение 9 можно применить для Y_0. Заметим, что $w_1w_2\in E(G)$.

По Утверждению 9, $Y_1=\{w_2,w_1,a_1,a_2\}$ стягиваемое, $G-Y_1$ не является простым циклом и $|N_G(Y_1)|\leqslant 6$. Поскольку $e_G(\{a_2,a_3\},W_2)=0$ (33) и $N_G(a_1)\cap(G-W)=\{u_1,w_1\}$ (23), Y_1 – простой путь (см. Рис. 17 c). По Лемме 10, Y_1 образует конфигурацию 1, потому что $|N_G(Y_1)|\leqslant 6$. Значит, Утверждение 9 можно применить для Y_1. По (23), $w_2a_4\in E(G)$.

По Утверждению 9, $Y_2=\{a_4,w_2,w_1,a_1\}$ стягиваемое, $G-Y_2$ не является простым циклом и $|N_G(Y_2)|\leqslant 6$. Поскольку Y_2 стягиваемо, $\mathbf{a_2}$ **и** $\mathbf{a_3}$ **смежны с различными вершинами в** $\mathbf{G-W-W_2}$ (**34**). Поскольку $e_G(\{a_2,a_3\},W_2)=0$ (33) и $N_G(a_1)\cap(G-W)=\{u_1,w_1\}$, $N_G(a_4)\cap(G-W)=\{u_2,w_2\}$ (23), Y_2 – простой путь (см. Рис. 17 c). По Лемме 10, Y_2 образует конфигурацию 1, потому что $|N_G(Y_2)|\leqslant 6$. Значит, Утверждение 9 можно применить для Y_2. Заметим, что $u_2a_4\in E(G)$ (23).

По Утверждению 9, $Y_3=\{u_2,a_4,w_2,w_1\}$ стягиваемое, $G-Y_3$ не является простым циклом и $|N_G(Y_3)|\leqslant 6$ (см. Рис. 18 a). Поскольку $e_G(\{a_2,a_3\},W_2)=0$ (33) и $N_G(a_4)\cap(G-W)=\{u_2,w_2\}$ (23), Y_3 – простой путь. По Лемме 10, Y_3 образует конфигурацию 1, потому что $|N_G(Y_3)|\leqslant 6$. По условию конфигурации 1, концы пути Y_3 (w_1 и u_2) имеют соседей в $G-Y_3$ только в двух несмежных друг с другом путях M_1 и M_2, $|M_1|=2$, $|M_2|=2$. Вспомним, что $u_2u_1,w_1a_1,w_1r,u_2q\in E(G)$ (23). Значит, u_1,a_1,q,r образуют эти пути. Поскольку $u_1a_1\in E(G)$ (23), эти пути – u_1a_1 и qr. Следовательно, $\mathbf{qr\in E(G)}$ (**35**). Аналогично, можно вывести, что $\mathbf{ps\in E(G)}$ (**36**). Поскольку эти пути несмежны друг с другом, $e_G(\{q,r\},\{u_1,a_1\})=0$. Значит, $p\notin\{q,r\}$. Аналогично, можно вывести, что $q\neq\{p,s\}$. Тогда, по (35), $\mathbf{p,q,r,s}$ **различны (37)**. Вспомним, что Y_3 образует конфигурацию 1 и $u_2\in Y_2$. Тогда, по Утверждению 11 для Y_3 (см. (0)), $d_G(u_2)=3$. Значит, $N_G(u_2)=\{u_1,q,a_4\}$ (см. (23)). Аналогично, можно вывести, что $N_G(u_1)=\{p,a_1,u_2\}$. Значит, $\mathbf{e_G(\{a_2,a_3\},W_1)=0}$ (**38**). Заметим, что (34)-(38) доказывают Утверждение.

□

По Утверждению 10, $e_G(\{a_2,a_3\},W_1)=0$ или $e_G(\{a_2,a_3\},W_2)=0$. Тогда, по Утверждению 10, $\mathbf{e_G(\{a_2,a_3\},W_1)=0}$ **и** $\mathbf{e_G(\{a_2,a_3\},W_2)=0}$ (**39**), $\mathbf{qr,ps\in E(G)}$ (**40**) $\mathbf{p,q,r,s}$ **различны (41)**, a_2, a_3 смежны с различными вершинами в $G-W-W_i$ для любого $i\in\{1,2\}$. По Утверждению 8, $\mathbf{N_G(a_2)\cap(G-W)=\{x\}}$, $\mathbf{N_G(a_3)\cap(G-W)=\{y\}}$ (**42**), где $\mathbf{x\neq y}$ **и** $\mathbf{x,y\in V(G-W-W_1-W_2)}$ (**43**) (см. Рис. 18 b).

Утверждение 13. *Предположим, в G есть такой путь $a_1a_2a_3a_4$, что $G(\{a_1,a_2,a_3,a_4\})$ – простой путь и образует конфигурацию 1. Пусть $a_1x\in E(G)$, где $x\notin\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. Тогда $\{x,a_1,a_2,a_3\}$ стягиваемо, $G-\{x,a_1,a_2,a_3\}$ не является простым циклом и $\{x,a_1,a_2,a_3\}$ образует конфигурацию 1.*

Доказательство. Вспомним (23). Не умаляя общности, $x=w_1$. По Утверждению 9, $T_1=\{w_1,a_1,a_2,a_3\}$ стягиваемое, $G-T_1$ не является простым циклом и $|N_G(T_1)|\leqslant 6$. Из фактов (23), (42) и (43) следует, что T_1 – простой путь. Тогда, по Лемме 10, T_1 образует конфигурацию 1, потому что $|N_G(T_1)|\leqslant 6$.

□

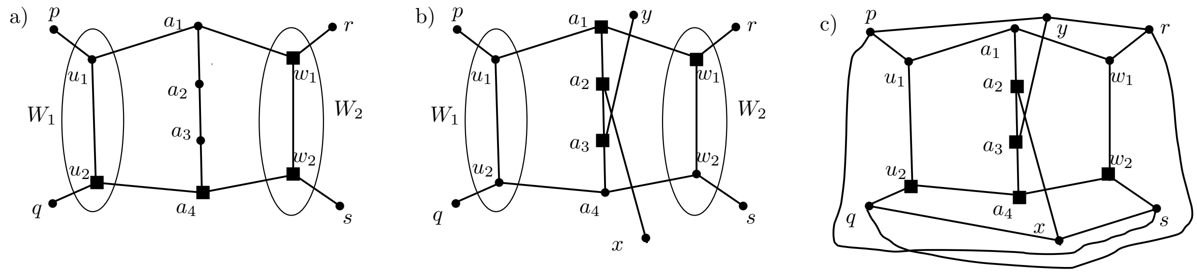

Figure 18: $G(W)$ – простой путь, W образует конфигурацию 1.

Утверждение 14. *G – 3-регулярный граф.*

Доказательство. По Утверждению 11, достаточно доказать, что $d_G(v) = 3$ для любого $v \in V(G - W)$. Поскольку G 3-связен, есть путь $t_0....t_m$ в $G - \{a_2, a_3\}$, где $t_0 = a_1$, $t_m = v$. Последовательным применением Утверждения 13 (см. (0)) можно получить, что $\{t_0, a_1, a_2, a_3\}$, $\{t_1, t_0, a_1, a_2\}$, ..., $\{t_m, t_{m-1}, t_{m-2}, t_{m-3}\}$ образуют конфигурацию 1. Тогда, применив Утверждение 11 для $\{t_m, t_{m-1}, t_{m-2}, t_{m-3}\}$ (см. (0)), мы получим, что $d_G(t_m) = 3$. Тогда, поскольку $t_m = v$, $d_G(v) = 3$.

□

Утверждение 15. *$yr, yp, xq, xs \in E(G)$.*

Доказательство. По взаимозаменяемости, достаточно доказать, что $yr \in E(G)$. По Утверждению 13, $\{w_1, a_1, a_2, a_3\}$ образует конфигурацию 1. По условию конфигурации 1, соседи вершин w_1, a_3 в $G - \{w_1, a_1, a_2, a_3\}$ находятся в двух несмежных друг с другом путях L_1, L_2 и $|L_1| = 2$, $|L_2| = 2$. Поскольку a_3y, $a_3a_4, w_1w_2, w_1r \in E(G)$, $V(L_1 \cup L_2) = \{a_4, w_2, y, r\}$ и $y \neq r$. Тогда, поскольку $a_4w_2 \in E(G)$ (23) и эти пути несмежны друг с другом, эти пути – это a_4w_2, yr. Значит, $yr \in E(G)$.

□

По Утверждению 15, $yr, yp, xq, xs \in E(G)$. По (42), $a_2x, a_3y \in E(G)$. По Утверждению 14, $d_G(y) = 3$, $d_G(x) = 3$. Значит, $\mathbf{N_G(y) = \{p, r, a_3\}}$, $\mathbf{N_G(x) = \{q, s, a_2\}}$ **(44)**.

По (40), qr, $ps \in E(G)$. По (44), $py, ry, qx, sx \in E(G)$. По Утверждению 14, $d_G(p) = 3$, $d_G(q) = 3$, $d_G(r) = 3$, $d_G(s) = 3$. Значит, $\mathbf{N_G(p) = \{u_1, y, s\}}$, $\mathbf{N_G(q) = \{u_2, x, r\}}$, $\mathbf{N_G(r) = \{w_1, y, q\}}$, $\mathbf{N_G(s) = \{w_2, x, p\}}$ **(45)**. Вспомним (23), (42), (44), (45). Значит, все соседи $a_1, a_2, a_3, a_4, x, y, p, q, r, s$ зафиксированы. Следовательно, G зафиксирован (см. Рис. 18 c). По (23) $\{w_2, a_2, a_3, a_4, u_2\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $G - \{w_2, a_2, a_3, a_4, u_2\}$ содержит цикл $u_1a_1w_1ryp$, путь qxs, и ещё $qr, sp \in E(G)$.

□

Лемма 13. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G(W)$ изоморфно простому пути и $G - W$ не является простым циклом. Тогда G содержит 5-стягиваемое множество, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. По Лемме 10, W образует одну из конфигураций 1, 2. Если W образует конфигурацию 1, то, по Лемме 12, G содержит 5-стягиваемое множество. Значит, W образует конфигурацию 2. По условию конфигурации 2, существует L такое, что L – 4-стягиваемый подпуть W_i для какого-то $i \in \{1,2\}$. Не умаляя общности, $L \subset W_2$. Поскольку $G-W-W_2$ 2-связен, $G-L$ не является простым циклом. По Лемме 10, L образует одну из конфигураций 1, 2. Если L образует конфигурацию 1, то, по Лемме 12, в G есть 6-стягиваемое множество. Значит, L образует конфигурацию 2. Заметим, что $N_G(L) \subset W \cup \{x,y\}$ для каких-то $x, y \in \{r,s\} \cup W_2$. Следовательно, $|N_G(L)| \leqslant 6$, противоречие с условием конфигурации 2.

□

Лемма 14. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, что G содержит стягиваемое множество W такое, что $G-W$ – простой цикл. Если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1, выполнены следующие утверждения.*

1) Если $|W| = 4$, то G содержит 5-стягиваемое множество.

2) Предположим, что $|W| = 3$, в $G(W)$ есть путь длины 3. Предположим, вершины пути могут быть пронумерованы так, что этот путь – это $a_1a_2a_3$, и существуют $v_0, v_1 \in V(G-W)$ такие, что $N_G(a_1) \cap (G-W) = \{v_0, v_1\}$, $N_G(a_2) \cap (G-W) = \{v_1\}$. Тогда G содержит 5-стягиваемое множество.

Доказательство. Пусть $C = G - W$. По условию Леммы 14, $G(C)$ – простой цикл. Пусть $f = |C|$. Пусть этот цикл – это $c_1c_2...c_f$. Очевидно, $\mathbf{f = v(G) - |W|}$ **(1)**. Чтобы избежать проблем со сложением c_{i+j} или вычитанием c_{i-j}, мы будем считать, что $c_i = c_{i+f} = c_{i-f}$ для любого i. **Для любого i, $\mathbf{G - \{c_i, ..., c_{i+3}\}}$ не является простым циклом (2)**. В самом деле, поскольку $f \geqslant 7$ (1), $d_{G-\{c_i,...,c_{i+3}\}}(c_{i+5}) \geqslant 3$ (потому что $c_{i+5}c_{i+4}, c_{i+5}c_{i+6} \in E(G)$ и $e_G(c_{i+5}, W) \geqslant 1$). По (2) и Лемме 13, $\mathbf{\{c_i, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}\}}$ **не стягиваемо для любого i (3)**.

1)

Случай 1. $G(W)$ – простой цикл или алмаз.

В этом случае $G(W)$ 2-связен. Пусть $c_5a_j \in E(G)$. По (2), $G - \{c_1, ..., c_4\}$ не является простым циклом. По Лемме 13, $\{c_1, ..., c_4\}$ не стягиваемо. Заметим, что есть дуга $c_5...c_f$ цикла C длины не менее 3 (так как $v(G) \geqslant 11$) в $G - \{c_1, ..., c_4\}$. Следовательно, $N_G(C - \{c_1, ..., c_4\}) \cap W = \{a_j\}$ для какого-то j. Аналогично, $N_G(C - \{c_2, ..., c_5\}) \cap W = \{a_k\}$ для какого-то k. Заметим, что $j = k$, потому что $c_3a_j, c_3a_k \in E(G)$. Значит, $N_G(C - \{c_1, ..., c_4\}) \cap W = \{a_j\}$, $N_G(C - \{c_2, ..., c_5\}) \cap W = \{a_j\}$. Итерируя этот процесс, получим, что $N_G(C) \cap (G - C) = \{a_j\}$. Значит, $\{a_j\}$ – разделяющее множество, противоречие.

Случай 2. $G(W)$ – простой путь или рука.

Утверждение 16. *Предположим, $G(W)$ содержит Гамильтонов путь $a_1a_2a_3a_4$ и $e_G(a_1, C) \geqslant 1$. Если $a_1c_i \in E(G)$, то $N_G(a_4) \cap C \subset \{c_{i+3}, c_{i+4}\}$.*

Доказательство. Не умаляя общности, $a_1c_1 \in E(G)$ (см. Рис. 19 а). По (3), $\{c_2, c_3, c_4, c_5\}$ не стягиваемо. Но $G - \{c_2, c_3, c_4, c_5\}$ содержит Гамильтонов путь $a_4a_3a_2a_1c_1c_f...c_6$ и $e_G(c_6, W) \geqslant 1$. Значит, $N_G(a_4) \cap C \subset \{c_2, c_3, c_4, c_5\}$. Аналогично, $N_G(a_4) \cap C \subset \{c_f, c_{f-1}, c_{f-2}, c_{f-3}\}$. Тогда, поскольку $f \geqslant 7$ (1), $N_G(a_4) \cap C \subset \{c_{i+3}, c_{i+4}\}$.

□

Предположим, $G(W)$ – простой путь. Тогда $G(W)$ содержит Гамильтонов путь $a_1a_2a_3a_4$ и $e_G(a_1, C) \geqslant 2$, $e_G(a_4, C) \geqslant 2$. Значит, у a_1 есть 2 различных соседа c_i, c_j в C. Тогда, по Утверждению 16, $N_G(a_4) \cap C \subset \{c_{i+3}, c_{i+4}\}$ и $N_G(a_4) \cap C \subset \{c_{j+3}, c_{j+4}\}$, противоречие с $e_G(a_4, C) \geqslant 2$.

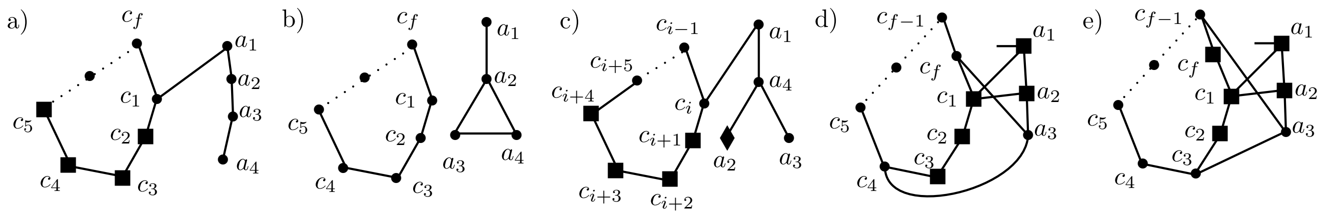

Figure 19: $G - W$ – простой цикл, $|W| \in \{3, 4\}$.

Тогда, по условию случая, $G(W)$ – это рука. Пусть $E(G(W)) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4\}$ (см. Рис. 19 b). Тогда в $G(W)$ есть Гамильтоновы пути $a_1a_2a_3a_4$ и $a_1a_2a_4a_3$ и $e_G(a_1, C) \geqslant 2$. Значит, у a_1 есть 2 различных соседа c_i, c_j в C. Тогда, по Утверждению 16, $N_G(a_t) \cap C \subset \{c_{i+3}, c_{i+4}\}$ и $N_G(a_t) \cap C \subset \{c_{j+3}, c_{j+4}\}$ для любого $t \in \{3, 4\}$. Значит, $|N_G(\{a_3, a_4\}) \cap C| \leqslant 1$, но $\{a_2\} \cup (N_G(\{a_3, a_4\}) \cap C)$ – разделяющее множество, противоречие.

Случай 3. $G(W)$ – лапа.

Пусть $E(G(W)) = \{a_1a_4, a_2a_4, a_3a_4\}$. Тогда $\mathbf{e_G(a_1, C) \geqslant 2}$, $\mathbf{e_G(a_2, C) \geqslant 2}$, $\mathbf{e_G(a_3, C) \geqslant 2}$ **(4)**.

Утверждение 17. *Если $a_1c_i \in E(G)$, то $N_G(\{a_2, a_3\}) \cap C \subset \{c_{i+3}, c_{i+4}\}$.*

Доказательство. Итак, $\mathbf{a_1c_i \in E(G)}$ **(5)** (см. Рис. 19 c). По (3), $\{c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}$ не стягиваемо. Но в $G - \{c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}$ есть путь $c_{i+5}....c_ia_1a_4$, $a_4a_3, a_4a_2 \in E(G)$ и $e_G(c_{i+5}, W) \geqslant 1$. Значит, $N_G(a_2) \cap C \subset \{c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}$ или $N_G(a_3) \cap C \subset \{c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_2) \cap C \subset \{c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}}$ **(6)**. Тогда, по (4), $\{a_2, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}$ связно. Это множество не стягиваемо. Но в $G - \{a_2, c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}$ есть Гамильтонов путь $a_3a_4a_1c_ic_{i-1}....c_{i+5}$ и, по (6), $e_G(c_{i+5}, W \setminus \{a_3\}) \geqslant 1$. Значит, $N_G(a_3) \cap C \subset \{c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}$. Тогда, по (6), $N_G(\{a_2, a_3\}) \cap C \subset \{c_{i+1}, c_{i+2}, c_{i+3}, c_{i+4}\}$. Аналогично, $N_G(\{a_2, a_3\}) \cap C \subset \{c_{i-1}, c_{i-2}, c_{i-3}, c_{i-4}\}$. Тогда, поскольку $|C| \geqslant 7$ ($v(G) \geqslant 11$), $N_G(\{a_2, a_3\}) \cap C \subset \{c_{i+3}, c_{i+4}\}$.

□

Поскольку $e_G(a_1, C) \geqslant 2$ (4), у a_1 есть 2 различных соседа c_i, c_j в C. Тогда, по Утверждению 17, $N_G(\{a_2, a_3\}) \cap C \subset \{c_{i+3}, c_{i+4}\} \cap \{c_{j+3}, c_{j+4}\}$. Значит, $e_G(a_2, C) \leqslant 1$, противоречие с (4).

2) Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{c_1, c_i\}}$ **для какого-то** $\mathbf{i}$, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) = \{c_1\}}$ **(7)**. Поскольку $v(G) \geqslant 11$, $f \geqslant 8$. По (7), $\mathbf{a_3c_f, a_3c_4 \in E(G)}$ **или** $\mathbf{a_3c_{f-1}, a_3c_3 \in E(G)}$ **(8)**, потому что $f \geqslant 8$. Если $a_3c_f, a_3c_4 \in E(G)$ (см. Рис. 19 d), то $\{a_1, a_2, c_1, c_2, c_3\}$ стягиваемое. Если $a_3c_{f-1}, a_3c_3 \in E(G)$, то $\{a_1, a_2, c_f, c_1, c_2\}$ стягиваемое (см. Рис. 19 e).

□

Лемма 15. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G(W)$ изоморфно простому пути. Тогда G содержит 5-стягиваемое множество, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. Эта Лемма очевидно следует из Лемм 13 и 14 (пункт 1).

□

Лемма 16. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G(W)$ изоморфно лапе. Тогда G содержит 5-стягиваемое множество, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. Если $G - W$ – простой цикл, то, по Лемме 14 (пункт 1), G содержит 5-стягиваемое множество. Значит, $\mathbf{G - W}$ **не является простым циклом** $\mathbf{(1)}$. Тогда, по Лемме 11, W образует одну из конфигураций 4, 5. Если W образует конфигурацию 5, то в G есть 4-стягиваемый простой путь и, по Лемме 15, G содержит 5-стягиваемое множество. Значит, W образует конфигурацию 4. Более того, **любое стягиваемое** $\mathbf{A \subset V(G)}$ **такое, что** $\mathbf{G(A)}$ **– лапа, образует конфигурацию 4** $\mathbf{(2)}$. По условию конфигурации 4, $\mathbf{|W_1| = |W_2| = 2}$ $\mathbf{(3)}$, $\mathbf{e_G(a_i, G - W - W_j) \leqslant 1}$ **для любых** $\mathbf{i \in \{1, 2, 3, 4\}}$, $\mathbf{j \in \{1, 2\}}$ $\mathbf{(4)}$. **Для любого** $\mathbf{t \in \{1, 2, 3\}}$, **у** $\mathbf{a_t}$ **ровно 2 соседа в** $\mathbf{G - W}$, **один сосед в** $\mathbf{W_1}$ **и один сосед в** $\mathbf{W_2}$ $\mathbf{(5)}$. По (5), $\mathbf{e_G(\{a_1, a_2, a_3\}, W_j) = 3}$ **для любого** $\mathbf{j \in \{1, 2\}}$ $\mathbf{(6)}$.

Утверждение 18. $e_G(W, G - W - W_1 - W_2) = 0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, по (5), $\mathbf{e_G(a_4, G - W - W_1 - W_2) \geqslant 1}$ $\mathbf{(7)}$. Тогда, по (4), $\mathbf{e_G(a_4, W_1 \cup W_2) = 0}$ $\mathbf{(8)}$. По (6), $e_G(\{a_1, a_2, a_3\}, W_1) = 3$. Вспомним (5) и (8). Не умаляя общности, $\mathbf{u_1a_1, u_1a_3, u_2a_2 \in E(G)}$ $\mathbf{(9)}$ (см. Рис. 20 a). Тогда, поскольку $e_G(\{a_1, a_2, a_3\}, W_1) = 3$, $\{u_2, a_2, a_4, a_3\}$ – простой путь. Это множество стягиваемое, потому что $u_1a_1 \in E(G)$ (9) и $e_G(a_1, W_2) = 1$ (5). По Лемме 15, G содержит 5-стягиваемое множество.

□

Вспомним (2). Вспомним Утверждение 18. Тогда **для любого стягиваемого** $\mathbf{A \subset V(G)}$ **такого, что** $\mathbf{G(A)}$ **– лапа**, $\mathbf{|N_G(A)| = 4}$ $\mathbf{(10)}$.

Утверждение 19. *Если u_1 и w_1 имеют общего соседа в $W \setminus \{a_4\}$, то $p \neq r$, $q = s$. Если u_1 и w_2 имеют общего соседа в $W \setminus \{a_4\}$, то $p \neq s$, $q = r$. Если u_2 и w_1 имеют общего соседа в $W \setminus \{a_4\}$, то $q \neq r$, $p = s$. Если u_2 и w_2 имеют общего соседа в $W \setminus \{a_4\}$, то $q \neq s$, $p = r$.*

Доказательство. Поскольку эти утверждения взаимозаменяемы, достаточно доказать первое. По условию, u_1 и w_1 имеют общего соседа в $W \setminus \{a_4\}$. Наша цель – показать, что $p \neq r$, $q = s$. Не умаляя общности, $\mathbf{u_1a_1, w_1a_1 \in E(G)}$ $\mathbf{(11)}$ (см. Рис. 20 b).

По (5), $e_G(a_1, W_1) = 1$. Тогда, из $u_1a_1 \in E(G)$ (11), $u_2a_1 \notin E(G)$. Значит, $e_G(u_2, W \setminus \{a_1\}) \geqslant 1$. Следовательно, $\mathbf{X = \{u_2\} \cup (W \setminus \{a_1\})}$ **связно** $\mathbf{(12)}$. Это множество стягиваемое, потому что $u_1a_1w_1$ – путь. Поскольку $e_G(W, G - W - W_1 - W_2) = 0$ (см. Утверждение 18), $\mathbf{N_G(X) \subset \{q, u_1, a_1, w_1, w_2\}}$ $\mathbf{(13)}$. Заметим, что $G - X$ не является простым циклом, поскольку $G - W - W_1$ 2-связен. По Лемме 3, существует два пути $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2 \subset \{q, u_1, a_3, w_1, w_2\}}$ $\mathbf{(14)}$ таких, что $X \cup L_1$, $X \cup L_2$ стягиваемы, и $\mathbf{e_G(L_1, L_2) = 0}$ $\mathbf{(15)}$.

Предположим, что $u_1 \notin L_1 \cup L_2$. По (14), $L_1, L_2 \subset \{q, a_1, w_1, w_2\}$. Но $a_1w_1w_2$ – путь (11), противоречие с $e_G(L_1, L_2) = 0$ (15).

Значит, $u_1 \in L_1 \cup L_2$. Не умаляя общности, $\mathbf{u_1 \in L_1}$ $\mathbf{(16)}$. Поскольку $e_G(u_1, \{w_1, w_2, q\}) = 0$ и (14), $\mathbf{a_1 \in L_1}$ $\mathbf{(17)}$. Если $w_1 \in L_2$, то, поскольку $a_1w_1 \in E(G)$ (11), $e_G(L_1, L_2) \geqslant 1$, противоречие с (15). Значит, $w_1 \notin L_2$. Тогда, по (16) и (17), $u_1, w_1, a_3 \notin L_2$. Тогда, по (14), $\mathbf{L_2 = \{w_2, q\}}$ $\mathbf{(18)}$. Значит, $\mathbf{q = s}$ $\mathbf{(19)}$. По (18), $\mathbf{X \cup \{w_2, q\}}$ **стягиваемое** $\mathbf{(20)}$ (см. Рис. 20 b). Значит, $\mathbf{G - X - \{w_2, q\}}$ **2-связен** $\mathbf{(21)}$.

Предположим, что $p = r$. Заметим, что $u_1a_1w_1$ – простой путь (11) в 2-связном графе $G - X - \{w_2, q\}$ (21). По (5), $e_G(a_1, G - W - W_1 - W_2) = 0$. Поскольку $p = r$, p – точка сочленения

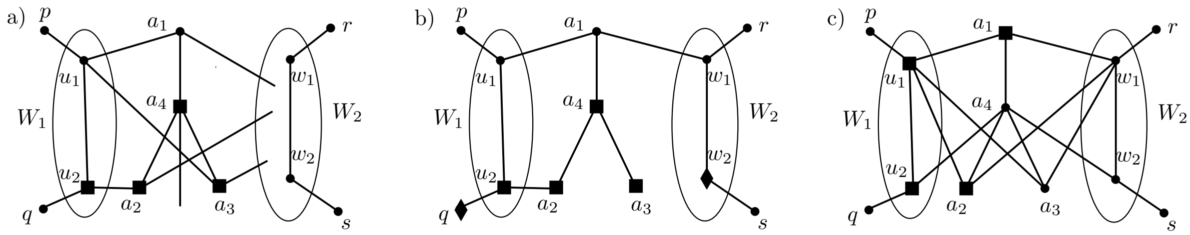

Figure 20: $G(W)$ – лапа, W образует конфигурацию 4.

в графе $G-X-\{w_2,q\}$, если не выполнено следующее равенство: $v(G-X-\{w_2,q\})=4$. Значит, $v(G-X-\{w_2,q\})=4$. Значит, $v(G)=10$, противоречие с $v(G)\geqslant 11$.

□

По (5), $e_G(a_1,W_1)=e_G(a_1,W_2)=1$. Не умаляя общности, $\mathbf{a_1u_1,a_1w_1\in E(G)}$ (**22**). По Утверждению 19, $\mathbf{p\neq r}$ (**23**) и $\mathbf{q=s}$ (**24**). Поскольку $e_G(a_1,W_1)=e_G(a_1,W_2)=1$ (5), $\mathbf{u_2a_1,w_2a_1\notin E(G)}$ (**25**).

Предположим, что $e_G(u_2,\{a_2,a_3\})\geqslant 1$ или $e_G(w_2,\{a_2,a_3\})\geqslant 1$. Не умаляя общности, $w_2a_2\in E(G)$. По (5), $e_G(a_2,W_1)=1$. Значит, $a_2u_1\in E(G)$ или $a_2u_2\in E(G)$. Если $a_2u_1\in E(G)$, то u_1,w_2 имеют общего соседа (a_2) в W и, по Утверждению 19, $q=r$, противоречие с $q=s$ (19). Значит, $a_2u_2\in E(G)$, и тогда u_2 и w_2 имеют общего соседа (a_2) в W и, по Утверждению 19, $q\neq s$, противоречие с (19).

Следовательно, $\mathbf{e_G(u_2,\{a_2,a_3\})=e_G(w_2,\{a_2,a_3\})=0}$ (**26**). По (25), u_2a_1, $w_2a_1\notin E(G)$. Значит, $\mathbf{N_G(u_2)\cap W=\{a_4\}}$ **и** $\mathbf{N_G(w_2)\cap W=\{a_4\}}$ (**27**). Вспомним (5). Тогда $\mathbf{a_1u_1,a_1w_1,a_2u_1,a_2w_1,a_3u_1,a_3w_1\in E(G)}$ (**28**) (см. Рис. 20 c). Тогда, по (5), $\mathbf{A=\{u_1,a_1,a_2,u_2\}}$ **– лапа (29)**. Это множество стягиваемое, потому что $a_4w_2,a_3w_1\in E(G)$ (27), (28). Тогда, по (10), $\mathbf{|N_G(A)|=4}$ (**30**). Заметим, что $\{a_4,a_3,w_1,p,q\}\subset N_G(A)$, потому что $w_1a_2,a_3u_1\in E(G)$ (28), $a_1a_4,u_1p,u_2q\in E(G)$. Значит, $|N_G(A)|\geqslant 5$, противоречие с (30).

□

Лемма 17. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G)\geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G(W)$ – алмаз (см. Рис. 3). Тогда G содержит 5-стягиваемое множество, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. Пусть $E(G(W))=\{a_1a_2,a_2a_3,a_1a_3,a_3a_4,a_1a_4\}$ (см. Рис. 21 a). Если $e_G(\{a_1,a_3\},G-W)=0$, то $\{a_2,a_4\}$ – разделяющее множество в G. Значит, $e_G(\{a_1,a_3\},G-W)\geqslant 1$. Не умаляя общности, $\mathbf{e_G(a_1,G-W)\geqslant 1}$ (**1**). Значит, $\mathbf{d_G(a_1)\geqslant 4}$ (**2**). Заметим, что есть циклы $a_1a_2a_3$ и $a_1a_2a_4$. Тогда, по Лемме 6, $d_G(a_1)=d_G(a_2)=d_G(a_3)=3$. Следовательно, $\mathbf{e_G(a_3,G-W)=0}$ (**3**) и $\mathbf{e_G(a_2,G-W)=1}$, $\mathbf{e_G(a_4,G-W)=1}$ (**4**). Пусть $\mathbf{\{x\}=N_G(a_2)\cap(G-W)}$ **и** $\mathbf{\{y\}=N_G(a_4)\cap(G-W)}$ (**5**). Если $x=y$, то, по (3) и (5), $\{x,a_1\}$ – разделяющее множество, противоречие с 3-связностью G. Значит, $\mathbf{x\neq y}$ (**6**). Если $G-W$ – простой цикл, то, по Лемме 14 (пункт 1), G содержит 5-стягиваемое множество. Значит, $G-W$ не является простым циклом. Тогда, по Лемме 3, $\mathbf{|N_G(W)|\geqslant 4}$ (**7**). По (3) и (4), $|N_G(\{a_2,a_3,a_4\})\cap(G-W)|\leqslant 2$. Тогда, по (7), $\mathbf{e_G(a_1,G-W)\geqslant 2}$ (**8**) (см. Рис. 21 b). Тогда $\mathbf{X=\{a_1,a_2,a_3\}}$ **стягиваемое (9)**, потому что W стягиваемо и $e_G(a_1,G-W)\geqslant 2$ (8). По (3) и (5), $\mathbf{N_G(X)=\{a_1,x,y\}}$ (**10**). Если $G-X$ – простой цикл, то $G-X-\{a_1\}=G-W$ – простой путь, но $G-W$ 2-связен, противоречие. Значит, $\mathbf{G-X}$ **не является простым циклом (11)**. Вспомним, что $N_G(X)=\{a_1,x,y\}$ (10). Тогда, по Лемме 5, существует $U\subset\{x,y\}$ такое, что $X\cup U$ стягиваемое. Если $U=\{x,y\}$, то $X\cup U$ 5-стягиваемо. Значит, $U=\{x\}$

или $U = \{y\}$. Не умаляя общности, $U = \{y\}$. Следовательно, $\mathbf{Y = \{a_2, a_3, a_4, y\}}$ **стягиваемо (12)** (см. Рис. 21 c). Тогда из фактов $e_G(a_3, G - W) = 0$ (3), $N_G(a_2) \cap (G - W) = \{x\}$ (5), $N_G(a_4) \cap (G - W) = \{y\}$ (5) и $x \neq y$ (6) следует, что Y – простой путь. Тогда, по Лемме 15, G содержит 5-стягиваемое множество.

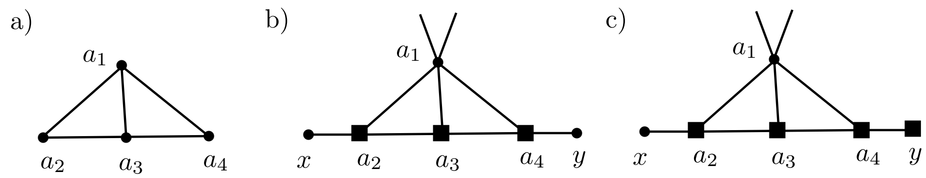

Figure 21: $G(W)$ – алмаз.

□

Лемма 18. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W. Тогда G содержит 5-стягиваемое множество или $G(W)$ изоморфно простому циклу или руке (см. Рис. 3), $G(W)$ – не дерево, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. Вспомним, что $G(W)$ изоморфно одному из 5 связных 4-вершинных графов (см. Рис. 3). Значит, эта Лемма очевидно следует из Лемм 15, 16, 17.

□

Определение 10. [2] Пусть $A \subset V(G)$, $A = \{b, c\}$, $bc \in E(G)$. Будем называть A *хорошим*, если A стягиваемо, и $N_G(b) \cap (G - A) = \{b_0, x\}$, $N_G(c) \cap (G - A) = \{c_0, x\}$ для каких-то различных вершин $b_0, c_0, x \in V(G - A)$.

Лемма 19. [2] *Пусит G – 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит стягиваемое множество W такое, что $G - W$ не является простым циклом. Предположим, что $|W_i| = 2$, $|N_G(W_i) \cap W| = 1$ и W_i стягиваемо для какого-то $i \in \{1, 2\}$. Тогда W_i – хорошее множество.*

Доказательство. По Определению 10, W_i – хорошее множество.

□

Перед формулировкой следующей Леммы стоит отметить, что если в $G(W)$ есть Гамильтонов цикл, то мы можем пронумеровать его вершины таким образом, что этот цикл – это $a_1a_2a_3a_4$. Чтобы избежать проблемы со сложением a_{i+j} или вычитанием a_{i-j}, мы считаем, что $a_i = a_{i+4} = a_{i-4}$ для любого i.

Лемма 20. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G(W)$ – это простой цикл (см. Рис. 3). Пусть $E(G(W)) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1\}$. Тогда G содержит 5-стягиваемое множество или W образует следующую конфигурацию, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Конфигурация 6. $|W_1| = |W_2| = 2$. *Вершины W можно пронумеровать так, что $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$, $N_G(W_2) \cap W = \{a_1\}$ и $e_G(a_i, G - W - W_1 - W_2) = 1$ для любого $i \in \{2, 3, 4\}$ (см. Рис. 26 c). Все вершины a_2, a_3, a_4 не могут иметь одного и того же соседа в $G - W - W_1 - W_2$. В G есть хорошее множество.*

Доказательство.

Утверждение 20. *Для любого i, все вершины a_i, a_{i+1}, a_{i+2} не могут быть смежны с одной и той же вершиной в $G - W$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда, для какого-то i, $a_i x, a_{i+1} x, a_{i+2} x \in E(G)$ для какого-то $x \in V(G - W)$ (см. Рис. 22 a). Тогда $a_i x a_{i+1}$, $a_{i+1} x a_{i+2}$ – циклы, и $d_G(x) \geqslant 4$ (поскольку $x \in V(G - W)$). Значит, по Лемме 6, $d_G(a_i) = 3$, $d_G(a_{i+1}) = 3$, $d_G(a_{i+2}) = 3$. Тогда $N_G(\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}) \cap (G - W) = \{x\}$. Значит, $\{x, a_{i+3}\}$ – разделяющее множество, противоречие с 3-связностью G.

□

Утверждение 21. *1) Предположим, что $|W_i| \geqslant 4$ и $L \subset W_i$, $|L| = 4$, L – подпуть W_i. Тогда $|N_G(G - W - L) \cap W| = 1$.*

2) Предположим, что $|W_i| = 3$. Тогда $|N_G(W_i) \cap W| \geqslant 2$.

3) Предположим, что $|W_i| = 3$. Тогда не существует такого индекса j, что a_j, a_{j+1} смежны с различными вершинами в $G - W - W_i$.

4) Если $|W_1| = 3$, то $N_G(\{u_1, u_3\}) \cap N_G(W_2) \cap W = \varnothing$. Если $|W_2| = 3$, то $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap N_G(W_1) \cap W = \varnothing$.

5) Предположим, что $|W_i| = 2$ и $N_G(W_i) \cap W = \{a_j\}$. Тогда $e_G(a_t, G - W - W_i) \leqslant 1$ для любого t такого, что $t \neq j$.

6) Предположим, что $|W_i| = 2$ и $|N_G(W_i) \cap W| \geqslant 2$. Тогда $e_G(a_t, G - W - W_i) \leqslant 1$ для любого t.

Доказательство. 1) Не умаляя общности, $|W_1| \geqslant 4$ и $L = \{u_j, u_{j+1}, u_{j+2}, u_{j+3}\}$. Предположим противное. Тогда **2 различные вершины $\mathbf{W}$ смежны с $\mathbf{G - W - L}$ (1)** (см. Рис. 22 b). Очевидно, **если $\mathbf{u_{j-1}}$ существует, то $\mathbf{e_G(u_{j-1}, W) \geqslant 1}$ и, если $\mathbf{u_{j+4}}$ существует, то $\mathbf{e_G(u_{j+4}, W) \geqslant 1}$ (2)** (см. пунктирные рёбра на Рис. 22 b). Заметим, что L стягиваемое, потому что $W_1 \cup W$ стягиваемое, (1), (2) и $W_2 \subset N_G(W)$. Тогда, по Лемме 15, G содержит 5-стягиваемое множество.

2) Не умаляя общности, $|W_1| = 3$. Предположим противное, $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_j\}}$ **(3)** для какого-то j. Тогда $\mathbf{e_G(a_{j+1}, G - W - W_1) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_{j+2}, G - W - W_1) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_{j+3}, G - W - W_1) \geqslant 1}$ **(4)** (см. Рис. 22 c). Тогда, по Утверждению 20, $N_G(\{a_{j+1}, a_{j+2}, a_{j+3}\}) \cap (G - W - W_1) \geqslant 2$. Значит, $W_1 \cup \{a_j\}$ стягиваемое. Поскольку $N_G(W_1) \cap W = \{a_j\}$ (3), $W_1 \cup \{a_j\}$ – алмаз. Тогда, по Лемме 17, G содержит 5-стягиваемое множество.

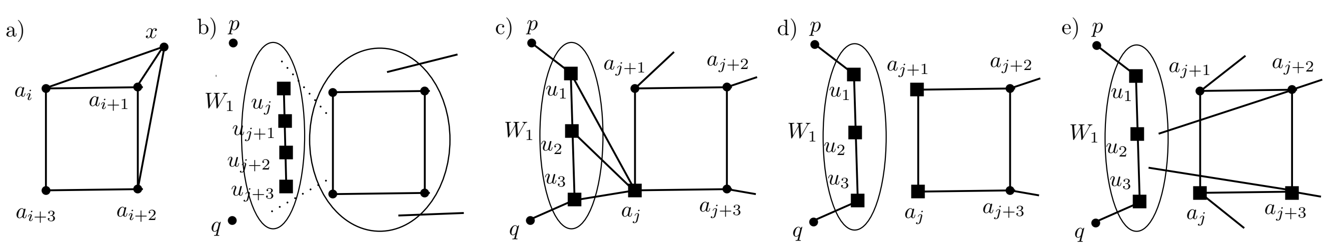

Figure 22: $G(W)$ – простой цикл, $|W_1| \geqslant 3$.

3) Не умаляя общности, $|W_1| = 3$. Предположим противное, $\mathbf{a_{j+2}}$, $\mathbf{a_{j+3}}$ **смежны с различными вершинами в $\mathbf{G - W - W_1}$ (5)** для какого-то j (см.

Рис. 22 d). Значит, если $W_1 \cup \{a_j, a_{j+1}\}$ связно, то это множество стягиваемое. Следовательно, $\mathbf{e_G(\{a_j, a_{j+1}\}, W_1) = 0}$ **(6)**. Следовательно, $\mathbf{e_G(a_j, G - W - W_1) \geqslant 1}$ **и** $\mathbf{e_G(a_{j+1}, G - W - W_1) \geqslant 1}$ **(7)**. По (6), $N_G(W_1) \cap W \subset \{a_{j+2}, a_{j+3}\}$. По Утверждению 21 (пункт 2), $|N_G(W_1) \cap W| \geqslant 2$. Следовательно, $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_{j+2}, a_{j+3}\}}$ **(8)** (см. Рис. 22 e). Значит, $\mathbf{X = W_1 \cup \{a_j, a_{j+3}\}}$ **связно (9)**. Это множество не стягиваемо. Но a_{j+1} и a_{j+2} оба смежны с $G - W - W_1$ (5), (7). Значит, a_{j+1} и a_{j+2} имеют общего соседа в $G - W - W_1$. Пусть $xa_{j+1}, xa_{j+2} \in E(G)$ для какого-то $x \in V(G - W - W_1)$. Поскольку $x \in V(G - W - W_1)$, $d_G(x) \geqslant 4$. Поскольку $xa_{j+1}, xa_{j+2} \in E(G)$, $xa_{j+1}a_{j+2}$ – цикл. Тогда, по Лемме 6, $d_G(a_{j+2}) = 3$. Но $e_G(a_{j+2}, G - W - W_1) \geqslant 1$ (5) и $e_G(a_{j+2}, W_1) \geqslant 1$ (8), противоречие.

4) Поскольку эти утверждения взаимозаменяемы, достаточно доказать первое. Предположим противное, $|W_1| = 3$ и $N_G(\{u_1, u_3\}) \cap N_G(W_2) \cap W \neq \varnothing$. Не умаляя общности, $u_1a_1 \in E(G)$ и $e_G(a_1, W_2) \geqslant 1$. По Утверждению 20, $|N_G(W_1) \cap W| \geqslant 2$. Значит, $e_G(W \setminus \{a_1\}, W_1) \geqslant 1$. Тогда, по Лемме 7 для W_1, G содержит 5-стягиваемое множество.

5) и 6) По условиям пунктов, $W_i \cup (W \setminus \{a_t\})$ связно. Поскольку это множество не стягиваемо, $e_G(a_t, G - W - W_i) \leqslant 1$.

$\square$

Случай 1. $max(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$.

Не умаляя общности, $|W_2| \geqslant 4$. Рассмотрим любой подпуть $L \subset |W_2|$, $\mathbf{L = \{w_j, w_{j+1}, w_{j+2}, w_{j+3}\}}$ **(10)**. По Утверждению 21 (пункт 1), $|N_G(G - W - L) \cap W| = 1$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(G - W - L) \cap W = \{a_1\}}$ **(11)**. Значит, $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}}$ **(12)**. По (11), **если $\mathbf{w_{j-1}}$ существует, то $\mathbf{w_{j-1}a_1 \in E(G)}$, и если $\mathbf{w_{j+4}}$ существует, то $\mathbf{w_{j+4}a_1 \in E(G)}$ (13)**. Если $|W_1| \geqslant 3$, то, по Утверждению 21 (пункты 1 и 2), $|N_G(W_1) \cap W| \geqslant 2$, противоречие с (12). Значит, $\mathbf{|W_1| = 2}$ **(14)**. Вспомним (12). Тогда, по Утверждению 21 (пункт 5), $\mathbf{e_G(a_2, G - W - W_1) \leqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_3, G - W - W_1) \leqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, G - W - W_1) \leqslant 1}$ **(15)**. Тогда, по (11), $\mathbf{e_G(a_2, L) = 1}$, $\mathbf{e_G(a_3, L) = 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, L) = 1}$ **(16)**.

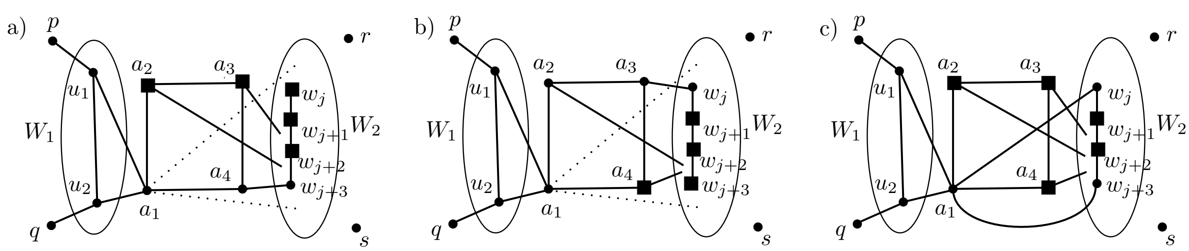

Figure 23: $G(W)$ – простой цикл, $|W_1| = 2$, $|W_2| \geqslant 4$.

Предположим, $e_G(\{a_2, a_4\}, \{w_j, w_{j+3}\}) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $a_4w_{j+3} \in E(G)$ (см. Рис. 23 a). По (16), $e_G(a_2, L) = 1$ и $e_G(a_3, L) = 1$. Тогда, по Утверждению 20, $a_2w_{j+3} \notin E(G)$ или $a_3w_{j+3} \notin E(G)$, потому что $a_4w_{j+3} \in E(G)$. Значит, $\{a_2, a_3, w_j, w_{j+1}, w_{j+2}\}$ связно. Это множество стягиваемое, так как $sw_l...w_{j+3}a_4a_1$ – путь, $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$ (12) и, если w_{j-1} существует, то $w_{j-1}a_1 \in E(G)$ (13). Значит, $\mathbf{e_G(\{a_2, a_4\}, \{w_j, w_{j+3}\}) = 0}$ **(17)**.

Предположим, $e_G(a_3, \{w_j, w_{j+3}\}) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $a_3w_j \in E(G)$ (см. Рис. 23 b). Поскольку $e_G(a_4, L) = 1$ (16) и $a_4w_j \notin E(G)$ (17), $\{a_4, w_{j+1}, w_{j+2}, w_{j+3}\}$ – дерево. Это множество стягиваемое, потому что $rw_1...w_ja_3a_2a_1$ – путь, $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$ (12) и, если

w_{j+4} существует, то $w_{j+4}a_1 \in E(G)$ (13). Тогда, по Лемме 18, G содержит 5-стягиваемое множество.

Значит, $e_G(a_3, \{w_j, w_{j+3}\}) = 0$. Тогда, по (17), $\mathbf{N_G(w_j) \cap W = \{a_1\}}$, $\mathbf{N_G(w_{j+3}) \cap W = \{a_1\}}$ **(18)** (см. Рис. 23 c). Поскольку $e_G(a_3, L) = 1$ (16) и (18), $\{a_2, a_3, a_4, w_{j+1}, w_{j+2}\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $rw_1...w_ja_1w_{j+3}...w_ls$ – путь (18).

Случай 2. $|W_1| = 3$, $|W_2| = 3$.

Предположим, что, для какого-то j, a_j, a_{j+1} оба смежны с $G - W - W_i$ для какого-то i. Не умаляя общности, $e_G(a_3, G - W - W_1) \geqslant 1$, $e_G(a_4, G - W - W_1) \geqslant 1$. Тогда, по Утверждению 21 (пункт 3), a_3, a_4 имеют общего соседа $x \in V(G - W - W_1)$. Тогда a_3a_4x – цикл и $d_G(x) \geqslant 4$. Тогда, по Лемме 6, $N_G(a_3) \cap (G - W) = \{x\}$, $N_G(a_4) \cap (G - W) = \{x\}$. Значит, $e_G(\{a_3, a_4\}, W_1) = 0$. По Утверждению 21 (пункт 2), $|N_G(W_1) \cap W| \geqslant 2$. Значит, $N_G(W_1) \cap W = \{a_1, a_2\}$. Вспомним, что $N_G(a_3) \cap (G - W) = \{x\}$, $N_G(a_4) \cap (G - W) = \{x\}$. Значит, $e_G(\{w_1, w_3\}, \{a_1, a_2\}) \geqslant 1$. Но $N_G(W_1) \cap W = \{a_1, a_2\}$, противоречие с Утверждением 21 (пункт 4).

Следовательно, **для любого $\mathbf{j}$, $\mathbf{a_j}$, $\mathbf{a_{j+1}}$ не могут быть смежны оба с $\mathbf{G - W - W_i}$ для любого $\mathbf{i}$ (19)**. Значит, $N_G(W_1) \cap W = \{a_1, a_3\}$ или $N_G(W_1) \cap W = \{a_2, a_4\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_1, a_3\}}$ **(20)**. По (19), $N_G(W_2) \cap W = \{a_1, a_3\}$ или $N_G(W_2) \cap W = \{a_2, a_4\}$. Если $N_G(W_2) \cap W = \{a_1, a_3\}$, то, по (20), $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap N_G(W_1) \cap W \neq \varnothing$, противоречие с Утверждением 21 (пункт 4). Следовательно, $\mathbf{N_G(W_2) \cap W = \{a_2, a_4\}}$ **(21)**.

Предположим, $e_G(a_1, G - W - W_2) \geqslant 2$ и $e_G(a_3, G - W - W_2) \geqslant 2$ (см. Рис. 24 a). По (21), $W_2 \cup \{a_2, a_4\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $e_G(a_1, G - W - W_2) \geqslant 2$ и $e_G(a_3, G - W - W_2) \geqslant 2$.

Значит, $e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1$ или $e_G(a_3, G - W - W_2) \leqslant 1$. Не умаляя общности, $e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1$. По (20), $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ (см. Рис. 24 b). Следовательно, $W_1 \cup \{a_1\}$ – дерево. Это множество стягиваемое, потому что $N_G(W_2) \cap W = \{a_2, a_4\}$ (21). Тогда, по Лемме 18, G содержит 5-стягиваемое множество.

Случай 3. $min(|W_1|, |W_2|) = 2$, $max(|W_1|, |W_2|) = 3$.

Не умаляя общности, $|W_1| = 2$, $|W_2| = 3$. По Утверждению 21 (пункт 4), $\mathbf{N_G(\{w_1, w_3\}) \cap N_G(W_1) \cap W = \varnothing}$ **(22)**.

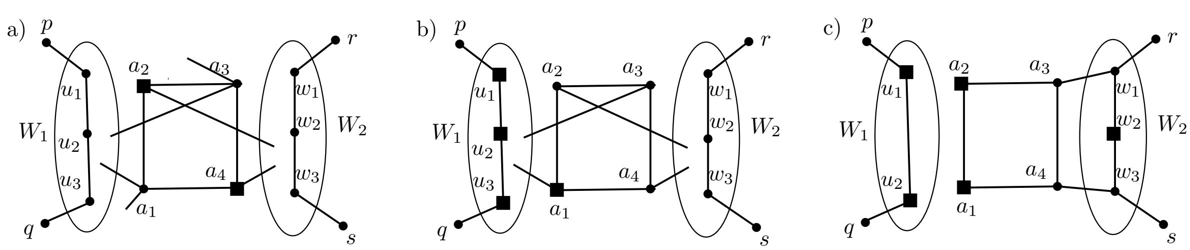

Figure 24: $G(W)$ – простой цикл, $|W_1| \in \{2, 3\}$, $|W_2| = 3$.

Предположим, что $N_G(w_1) \cap N_G(w_3) \cap W \neq \varnothing$. Не умаляя общности, $w_1a_4, w_3a_4 \in E(G)$. Если $e_G(\{a_1, a_2, a_3\}, W_1) \geqslant 1$, то, по Утверждению 21 (пункты 5 и 6), $e_G(a_4, G - W - W_1) \leqslant 1$, противоречие с $w_1a_4, w_3a_4 \in E(G)$. Значит, $e_G(\{a_1, a_2, a_3\}, W_1) = 0$. Следовательно, $e_G(a_4, W_1) \geqslant 1$. Но $w_1a_4 \in E(G)$, противоречие с (22).

Значит, $\mathbf{N_G(w_1) \cap N_G(w_3) \cap W \neq \varnothing}$ **(23)**.

Предположим, что w_1, w_3 оба смежны с a_j, a_{j+1} для какого-то j. Не умаляя общности, $w_1a_3, w_3a_4 \in E(G)$ (см. Рис. 24 c). По (22), $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap N_G(W_1) \cap W = \varnothing$. Следовательно, $e_G(\{a_1, a_2\}, W_1) \geqslant 1$. Тогда, по Утверждению 21 (пункты 5 и 6), $e_G(a_3, G - W - W_1) \leqslant 1$ и $e_G(a_4, G - W - W_1) \leqslant 1$. Но $w_1a_3, w_3a_4 \in E(G)$. Значит, $e_G(\{a_3, a_4\}, w_2) = 0$. Следовательно, $e_G(w_2, \{a_1, a_2\}) \geqslant 1$. Тогда, поскольку $e_G(\{a_1, a_2\}, W_1) \geqslant 1$, $X = W_1 \cup \{a_1, a_2, w_2\}$ связно. В 2-связном графе $G - W - W_1$ есть простой rs-путь rW_2s. В графе $G - X$ этот путь заменён на $rw_1a_3a_4w_3s$. Значит, $G - X$ 2-связен. Тогда X 5-стягиваемо.

Значит, w_1, w_3 не могут быть оба смежны с a_j, a_{j+1} для любого j. Вспомним (23). Следовательно, $N_G(w_1) \cap W = \{a_j\}$, $N_G(w_3) \cap W = \{a_{j+2}\}$ для какого-то j. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(w_1) \cap W = \{a_3\}}$, $\mathbf{N_G(w_3) \cap W = \{a_1\}}$ **(24)**. Тогда, по (22), $\mathbf{N_G(W_1) \cap W \subset \{a_2, a_4\}}$ **(25)**. Тогда, по Утверждению 21 (пункты 5 и 6), $e_G(a_3, G - W - W_1) \leqslant 1$ и $e_G(a_1, G - W - W_1) \leqslant 1$. Тогда, по (24) и (25), $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) = \{w_1\}}$ **и** $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{w_3\}}$ **(26)**.

Предположим, что $e_G(a_2, G - W - W_2) \geqslant 1$ и $e_G(a_4, G - W - W_2) \geqslant 1$ (см. Рис. 25 a). Поскольку $N_G(a_3) \cap (G - W) = \{w_1\}$ (26), $W_2 \cup \{a_3\}$ – дерево. Это множество стягиваемое, потому что $e_G(a_2, G - W - W_2) \leqslant 1$, $e_G(a_4, G - W - W_2) \leqslant 1$ и $N_G(W_1) \cap W \subset \{a_2, a_4\}$ (25). Тогда, по Лемме 18, G содержит 5-стягиваемое множество.

Значит, $e_G(a_2, G - W - W_2) = 0$ или $e_G(a_4, G - W - W_2) = 0$. Не умаляя общности, $\mathbf{e_G(a_4, G - W - W_2) = 0}$ **(27)**. Следовательно, $N_G(a_4) \cap (G - W) \subset W_2$. По (24), $e_G(a_4, \{w_1, w_3\}) = 0$. Следовательно, $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G - W) = \{w_2\}}$ **(28)**. По (25), $N_G(W_1) \cap (G - W) \subset \{a_2, a_4\}$. Тогда, по (28), $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_2\}}$ **(29)** (см. Рис. 25 b). Поскольку $N_G(a_3) \cap (G - W) = \{w_1\}$ (26) и $N_G(a_4) \cap (G - W) = \{w_2\}$ (28), $\mathbf{X = \{a_3, a_4, w_1, w_2\}}$ **связно (30)** и $\mathbf{N_G(X) = \{a_1, a_2, w_3, r\}}$ **(31)**. Заметим, что $G - X$ 2-связен, потому что $W \cup W_2$ стягиваемое, $sw_3a_1a_2$ – путь (26) и $N_G(W_1) \cap W = \{a_2\}$ (29). Тогда, по (30), X стягиваемое. Заметим, что $G - X$ не является простым циклом, потому что $G - W - W_2$ 2-связен. Тогда, по Лемме 3, есть 2 несмежных друг с другом пути в $N_G(X)$. Но $N_G(X) = \{a_1, a_2, w_3, r\}$ (31) и $w_3a_1a_2$ – путь (26), противоречие.

Случай 4. $|W_1| = |W_2| = 2$, $min(|N_G(W_1) \cap W|, |N_G(W_2) \cap W|) \geqslant 2$.

По условию случая, $\mathbf{|N_G(W_1) \cap W| \geqslant 2}$, $\mathbf{|N_G(W_2) \cap W| \geqslant 2}$ **(32)**. Тогда, по Утверждению 21 (пункт 6), $\mathbf{e_G(a_i, G - W - W_j) \leqslant 1}$ **для любых** $\mathbf{i \in \{1, 2, 3, 4\}}$, $\mathbf{j \in \{1, 2\}}$ **(33)**.

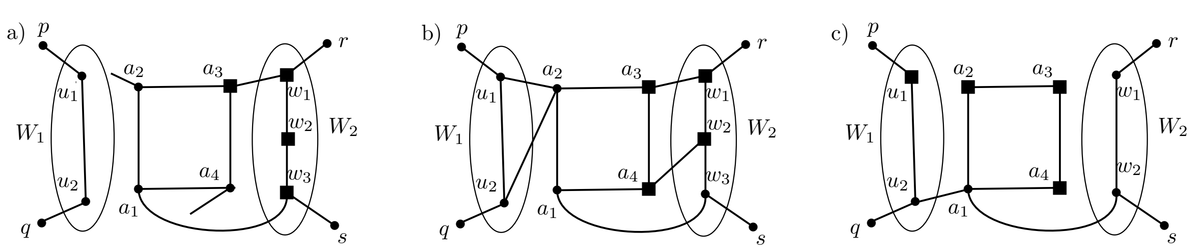

Figure 25: $G(W)$ – простой цикл, $|W_1| = 2$, $|W_2| \in \{2, 3\}$.

Утверждение 22. *В этом случае: Предположим, что u_i, w_j имеют общего соседа в W. Пусть $\{u_{i_0}\} = W_1 \setminus \{u_i\}$, $\{w_{j_0}\} = W_1 \setminus \{w_i\}$. Тогда $e_G(u_{i_0}, W) \geqslant 2$, $e_G(w_{j_0}, W) \geqslant 2$.*

Доказательство. Не умаляя общности, $\mathbf{u_2a_1, w_2a_1 \in E(G)}$ **(34)** (см. Рис. 25 c). Наша цель – показать, что $e_G(u_1, W) \geqslant 2$ и $e_G(w_1, W) \geqslant 2$. Из взаимозаменяемости, достаточно доказать, что $e_G(u_1, W) \geqslant 2$.

Предположим противное, $\mathbf{e_G(u_1, W) = 1}$ (**35**). Вспомним, что $a_1u_2 \in E(G)$ (34) и $e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1$ (33). Значит, $e_G(u_1, \{a_2, a_3, a_4\})$ – дерево. Это множество стягиваемое, потому что $u_2a_1w_2$ – путь. Тогда, по Лемме 18, G содержит 5-стягиваемое множество.

$\square$

Предположим, что $N_G(W_1) \cap N_G(W_2) \cap W \neq \varnothing$. Не умаляя общности, $u_1a_1, w_1a_1 \in E(G)$. Тогда, по Утверждению 22, $e_G(u_2, W) \geqslant 2$ и $e_G(w_2, W) \geqslant 2$. Вспомним, что $e_G(a_1, G - W - W_1) \leqslant 1$, $e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1$ (33) и $u_1a_1, w_1a_1 \in E(G)$. Тогда $u_2a_1, w_2a_1 \notin E(G)$. Тогда, поскольку $e_G(u_2, W) \geqslant 2$ и $e_G(w_2, W) \geqslant 2$, $e_G(u_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \geqslant 2$ и $e_G(w_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \geqslant 2$. Следовательно, u_2 и w_2 имеют общего соседа в W. Тогда, по Утверждению 22, $e_G(u_1, W) \geqslant 2$, $e_G(w_1, W) \geqslant 2$. Значит, $e_G(u_1, W) \geqslant 2$, $e_G(w_1, W) \geqslant 2$, $e_G(u_2, W) \geqslant 2$ и $e_G(w_2, W) \geqslant 2$. Вспомним (33). Значит, u_1 и u_2 не имеют общего соседа в W, w_1 и w_2 не имеют общего соседа в W. Тогда из набора фактов $e_G(u_1, W) \geqslant 2$, $e_G(w_1, W) \geqslant 2$, $e_G(u_2, W) \geqslant 2$ и $e_G(w_2, W) \geqslant 2$ следует, что все вершины W смежны с обоими W_1 и W_2. Следовательно, все вершины цикла W имеют степень не менее 4, противоречие с Леммой 6.

Следовательно, $\mathbf{N_G(W_1) \cap N_G(W_2) \cap W = \varnothing}$ (**36**). Тогда, по (33), $\mathbf{e_G(a_i, G - W) = 1}$ **для любого i** (**37**). Но все вершины из $W_1 \cup W_2$ смежны с W. Значит, **все вершины из W смежны с различными вершинами в** $\mathbf{W_1 \cup W_2}$ (**38**). Не умаляя общности, $\mathbf{a_2u_1 \in E(G)}$ (**39**). Тогда, по (37)-(39), имеет место один из следующих случаев.

Случай 4.1. $u_2a_1 \in E(G)$ или $u_2a_3 \in E(G)$.

Не умаляя общности, $\mathbf{u_2a_1 \in E(G)}$ (**40**). Вспомним (37)-(40). Значит, $w_1a_3, w_2a_4 \in E(G)$ или $w_2a_3, w_1a_4 \in E(G)$. Не умаляя общности, $\mathbf{w_1a_3, w_2a_4 \in E(G)}$ (**41**) (см. Рис. 26 a). Тогда, по (37)-(41), $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_2\}}$, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G - W) = \{u_1\}}$, $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) = \{w_1\}}$, $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G - W) = \{w_2\}}$ (**42**). Поскольку $u_1a_2 \in E(G)$ (39), $\mathbf{X = \{u_1, a_2, a_3\}}$ **связно (43)**. Это множество стягиваемое, потому что $u_2a_1a_4w_2$ – путь (42). Заметим, что $G - X$ не является простым циклом, так как $G - W - W_1$ 2-связен. По (42), $N_G(X) = \{p, u_2, a_1, a_4, w_1\}$. Тогда, по Лемме 5, существует $\mathbf{U \subset \{p, u_2, a_4, w_1\}}$ (**44**) такое, что $X \cup U$ стягиваемое. Заметим, что $a_1 \notin X \cup U$. В 2-связном графе $G - X - U$, a_1 должна иметь не менее 2 соседей. Поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_2\}$ (42), эти соседи – это u_2, a_4. Тогда, по (44), $\mathbf{U \subset \{p, w_1\}}$ (**45**). Если $U = \{p, w_1\}$, то $X \cup U$ 5-стягиваемое. Значит, $U = \{p\}$ или $U = \{w_1\}$. Тогда, по (42), $X \cup U$ – 4-стягиваемое дерево. По Лемме 18, G содержит 5-стягиваемое множество.

Случай 4.2. $u_2a_4 \in E(G)$.

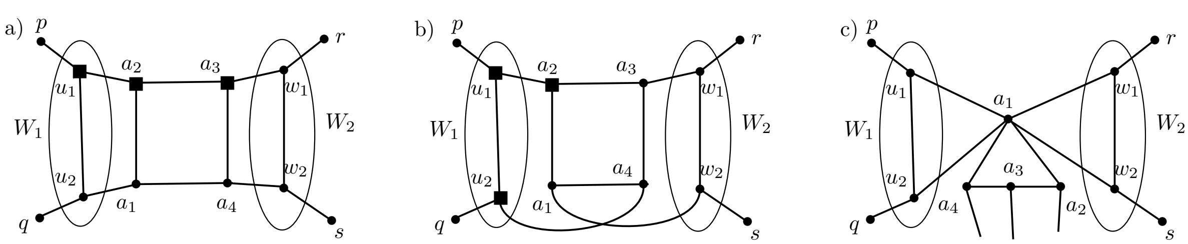

Figure 26: $G(W)$ – простой цикл, $|W_1| = |W_2| = 2$.

В этом случае, $\mathbf{u_2a_4 \in E(G)}$ (**46**). Вспомним (37)-(40). Следовательно, $w_1a_3, w_2a_1 \in$

$E(G)$ или $w_2a_3, w_1a_1 \in E(G)$. Не умаляя общности, $\mathbf{w_1a_3, w_2a_1 \in E(G)}$ (**47**) (см. Рис. 26 b). Тогда, по (37)-(40) и (47), $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G-W) = \{w_2\}}$, $\mathbf{N_G(a_2) \cap (G-W) = \{u_1\}}$, $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G-W) = \{w_1\}}$, $\mathbf{N_G(a_4) \cap (G-W) = \{u_2\}}$ (**48**). Поскольку $a_2u_1 \in E(G)$ (39), $\mathbf{Y = W_1 \cup \{a_2\}}$ **связно (49)**. Это множество стягиваемое, потому что $a_3w_1, a_1w_2 \in E(G)$ (47). По (48), $N_G(Y) = \{p, q, a_1, a_3, a_4\}$. Заметим, что $G - Y$ не является простым циклом, так как $G - W - W_1$ 2-связен. Тогда, по Лемме 5, существует $\mathbf{U \subset \{p, q, a_3, a_1\}}$ (**50**) такое, что $Y \cup U$ стягиваемое. Заметим, что $a_4 \notin Y \cup U$. В 2-связном графе $G - Y - U$, у a_4 не менее 2 соседей. Поскольку $N_G(a_4) \cap (G - W) = \{u_2\}$ (48), эти соседи – a_1, a_3. Тогда, по (50), $U \subset \{p, q\}$. Если $U = \{p, q\}$, то $Y \cup U$ 5-стягиваемо. Следовательно, $U = \{p\}$ или $U = \{q\}$. В любом случае, по (48), $Y \cup U$ – 4-стягиваемое дерево. Тогда, по Лемме 18, G содержит 5-стягиваемое множество.

Случай 5. $|W_1| = |W_2| = 2$, $min(|N_G(W_1) \cap W|, |N_G(W_2) \cap W|) = 1$.

Не умаляя общности, $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$. Если $e_G(\{a_2, a_3, a_4\}, W_2) \geqslant 1$, то, по Утверждению 21 (пункты 5 и 6), $e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1$, противоречие с $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$. Значит, $e_G(\{a_2, a_3, a_4\}, W_2) = 0$. Тогда, поскольку $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$, $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = N_G(W_2) \cap W = \{a_1\}}$ (**51**). Тогда, по Утверждению 21 (пункт 5), $e_G(a_i, G - W - W_j) \leqslant 1$ для любых $i \in \{2, 3, 4\}$ и $j \in \{1, 2\}$. Значит, $\mathbf{e_G(a_i, G - W - W_1 - W_2) = 1}$ **для любого** $\mathbf{i \in \{2, 3, 4\}}$ (**52**) (см. Рис. 26 c). По Утверждению 20, все вершины a_2, a_3, a_4 не могут иметь общего соседа в $G - W - W_1 - W_2$. Заметим, что W_1 стягиваемое, потому что $W_1 \cup W$ стягиваемое, $N_G(W_2) \cap W = \{a_1\}$ (51) и $e_G(a_4, G - W - W_1 - W_2) = 1$ (52). Вспомним, что $|N_G(W_1) \cap W| = \{a_1\}$ (51). Тогда, по Лемме 19, W_1 – хорошее множество. Это конфигурация 6.

□

Лемма 21. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W такое, что $G(W)$ – рука (см. Рис. 3). Пусть $E(G(W)) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4\}$ (см., например, Рис. 27 a). Тогда G содержит 5-стягиваемое множество или W образует одну из следующих конфигураций, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Конфигурация 7. $e_G(a_2, G - W) \geqslant 1$ *(см. Рис. 27 a), G содержит хорошее множество. Если $xy \in E(G(W))$, то $N_G(x) \cap N_G(y) \cap (G - W) = \varnothing$. $e_G(a_3, G - W) = e_G(a_4, G - W) = 1$.*

Конфигурация 8. $e_G(a_2, G - W) = 0$. *$|W_1| = |W_2| = 2$. $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$, $N_G(W_2) \cap W = \{a_1\}$ (см. Рис. 30 b). G содержит хорошее множество. Если $xy \in E(G(W))$, то $N_G(x) \cap N_G(y) \cap (G - W) = \varnothing$. $e_G(a_3, G - W) = e_G(a_4, G - W) = 1$.*

Доказательство. Предположим, что a_2 и a_i имеют общего соседа $x \in V(G - W)$. Тогда $d_G(x) \geqslant 4$ и a_2xa_i – простой цикл. Тогда, по Лемме 6, $d_G(a_2) = 3$, противоречие с $a_2x \in E(G)$.

Значит, **для любого** $\mathbf{i \in \{1, 3, 4\}}$, $\mathbf{N_G(a_2) \cap N_G(a_i) \cap (G - W) = \varnothing}$ (**1**).

Предположим, что a_3 и a_4 имеют общего соседа $x \in V(G - W)$. Тогда $d_G(x) \geqslant 4$ и a_3xa_4 – простой цикл. Тогда, по Лемме 6, $d_G(a_3) = d_G(a_4) = 3$. Следовательно, $N_G(\{a_3, a_4\}) \cap (G - W) = \{x\}$. Тогда $\{x, a_2\}$ – разделяющее множество, противоречие с 3-связностью G.

Следовательно, $N_G(a_3) \cap N_G(a_4) \cap (G - W) = \varnothing$. Тогда, по (1), **если** $\mathbf{xy \in E(G(W))}$, **то** $\mathbf{N_G(x) \cap N_G(y) \cap (G - W) = \varnothing}$ (**2**).

Случай 1. $e_G(a_2, G - W) \geqslant 1$ (см. Рис. 27 a).

В этом случае, $\mathbf{e_G(a_2, G - W) \geqslant 1}$ $(\mathbf{3})$. Очевидно, $e_G(a_1, G - W) \geqslant 2$. Тогда, по (3), $\{a_3, a_4\}$ стягиваемое. По (3), $d_G(a_2) \geqslant 4$. Заметим, что есть цикл $a_2a_3a_4$. Тогда, по Лемме 6, $d_G(a_3) = 3$, $d_G(a_4) = 3$. Значит, $\mathbf{e_G(a_3, G - W) = 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, G - W) = 1}$ $(\mathbf{4})$. Пусть $\{x\} = N_G(a_3) \cap (G - W)$ и $\{y\} = N_G(a_4) \cap (G - W)$. По (2), $x \neq y$. Значит, $N_G(a_3) \cap (G - \{a_3, a_4\}) = \{a_2, x\}$ и $N_G(a_4) \cap (G - \{a_3, a_4\}) = \{a_2, y\}$. Тогда, по Определению 10, $\{a_3, a_4\}$ – хорошее множество. Вспомним (2) и (4). Это конфигурация 7.

Случай 2. $e_G(a_2, G - W) = 0$.

В этом случае, $\mathbf{e_G(a_2, G - W) = 0}$ $(\mathbf{5})$.

Утверждение 23. *В этом случае выполнены следующие утверждения.*

1) Если $|W_i| = 2$, то $e_G(a_1, W_i) \geqslant 1$, $e_G(a_3, G - W - W_i) \leqslant 1$, $e_G(a_4, G - W - W_i) \leqslant 1$.

2) Предположим, что $|W_i| \geqslant 4$ и $L \subset W_i$, $|L| = 4$, L – подпуть W_i. Тогда $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset L$ или $N_G(\{a_3, a_4\}) \cap (G - W) \subset L$.

3) Предположим, что $|W_i| = 3$. Тогда $|N_G(W_i) \cap W| \geqslant 2$.

4) Если $|W_1| = 3$, то $N_G(\{u_1, u_3\}) \cap N_G(W_2) \cap W = \varnothing$. Если $|W_2| = 3$, то $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap N_G(W_1) \cap W = \varnothing$.

Доказательство. 1) По Лемме 8, $e_G(a_1, W_i) \geqslant 1$. Значит, $W_i \cup (W \setminus \{a_3\})$, $W_i \cup (W \setminus \{a_4\})$ связны. Поскольку эти множества не стягиваемые, $e_G(a_3, G - W - W_i) \leqslant 1$ и $e_G(a_4, G - W - W_i) \leqslant 1$.

2) Не умаляя общности, $|W_1| \geqslant 4$. Пусть $\mathbf{L = \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\}}$ $(\mathbf{6})$. Очевидно, **если $\mathbf{u_{i-1}}$ существует, то $\mathbf{e_G(u_{i-1}, W) \geqslant 1}$ и если $\mathbf{u_{i+4}}$ существует, то $\mathbf{e_G(u_{i+4}, W) \geqslant 1}$ $(\mathbf{7})$.**

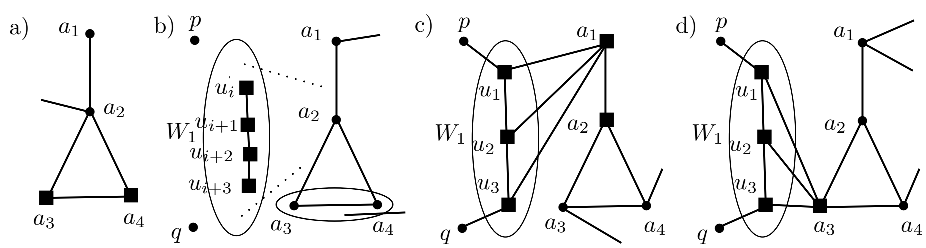

Figure 27: $G(W)$ – рука.

Предположим противное. Тогда $e_G(a_1, G - W - L) \geqslant 1$ и $e_G(\{a_3, a_4\}, G - W - L) \geqslant 1$ (см. Рис. 27 b). Очевидно, $W_2 \subset N_G(W)$. Тогда, по (7), L стягиваемо. Тогда, по Лемме 15, G содержит 5-стягиваемое множество.

3) Не умаляя общности, $|W_1| = 3$. Предположим противное, $\mathbf{|N_G(W_1) \cap W| = 1}$ $(\mathbf{8})$. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5), **$\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_i\}}$ для какого-то $\mathbf{i \in \{1, 3, 4\}}$ $(\mathbf{9})$.**

Предположим, $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$. Тогда $e_G(a_3, G - W - W_1) \geqslant 1$ и $e_G(a_4, G - W - W_1) \geqslant 1$ (см. Рис. 27 c). По (2), a_3 и a_4 смежны с различными вершинами в $G - W - W_1$. Тогда, поскольку $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$, $W_1 \cup \{a_1, a_2\}$ стягиваемое.

Значит, $N_G(W_1) \cap W \neq \{a_1\}$. Тогда, по (9), $N_G(W_1) \cap W = \{a_3\}$ или $N_G(W_1) \cap W = \{a_4\}$. Не умаляя общности, $N_G(W_1) \cap W = \{a_3\}$. Тогда $e_G(a_4, G - W - W_1) \geqslant 1$ и $e_G(a_1, G - W - W_1) \geqslant 2$ (см. Рис. 27 d). Тогда, поскольку $N_G(W_1) \cap W = \{a_3\}$, $W_1 \cup \{a_3\}$ – стягиваемый алмаз. По Лемме 17, G содержит 5-стягиваемое множество.

4) Не умаляя общности, $|W_1| = 3$. Предположим противное, $a_j \subset N_G(\{u_1,u_3\}) \cap N_G(W_2) \cap W = \varnothing$. Поскольку $e_G(a_2, G-W) = 0$ (5), $j \in \{1,3,4\}$. Значит, $W \setminus \{a_j\}$ связно. По Утверждению 23 (пункт 3), $|N_G(W_1) \cap W| \geqslant 2$. Тогда, поскольку $j \in \{1,3,4\}$, $e_G(W \setminus \{a_j, W_1\}) \geqslant 1$. Тогда, по Лемме 7, G содержит 5-стягиваемое множество.

$\square$

Случай 2.1. $min(|W_1|,|W_2|) \geqslant 4$.

В этом случае, по Утверждению 23 (пункт 2) для обоих W_1, W_2, $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset W_1$, $N_G(\{a_3,a_4\}) \cap (G-W) \subset W_2$ или $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset W_2$, $N_G(\{a_3,a_4\}) \cap (G-W) \subset W_1$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G-W) \subset W_1}$, $\mathbf{N_G(\{a_3,a_4\}) \cap (G-W) \subset W_2}$ **(10)**. Вспомним, что $e_G(a_2, G-W) = 0$ (5). Тогда $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}}$ **(11)**.

Предположим, что $|W_1| \geqslant 5$. Тогда, по Утверждению 23 (пункт 2), $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\}$ или $N_G(\{a_3,a_4\}) \cap (G-W) \subset \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\}$ для любого $i \in \{1,2\}$. Тогда, по (10), $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset \{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\}$ для любого $i \in \{1,2\}$. Следовательно, $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset \{u_2,u_3,u_4\}$, противоречие с $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$ (11).

Значит, $|W_1| \leqslant 4$. Тогда, по условию случая, $|W_1| = 4$. По (10) и (2), $\mathbf{a_3}$ **и** $\mathbf{a_4}$ **смежны с различными вершинами в** $\mathbf{W_2}$ **(12)** (см. Рис. 28 a). По (11), $W_1 \cup \{a_1\}$ связно. Тогда, по (12), это множество стягиваемое.

Случай 2.2. $min(|W_1|,|W_2|) = 3$, $max(|W_1|,|W_2|) \geqslant 4$.

Не умаляя общности, $|W_1| = 3$, $|W_2| \geqslant 4$.

Предположим, что $N_G(\{a_3,a_4\}) \cap (G-W) \subset W_2$. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G-W) = 0$ (5), $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$, противоречие с Утверждением 23 (пункт 3).

Значит, $N_G(\{a_3,a_4\}) \cap (G-W) \not\subset W_2$. По Утверждению 23 (пункт 2), $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset W_2$ или $N_G(\{a_3,a_4\}) \cap (G-W) \subset W_2$. Следовательно, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G-W) \subset W_2}$ **(13)**. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G-W) = 0$ (5), $N_G(W_1) \cap W \subset \{a_3,a_4\}$. По Утверждению 23 (пункт 3), $|N_G(W_1) \cap W| \geqslant 2$. Следовательно, $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_3,a_4\}}$ **(14)**.

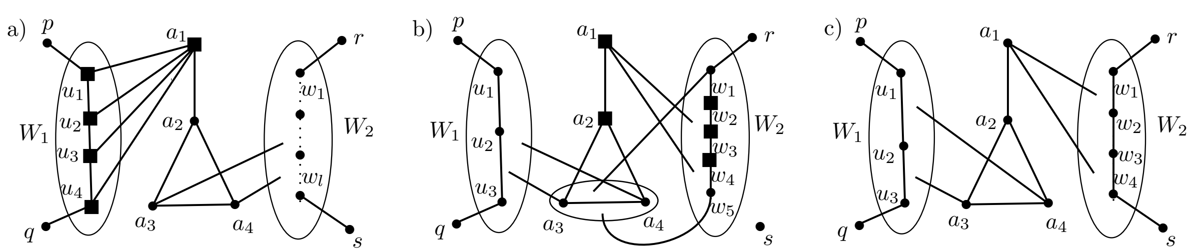

Figure 28: $G(W)$ – рука, $|W_1| \geqslant 3$, $|W_2| \geqslant 4$.

Предположим, что $|W_2| \geqslant 5$. Тогда, по Утверждению 23 (пункт 2), $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset \{w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}\}$ или $N_G(\{a_3,a_4\}) \cap (G-W) \subset \{w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}\}$ для любого $i \in \{1,2\}$. Тогда, по (14), $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset \{w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}\}$ для любого $i \in \{1,2\}$. Следовательно, $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset \{w_2,w_3,w_4\}$. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G-W) = 0$ (5), $e_G(w_1, \{a_3,a_4\}) \geqslant 1$ и $e_G(w_5, \{a_3,a_4\}) \geqslant 1$ (см. Рис. 28 b). Поскольку $N_G(a_1) \cap (G-W) \subset \{w_2,w_3,w_4\}$, $\{a_1,a_2,w_2,w_3,w_4\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $e_G(w_1, \{a_3,a_4\}) \geqslant 1$, $e_G(w_5, \{a_3,a_4\}) \geqslant 1$ и $N_G(W_1) \cap W = \{a_3,a_4\}$ (14).

Значит, $|W_2| = 4$ (см. Рис. 28 c). По (13), $W_2 \cup \{a_1\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $N_G(W_1) \cap W = \{a_3,a_4\}$ (14).

Случай 2.3. $min(|W_1|, |W_2|) = 2$, $max(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$.

Не умаляя общности, $|W_1| = 2$, $|W_2| \geqslant 4$. По Утверждению 23 (пункт 1), $\mathbf{e_G(a_1, W_1) \geqslant 1}$ **(15)** и $\mathbf{e_G(a_3, G - W - W_1) \leqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, G - W - W_1) \leqslant 1}$ **(16)**. Пусть $\mathbf{L = \{w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}\}}$ **(17)** для какого-то i. По Утверждению 23 (пункт 2), $N_G(a_1) \cap (G - W) \subset L$ или $N_G(\{a_3, a_4\}) \cap (G - W) \subset L$. Тогда, по (15), $\mathbf{N_G(\{a_3, a_4\}) \cap (G - W) \subset L}$ **(18)**. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5), **если $\mathbf{w_{i-1}}$ существует, то $\mathbf{w_{i-1}a_1 \in E(G)}$ и если $\mathbf{w_{i+4}}$ существует, то $\mathbf{w_{i+4}a_1 \in E(G)}$ (19)**.

Предположим, что $e_G(\{a_3, a_4\}, \{w_i, w_{i+3}\}) \geqslant 1$. Не умаляя общности, $a_4w_{i+3} \in E(G)$ (см. Рис. 29 a). По (18), $e_G(a_3, L) \geqslant 1$. По (2), $a_3w_{i+3} \notin E(G)$. Тогда $e_G(a_3, \{w_i, w_{i+1}, w_{i+2}\}) \geqslant 1$. Тогда, по (16), $e_G(a_3, \{w_i, w_{i+1}, w_{i+2}\}) = 1$. Следовательно, $\{a_3, w_i, w_{i+1}, w_{i+2}\}$ – дерево. Это множество стягиваемое, потому что $sw_l....w_{i+3}a_4a_2a_1$ – путь, $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ (15) и, если w_{i-1} существует, то $w_{i-1}a_1 \in E(G)$ (19).

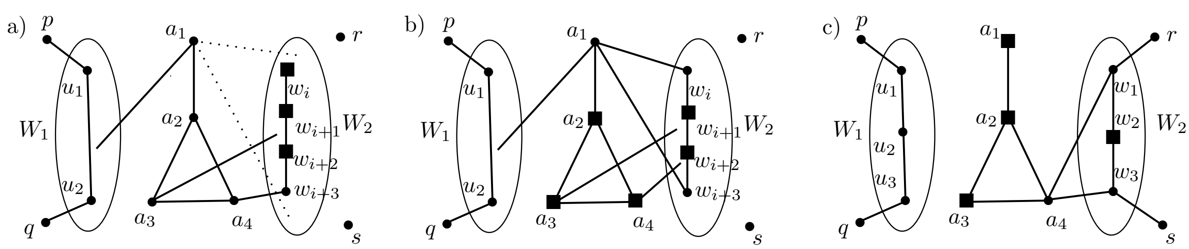

Figure 29: $G(W)$ – рука, $|W_2| \geqslant 3$.

Значит, $\mathbf{e_G(\{a_3, a_4\}, \{w_i, w_{i+3}\}) = 0}$ **(20)**. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5), $\mathbf{w_ia_1, w_{i+3}a_1 \in E(G)}$ **(21)** (см. Рис. 29 b). Поскольку $N_G(\{a_3, a_4\}) \cap (G - W) \subset L$ (18) и $e_G(\{a_3, a_4\}, \{w_i, w_{i+3}\}) = 0$ (20), $e_G(\{a_3, a_4\}, \{w_{i+1}, w_{i+2}\}) \geqslant 1$. Следовательно, $\{a_3, a_4, a_2, w_{i+1}, w_{i+2}\}$ связно. Это множество стягиваемое, потому что $rw_1...w_ia_1w_{i+3}....w_ls$ – путь (21).

Случай 2.4. $|W_1| = |W_2| = 3$.

Вспомним, что $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5), $|N_G(W_i) \cap W| \geqslant 2$ для любого $i \in \{1, 2\}$ (Утверждение 23, пункт 3), $N_G(\{u_1, u_3\}) \cap N_G(W_2) \cap W = \varnothing$ (Утверждение 23, пункт 4), $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap N_G(W_1) \cap W = \varnothing$ (Утверждение 23, пункт 4). Следовательно, $\mathbf{N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W = \{a_i\}}$ **(22)** для какого-то $i \in \{1, 3, 4\}$, $\mathbf{N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W = \{a_j\}}$ **(23)** для какого-то $j \in \{1, 3, 4\}$ и $\mathbf{i \neq j}$ **(24)**. Не умаляя общности, $j \in \{3, 4\}$. Заметим, что a_3 и a_4 взаимозаменяемы. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W = \{a_4\}}$ **(25)** (см. Рис. 29 c).

Предположим, что $w_2a_4 \in E(G)$. Тогда $w_2a_4w_1$ – цикл, $d_G(a_4) \geqslant 4$. Тогда, по Лемме 6, $d_G(w_2) = 3$. Тогда, поскольку $w_2a_4 \in E(G)$, $N_G(w_2) \cap W = \{a_4\}$. Тогда, по (25), $N_G(W_2) \cap W = \{a_4\}$, противоречие с Утверждением 23, пункт 3.

Следовательно, $w_2a_4 \notin E(G)$. Следовательно, $\mathbf{e_G(w_2, \{a_1, a_2, a_3\}) \geqslant 1}$ **(26)**.

Предположим, что $e_G(w_2, \{a_1, a_2, a_3\}) \geqslant 2$. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5), $w_2a_1, w_2a_3 \in E(G)$. Тогда, поскольку $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W = \{a_4\}$, все вершины a_1, a_3, a_4 смежны с W_2. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5), $N_G(\{u_1, u_3\}) \cap W \cap N_G(W_2) \neq \varnothing$, противоречие с Утверждением 23 (пункт 4).

Значит, $e_G(w_2, \{a_1, a_2, a_3\}) \leqslant 1$. Тогда, по (26), $e_G(w_2, \{a_1, a_2, a_3\}) = 1$. Следовательно, $\{w_2, a_1, a_2, a_3\}$ – дерево. Это множество стягиваемое, потому что $w_1a_4w_3$ – путь (25). Тогда, по Лемме 18, G содержит 5-стягиваемое множество.

Случай 2.5. $min(|W_1|, |W_2|) = 2$, $max(|W_1|, |W_2|) = 3$.

Не умаляя общности, $|W_1| = 2$, $|W_2| = 3$. По Утверждению 23 (пункт 2), $\mathbf{e_G(a_1, W_1) \geqslant 1}$ (**27**) и $\mathbf{e_G(a_3, G - W - W_1) \leqslant 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, G - W - W_1) \leqslant 1}$ (**28**). По Утверждению 23 (пункт 4), $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W \cap N_G(W_1) = \varnothing$. Тогда, поскольку $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ (27), $e_G(\{w_1, w_3\}, a_1) = 0$. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G-W) = 0$ (5), $N_G(\{w_1, w_3\}) \cap W \subset \{a_3, a_4\}$. Тогда, по (28), $N_G(w_1) \cap W = \{a_3\}$, $N_G(w_3) \cap W = \{a_4\}$ или $N_G(w_3) \cap W = \{a_3\}$, $N_G(w_1) \cap W = \{a_4\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(w_1) \cap W = \{a_3\}}$, $\mathbf{N_G(w_3) \cap W = \{a_4\}}$ (**29**) (см. Рис. 30 a). Тогда, по (28), $e_G(w_2, \{a_3, a_4\}) = 0$. Следовательно, $e_G(w_2, \{a_1, a_2\}) \geqslant 1$. Тогда, поскольку $e_G(a_1, W_1) \geqslant 1$ (27), $\mathbf{T = W_1 \cup \{a_1, a_2, w_2\}}$ **связно (30)**. В 2-связном графе $G - W - W_1$, существует простой rs-путь rW_2s. В графе $G - T$ этот путь заменён на $rw_1a_3a_4w_3s$ (29). Следовательно, $G - T$ 2-связен. Тогда, по (30), T 5-стягиваемо.

Случай 2.6. $|W_1| = 2$, $|W_2| = 2$, $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$ или $N_G(W_2) \cap W = \{a_1\}$.

Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}}$ (**31**). Если $e_G(\{a_2, a_3, a_4\}, W_2) \geqslant 1$, то $W_2 \cup \{a_2, a_3, a_4\}$ стягиваемое, потому что $e_G(a_1, W_1) \geqslant 2$ (31). Значит, $e_G(\{a_2, a_3, a_4\}, W_2) = 0$. Следовательно, $\mathbf{N_G(W_2) \cap W = \{a_1\}}$ (**32**). Тогда, по Утверждению 23 (пункт 1), $\mathbf{e_G(a_3, G - W) = 1}$, $\mathbf{e_G(a_4, G - W) = 1}$, $\mathbf{a_3}$ **и** $\mathbf{a_4}$ **имеют соседей в** $\mathbf{G - W - W_1 - W_2}$ (**33**) (см. Рис. 30 b). Заметим, что W_1 стягиваемое, потому что $N_G(W_2) \cap W = \{a_1\}$ (32) и $e_G(a_4, G - W - W_1 - W_2) = 1$ (33). Вспомним, что $N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}$ (31). Тогда, по Лемме 19, W_1 – хорошее множество. Вспомним (33). Это конфигурация 8.

Случай 2.7. $|W_1| = 2$, $|W_2| = 2$, $N_G(W_1) \cap W \neq \{a_1\}$ и $N_G(W_2) \cap W \neq \{a_1\}$.

По условию случая, $W_i \cup \{a_2, a_3, a_4\}$ связно для любого $i \in \{1, 2\}$. Поскольку эти множества не стягиваемы, $e_G(a_1, G - W - W_1) \leqslant 1$ и $e_G(a_1, G - W - W_2) \leqslant 1$. Следовательно, $N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_i, w_j\}$ для каких-то i, j. Не умаляя общности, $\mathbf{N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_1, w_1\}}$ (**34**). Значит, $\mathbf{e_G(u_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(w_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \geqslant 1}$ (**35**).

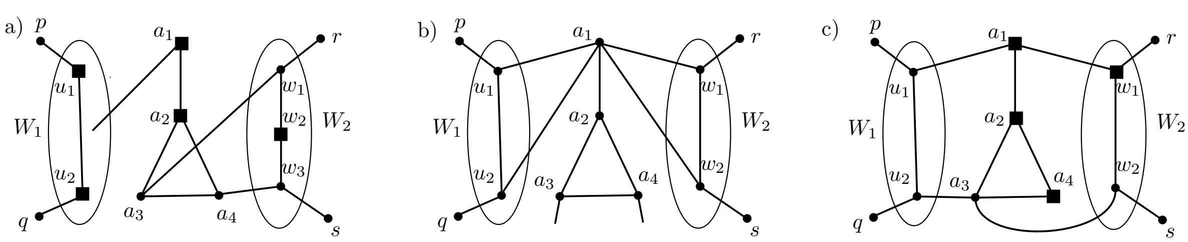

Figure 30: $G(W)$ – рука, $|W_1| = 2$, $|W_2| \in \{2, 3\}$.

Предположим, что $e_G(u_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \geqslant 2$ или $e_G(w_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \geqslant 2$. Не умаляя общности, $e_G(u_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \geqslant 2$. Поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5), $u_2a_3, u_2a_4 \in E(G)$, противоречие с $N_G(a_3) \cap N_G(a_4) \cap (G - W) = \varnothing$ (2).

Следовательно, $e_G(u_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \leqslant 1$ и $e_G(w_2, \{a_2, a_3, a_4\}) \leqslant 1$. Тогда, по (35), $\mathbf{e_G(u_2, \{a_2, a_3, a_4\}) = 1}$, $\mathbf{e_G(w_2, \{a_2, a_3, a_4\}) = 1}$ (**36**).

Случай 2.7.1. u_2 и w_2 имеют общего соседа в $\{a_2, a_3, a_4\}$.

В этом случае, поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (37), u_2 и w_2 имеют общего соседа в $\{a_3, a_4\}$. Не умаляя общности, $\mathbf{u_2a_3, w_2a_3 \in E(G)}$ (**37**) (см. Рис. 30 c).

Предположим, что $u_1a_4, w_1a_4 \in E(G)$. Тогда $u_1a_1w_1a_4$ – цикл, $d_G(u_1) \geqslant 4$, $d_G(w_1) \geqslant 4$, $d_G(a_4) \geqslant 4$, противоречие с Леммой 6.

Значит, $u_1a_4 \notin E(G)$ или $w_1a_4 \notin E(G)$. Не умаляя общности, $w_1a_4 \notin E(G)$. Тогда, поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5) и $w_1a_1 \in E(G)$ (34), $\{w_1, a_1, a_2, a_4\}$ – простой путь. Это множество стягиваемое, потому что $w_2a_3u_2$ – путь (37). Тогда, по Лемме 15, G содержит 5-стягиваемое множество.

Случай 2.7.2. u_2 и w_2 не имеют общего соседа в $\{a_2, a_3, a_4\}$.

По (36), $e_G(u_2, \{a_2, a_3, a_4\}) = 1$, $e_G(w_2, \{a_2, a_3, a_4\}) = 1$. Тогда из условия случая и $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5) следует, что $u_2a_3, w_2a_4 \in E(G)$ или $u_2a_4, w_2a_3 \in E(G)$. Не умаляя общности, $\mathbf{u_2a_3, w_2a_4 \in E(G)}$ **(38)** (см. Рис. 31 а). По Утверждению 23, $e_G(a_3, G - W - W_2) \leqslant 1$. Тогда, поскольку $u_2a_3 \in E(G)$ (38), $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W - W_2) = \{u_2\}}$ **(39)**. По (2), $N_G(a_3) \cap N_G(a_4) \cap (G - W) = \varnothing$. Тогда, поскольку $w_2a_4 \in E(G)$ (38), $a_3w_2 \notin E(G)$. Тогда, по (39), $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) = \{u_2\}}$ **или** $\mathbf{N_G(a_3) \cap (G - W) = \{u_2, w_1\}}$ **(40)**. По (39), $\mathbf{Y = W_1 \cup \{a_3\}}$ **связно (41)**. Это множество стягиваемое, потому что $u_1a_1 \in E(G)$ (34) и $w_2a_4 \in E(G)$ (38). Заметим, что $G - Y$ не является простым циклом, потому что $G - W - W_1$ 2-связен. Из (40) и $a_1u_1 \in E(G)$ (34) следует, что $\mathbf{N_G(Y) = \{p, q, a_1, a_2, a_4\}}$ **или** $\mathbf{N_G(Y) = \{p, q, a_1, a_2, a_4, w_1\}}$ **(42)**. Тогда, по Лемме 5, существует $\mathbf{U \subset \{p, q, a_1, a_4, w_1\}}$ **(43)** такое, что $Y \cup U$ стягиваемое. По (41) и (43), $a_2 \notin Y \cup U$. В 2-связном графе $G - Y - U$, у a_2 не менее, чем 2 соседа. Поскольку $e_G(a_2, G - W) = 0$ (5), эти соседи – a_1, a_4. Значит, a_1, $a_4 \notin U$. Тогда, по (43), $\mathbf{U \subset \{p, q, w_1\}}$ **(44)**. Тогда, по (41), $a_1 \notin X \cup U$. В 2-связном графе $G - Y - U$, у a_1 должно быть не менее, чем 2 соседа. Поскольку $N_G(a_1) \cap (G - W) = \{u_1, w_1\}$ (34), эти соседи – это a_2, w_1. Следовательно, $w_1 \notin U$. Тогда, по (44), $U \subset \{p, q\}$. Если $U = \{p, q\}$, то $Y \cup U$ 5-стягиваемо. Значит, $U = \{p\}$ или $U = \{q\}$. Тогда, поскольку $N_G(a_3) \cap (G - W - W_2) = \{u_2\}$ (39), $Y \cup U$ – дерево. Тогда, по Лемме 18, G содержит 5-стягиваемое множество.

□

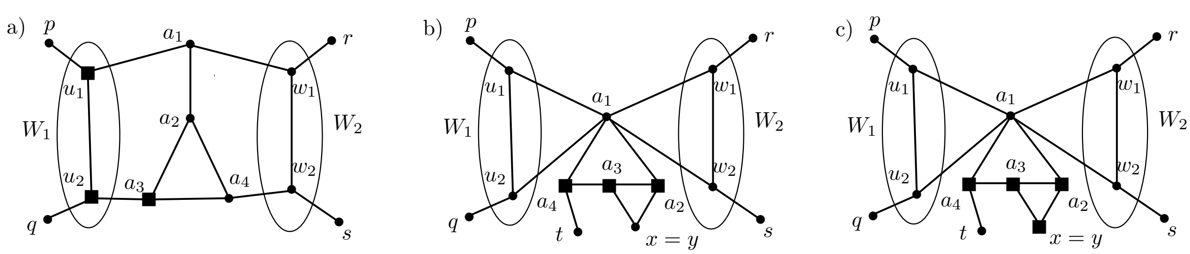

Figure 31: $G(W)$ – рука или простой цикл, $|W_1| = 2$, $|W_2| = 2$.

Лемма 22. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W. Тогда G содержит 5-стягиваемое множество или, для любого $xy \in E(G(W))$, $N_G(x) \cap N_G(y) \cap (G - W) = \varnothing$, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. По Лемме 18, W – простой цикл или W – рука. Если W – рука, то, по Лемме 21, W образует одну из конфигураций 7, 8. У этих конфигураций есть требуемое свойство. Следовательно, W – простой цикл. Тогда, по Лемме 20, W образует конфигурацию 6. По условию этой конфигурации, $|W_1| = |W_2| = 2$. Вершины W могут быть пронумерованы так, что $\mathbf{N_G(W_1) \cap W = \{a_1\}}$, $\mathbf{N_G(W_2) \cap W = \{a_1\}}$ **(1)**

и $\mathbf{e_G(a_i, G - W - W_1 - W_2) = 1}$ **для любого** $\mathbf{i \in \{2, 3, 4\}}$ **(2)** (см. Рис. 26 c). **Все вершины** $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$ **не могут иметь общего соседа в** $\mathbf{G - W - W_1 - W_2}$ **(3)**. Пусть $\mathbf{\{x\} = N_G(a_2) \cap (G - W)}$, $\mathbf{\{y\} = N_G(a_3) \cap (G - W)}$, $\mathbf{\{t\} = N_G(a_4) \cap (G - W)}$ **(4)**, где $\mathbf{x, y, t \in V(G - W - W_1 - W_2)}$ **(5)**. Тогда, по (3), $\mathbf{x \neq y}$ **или** $\mathbf{y \neq t}$ **(6)**.

Предположим, что a_1 и a_i имеют общего соседа в $G - W$ для какого-то $i \in \{2, 4\}$. Не умаляя общности, $a_1 f, a_2 f \in E(G)$ для какого-то $f \in V(G - W)$. Тогда $a_1 a_2 f$ – цикл, $d_G(a_1) \geqslant 4$ (1) и $d_G(f) \geqslant 4$ (поскольку $f \in V(G - W)$ и fa_1, $fa_2 \in E(G)$), противоречие с Леммой 6. Значит, $\mathbf{N_G(a_1) \cap N_G(a_i) = \varnothing}$ **для любого** $\mathbf{i \in \{2, 4\}}$ **(7)**.

Предположим противное. Тогда $N_G(x) \cap N_G(y) \cap (G - W) \neq \varnothing$ для каких-то x, y таких, что $xy \in E(G(W))$. Тогда, по (7), a_2 и a_3 имеют общего соседа или a_3 и a_4 имеют общего соседа в $G - W$. Не умаляя общности, a_2 и a_3 имеют общего соседа в $G - W$. Тогда, по (4), $\mathbf{x = y}$ **(8)**. Тогда, по (6), $\mathbf{t \neq x}$ **(9)**. По (1), $\mathbf{X = \{a_2, a_3, a_4\}}$ **стягиваемое (10)** (см. Рис. 31 b). По (4) и (8), $N_G(X) = \{a_1, x, t\}$. Заметим, что $G - X$ не является простым циклом, потому что $G - W - W_1$ 2-связен. Тогда, по Лемме 5, существует $U \subset \{x, t\}$ такое, что $X \cup U$ стягиваемое. Если $U = \{x, t\}$, то $X \cup U$ 5-стягиваемо. Значит, $\mathbf{U = \{x\}}$ **или** $\mathbf{U = \{t\}}$ **(11)**.

Предположим, что $U = \{t\}$. Тогда из (4) и $x = y$ (8) следует, что $X \cup U$ – простой путь. Тогда, по Лемме 15, G содержит 5-стягиваемое множество.

Следовательно, $U \neq t$. Тогда, по (11), $\mathbf{U = \{x\}}$ **(12)**. Следовательно, $\mathbf{Y = \{a_2, a_3, a_4, x\}}$ **стягиваемое (13)** (см. Рис. 31 c). Из (4), $x = y$ (8) и $t \neq x$ (9) следует, что Y – рука. По Лемме 21, Y образует одну из конфигураций 7, 8. Если Y образует конфигурацию 7, то, по условию этой конфигурации, $e_G(a_3, G - Y) \geqslant 1$, противоречие с $N_G(a_3) \cap (G - W) = \{y\}$ (4). Значит, Y образует конфигурацию 8. По условию этой конфигурации, $e_G(a_4, G - Y) \geqslant 4$, противоречие с $N_G(a_4) \cap (G - W) = \{t\}$ (4).

□

Лемма 23. *Пусть G – минимальный 3-связный граф, $v(G) \geqslant 11$. Предположим, G содержит 4-стягиваемое множество W. Тогда G содержит 5-стягиваемое множество, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.*

Доказательство. По Лемме 18, W – простой цикл или W – рука. Тогда, по Леммам 20 и 21, W образует одну из конфигураций 6, 7, 8. В этих конфигурациях G содержит хорошее множество. Итак, в G есть хорошее множество.

Вспомним Определение 10. Пусть X_0 – хорошее множество, $\mathbf{X_0}$ **стягиваемое (1)**, $\mathbf{X_0 = \{b, c\}}$ **(2)**, $\mathbf{bc \in E(G)}$ **(3)**, $\mathbf{N_G(b) = \{b_0, x, c\}}$ **(4)**, $\mathbf{N_G(c) = \{c_0, x, b\}}$ **(5)**, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{c_0}$, $\mathbf{x}$ **различны (6)** (см., например, Рис. 32 a). Следовательно, $\mathbf{N_G(\{b, c\}) = \{b_0, c_0, x\}}$ **(7)**. Если $G - X_0$ – простой цикл, то, поскольку $v(G) \geqslant 11$, $|N_G(X_0)| \geqslant 8$, противоречие с (7). Значит, $\mathbf{G - X_0}$ **не является простым циклом (8)**. Вспомним (7). По Лемме 5, существует $U \subset \{c_0, b_0\}$ такое, что $X_0 \cup U$ стягиваемо.

Предположим, что $U = \{c_0, b_0\}$. Значит, $\{b, c, b_0, c_0\}$ стягиваемо. Тогда $bc \in E(G)$, b и c имеют общего соседа $x \in V(G - \{b, c, b_0, c_0\})$. По Лемме 22, G содержит 5-стягиваемое множество.

Значит, $U = \{c_0\}$ или $U = \{b_0\}$. Не умаляя общности, $U = \{b_0\}$. Следовательно, $\mathbf{X = \{b, c, b_0\}}$ **стягиваемое (9)** (см. Рис. 32 a). По (4) и (5), $\mathbf{N_G(b) \cap (G - X) = \{x\}}$ **(10)** и $\mathbf{N_G(c) \cap (G - X) = \{x, c_0\}}$ **(11)**.

Предположим, что $G - X$ – простой цикл. Вспомним (10) и (11). Тогда, по Лемме 14 (пункт 2), G содержит 5-стягиваемое множество. Следовательно, $\mathbf{G - X}$ **не является простым циклом (12)**.

Предположим, что X не максимально (см. Определение 2). Тогда $X \cup \{y\}$ стягиваемое для какого-то $y \notin X$. Если $y \neq x$, то b, c имеют общего соседа $x \in V(G - X - \{y\})$, противоречие с Леммой 22. Значит, $y = x$. Следовательно, $X \cup \{x\}$ стягиваемое (см. Рис. 32 b). По Лемме 18, $X \cup \{x\}$ – простой цикл или рука. Заметим, что $X \cup \{x\}$ не является простым циклом, потому что bcx – треугольник (3), (4), (5). Значит, $X \cup \{x\}$ – рука. Следовательно, $b_0 x \notin E(G)$. По Лемме 21, $X \cup \{x\}$ образует одну из конфигураций 7, 8. У этих конфигураций есть свойства '$e_G(a_3, G - W) = 1$', '$e_G(a_4, G - W) = 1$'. Это соответствует тому, что $e_G(x, G - X - \{x\}) = 1$. Вспомним, что $\{b, c\}$ стягиваемое (1), (2). Значит, $e_G(x, G - \{b, c\}) \geqslant 2$. Тогда, поскольку $xb_0 \notin E(G)$, $e_G(x, G - X - \{x\}) \geqslant 2$, противоречие.

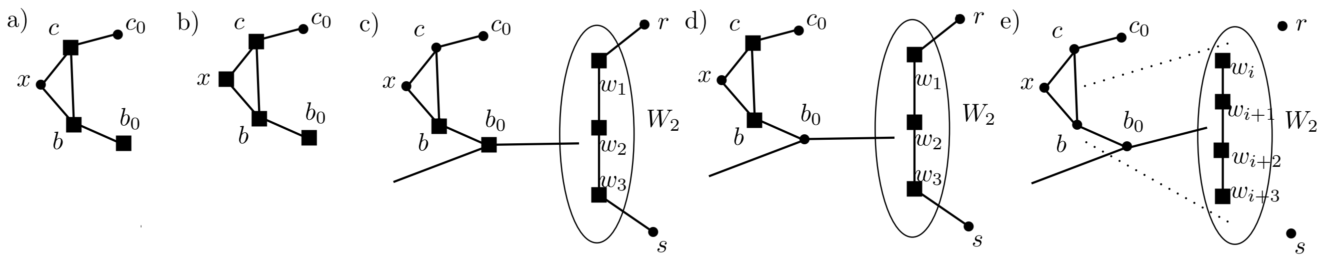

Figure 32: В G есть хорошее множество.

Значит, X максимально (см. Рис. 32 a). Вспомним, что $G - X$ не является простым циклом (12). Следовательно, можно применить Лемму 3 для X. Мы сохраним наши обозначения W_1, W_2, p, q, r, s. Если $|W_i| = 2$ для какого-то $i \in \{1, 2\}$, то $W_i \cup W$ 5-стягиваемо. Значит, $|\mathbf{W_1}| \geqslant \mathbf{3}$, $|\mathbf{W_2}| \geqslant \mathbf{3}$ (**13**). Тогда, поскольку $N_G(\{b, c\}) \cap (G - X) = \{c_0, x\}$ (10), (11), $\mathbf{e_G(b_0, W_1) \geqslant 1}$, $\mathbf{e_G(b_0, W_2) \geqslant 1}$ (**14**). По (13), имеет место один из следующих случаев.

Случай 1. $min(|W_1|, |W_2|) = 3$.

Не умаляя общности, $|W_2| = 3$. По (14), $e_G(b_0, W_2) \geqslant 1$, $e_G(b_0, W_1) \geqslant 1$ (см. Рис. 32 c). Значит, $W_2 \cup \{b_0, b\}$ связно. Поскольку это множество не стягиваемо, $e_G(c, G - X - W_2) \leqslant 1$. Тогда, поскольку $N_G(c) \cap (G - X) = \{x, c_0\}$ (11), $\mathbf{x \in V(W_2)}$ **или** $\mathbf{c_0 \in V(W_2)}$ (**15**). Тогда, поскольку $N_G(c) \cap (G - X) = \{x, c_0\}$ (11), $W_2 \cup \{b, c\}$ связно (см. Рис. 32 d). Поскольку это множество не стягиваемое, $\mathbf{e_G(b_0, G - W - W_2) \leqslant 1}$ (**16**). Вспомним, что $N_G(c) \cap (G - X) = \{x, c_0\}$ (11) и $x \in W_2$ или $c_0 \in W_2$ (15). Тогда, по (16), $e_G(X, W_1) \leqslant 2$, противоречие с $|W_1| \geqslant 3$.

Случай 2. $min(|W_1|, |W_2|) \geqslant 4$.

Заметим, что $c_0 \in V(G - W - W_2)$ или $c_0 \in V(G - W - W_1)$. Не умаляя общности, $\mathbf{c_0 \in V(G - W - W_2)}$ (**17**). Пусть $L = \{w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}\}$ – подпуть W_2. Очевидно, **если** $\mathbf{w_{i-1}}$ **существует, то** $\mathbf{e_G(w_{i-1}, X) \geqslant 1}$ **и если** $\mathbf{w_{i+4}}$ **существует, то** $\mathbf{e_G(w_{i+4}, X) \geqslant 1}$ (**18**) (см. Рис. 32 e). Поскольку $c_0 \in V(G - W - W_2)$ (17) и $cc_0 \in E(G)$ (11), $\mathbf{e_G(c, G - W - W_2) \geqslant 1}$ (**19**). Заметим, что L стягиваемое, потому что $W_2 \cup W$ стягиваемое, $e_G(c, G - W - W_2) \geqslant 1$ (19), $e_G(b_0, W_1) \geqslant 1$ (14), (18). Тогда, по Лемме 15, G содержит 5-стягиваемое множество.

□

Предположим, G – минимальный 3-связный граф. По Теореме 4, существует 4-стягиваемое множество в G. Тогда, по Лемме 23, G содержит 5-стягиваемое множество, если G – не один из графов, изображённых на Рис. 1.

Следовательно, утверждение Теоремы 2 доказано для минимальных 3-связных графов. Чтобы показать, что утверждение Теоремы 2 выполнено для всех 3-связных графов, достаточно заметить, что если добавить любое ребро к любому графу, изображённому на Рис. 1, то найдётся 5-стягиваемое множество.

5 Доказательство Теоремы 3

Лемма 24. *Пусть G – 3-связный граф такой, что $v(G) \geqslant k+3$ и в G есть $(k-1)$-стягиваемое множество W для какого-то целого $k \geqslant 2$. Предположим, что есть 4 различные вершины $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V(G-W)$ такие, что выполнены следующие утверждения.*

1) $v_1v_2 \in E(G)$ и $d_{G-W}(v_i) = 2$ для любого $i \in \{1,2,3,4\}$.

2) Для любой вершины $x \in W$ такой, что $xv_3, xv_4 \in E(G)$, граф $G - (W \setminus \{x\}) - \{v_1, v_2\}$ 2-связен.

3) $|N_G(v_3) \cap N_G(v_4) \cap W| > |W \setminus N_G(\{v_1, v_2\})|$.

Тогда в G есть k-стягиваемое множество.

Доказательство. Из того, что $d_{G-W}(v_i) = 2$ для любого $i \in \{1,2,3,4\}$ и $\delta(G) \geqslant 3$ следует, что $e_G(v_i, W) \geqslant 1$ для любого $i \in \{1,2,3,4\}$. По условию 3 Леммы 24, $|N_G(v_3) \cap N_G(v_4) \cap W| > 0$. Пусть $x \in W$ – общий сосед v_3 и v_4. Очевидно, есть $|N_G(v_3) \cap N_G(v_4) \cap W|$ кандидатов на x.

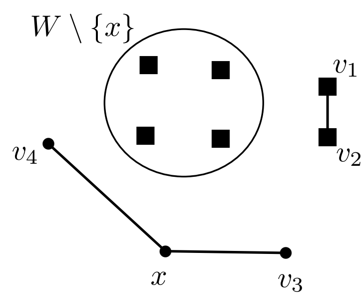

Figure 33: Доказательство Леммы 24.

Рассмотрим $\{v_1, v_2\} \cup (W \setminus \{x\})$ (см. Рис. 33). Очевидно, $|\{v_1, v_2\} \cup (W \setminus \{x\})| = k$. По условию Леммы 24, $G - (\{v_1, v_2\} \cup (W \setminus \{x\}))$ 2-связен. Следовательно, единственный шанс для множества $\{v_1, v_2\} \cup (W \setminus \{x\})$ быть не стягиваемым – это когда оно несвязно. Тогда, поскольку $v_1v_2 \in E(G)$ (условие Леммы 24), есть компонента графа $G(W \setminus \{x\})$ такая, что все вершины этой компоненты не смежны с $\{v_1, v_2\}$.

Следовательно, нам нужно выбрать такое x, что не существует компоненты связности несмежных с $\{v_1, v_2\}$ вершин в $G(W \setminus \{x\})$ (будем называть такие вершины в $G(W)$ *запрещёнными*). Очевидно, есть $|W \setminus N_G(\{v_1, v_2\})|$ запрещённых вершин. Вспомним, что есть $|N_G(v_3) \cap N_G(v_4) \cap W|$ кандидатов на x. Тогда, по условию 3 Леммы 24, есть больше кандидатов на x, чем запрещённых вершин.

Для каждой запрещённой вершины возьмём кратчайший путь от этой запрещённой вершины до множества незапрещённых вершин в W (если такой путь не единственный, берём любой). Для каждого такого пути мы возьмём соседа запрещённого конца пути (вторую вершину пути), пусть P – объединение этих вершин. Очевидно, $|P|$ не превосходит числа запрещённых вершин. Вспомним, что кандидатов на x больше, чем запрещённых вершин. Следовательно, существует $x \notin P$ такое, что $xv_3 \in E(G)$, $xv_4 \in E(G)$, зафиксируем это x. Заметим, что это x подходит. В самом деле, предположим противное. Тогда существует компонента связности в $G(W \setminus \{x\})$, состоящая только из запрещённых вершин. Поскольку

$G(W)$ связно, у x есть не менее одного соседа в этой компоненте. Для этого соседа x должен быть второй вершиной в вышеупомянутом пути, и, значит, $x \in P$, противоречие.

□

Докажем теорему индукцией по k. Ради удобства, выделим индукционный переход как отдельную лемму.

Лемма 25. *Пусть k – целое число, пусть c – неотрицательное целое число такое, что $k \geqslant 3c+5$. Пусть G – 3-связный граф такой, что в G есть $(k-1)$-стягиваемое множество и $v(G) \geqslant k+3$, $\delta(G) \geqslant k-c$. Тогда в графе G есть k-стягиваемое множество.*

Доказательство. Пусть W – $(k-1)$-стягиваемое множество в G. Предположим противное, W максимальное.

Случай 1. $G - W$ – простой цикл.

Пронумеруем вершины цикла $G - W$ в порядке прохождения цикла: $r_1, r_2, ..., r_m$, где $m \geqslant 4$. Наша цель – применить Лемму 24, где $v_1 = r_{i+1}$, $v_2 = r_{i+2}$, $v_3 = r_i$, $v_4 = r_{i+3}$ для любого i.

Очевидно, условие 1 Леммы 24 выполнено.

Проверим условие 2 Леммы 24. Предположим, что r_i и r_{i+3} имеют общего соседа x в W (см. Рис. 34). Тогда $G - \{r_{i+1}, r_{i+2}\} - (W \setminus \{x\})$ 2-связен, потому что в этом графе есть Гамильтонов цикл $r_i x r_{i+3} r_{i+4} .... r_{i-1}$.

Значит, осталось проверить условие 3 Леммы 24. Из того факта, что $G-W$ – простой цикл и из $\delta(G) \geqslant k-c$ следует, что $e_G(r_i, W) \geqslant k-c-2$, $e_G(r_{i+1}, W) \geqslant k-c-2$, $e_G(r_{i+3}, W) \geqslant k-c-2$. Тогда из $|W| = k-1$ и $2(k-c-2)-(k-1) > c+1$ следует, что $|N_G(r_i) \cap N_G(r_{i+3}) \cap W| \geqslant c+2$. Из $e_G(r_{i+1}, W) \geqslant k-c-2$ следует, что $|W \setminus N_G(\{r_{i+1}, r_{i+2}\})| \leqslant c+1$. Следовательно, $|N_G(r_i) \cap N_G(r_{i+3}) \cap W| > |W \setminus N_G(\{r_{i+1}, r_{i+2}\})|$. Значит, условие 3 Леммы 24 выполнено.

Таким образом, можно применить Лемму 24. По Лемме 24, в G есть k-стягиваемое множество.

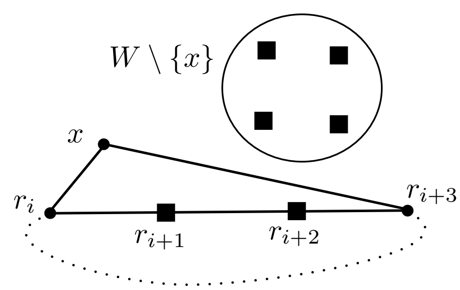

Figure 34: $G - W$ – простой цикл.

Случай 2. $G - W$ не является простым циклом.

По Лемме 2, в $G - W$ есть хотя бы 2 крайние части, и каждая из них – это цикл длины не менее 4. Следовательно, в них обоих не менее, чем по 2 внутренние вершины.

Случай 2.1. Существует такая крайняя часть A в $G-W$, что $|A| \geqslant 5$ (в частности, $|Int(A)| \geqslant 3$).

Пусть $Bound(A) = \{r, s\}$ и $Int(A) = \{w_1, ..., w_l\}$, эти вершины пронумерованы в порядке прохождения пути так, что этот путь – это $rw_1...w_ls$. Пусть u – внутренняя вершина крайней части, отличной от A. По Лемме 3.4, $d_{G-W}(w_i) = 2$ для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ и $d_{G-W}(u) = 2$.

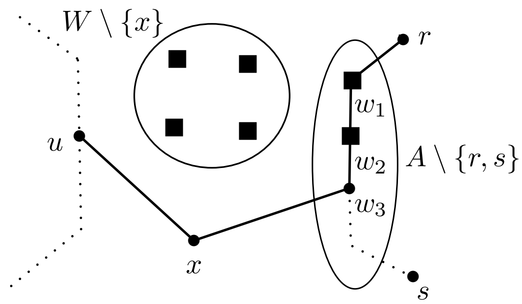

Figure 35: $G - W$ не является простым циклом, существует крайняя часть A в $G - W$ такая, что $|A| \geqslant 5$.

Наша цель – применить Лемму 24, где $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$, $v_3 = w_3$, $v_4 = u$. Очевидно, условие 1 Леммы 24 выполнено.

Проверим условие 2 Леммы 24. Предположим, что w_3 и u имеют общего соседа $x \in W$ (см. Рис. 35). Тогда $G - (\{w_1, w_2\} \cup (W \setminus \{x\}))$ 2-связен. В самом деле, это правда, потому что $G - W - Int(A)$ 2-связен (Лемма 2.3) и есть путь $sw_l....w_3xu$.

Значит, осталось проверить условие 3 Леммы 24. Вспомним, что $\delta(G) \geqslant k-c$, $d_{G-W}(w_i) = 2$ для any $i \in \{1, 2, 3\}$ и $d_{G-W}(u) = 2$. Следовательно, $e_G(w_i, W) \geqslant k - c - 2$ для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ и $e_G(u, W) \geqslant k-c-2$. Тогда из $|W| = k-1$ и $2(k-c-2)-(k-1) > c+1$ следует, что $|N_G(w_3) \cap N_G(u) \cap W| \geqslant c+2$. Из $e_G(w_1, W) \geqslant k-c-2$ следует, что $|W \setminus N_G(\{w_1, w_2\})| \leqslant c+1$. Следовательно, $|N_G(w_3) \cap N_G(u) \cap W| > |W \setminus N_G(\{w_1, w_2\})|$. Значит, условие 3 Леммы 24 выполнено.

Следовательно, можно применить Лемму 24. По Лемме 24, в G есть k-стягиваемое множество.

Случай 2.2. Каждая из крайних частей $G - W$ состоит из 4 вершин.

Remark 1. В этом случае, нам нужно лишь ограничение $k \geqslant 2c + 4$ вместо $k \geqslant 3c + 5$.

Обозначим $N_v = N_G(v) \cap W$ для любой вершины $v \in V(G - W)$.

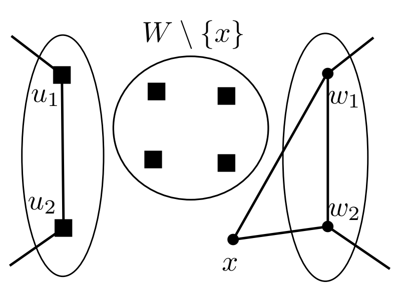

Figure 36: $G - W$ не является простым циклом, каждая из крайних частей $G - W$ состоит из 4 вершин.

Пусть A, B – две крайние части $G - W$, $Int(A) = \{u_1, u_2\}$, $Int(B) = \{w_1, w_2\}$. По Лемме 3.4, $d_{G-W}(u_1) = 2$, $d_{G-W}(u_2) = 2$, $d_{G-W}(w_1) = 2$, $d_{G-W}(w_2) = 2$. Тогда из $\delta(G) \geqslant k - c$ следует, что $e_G(u_1, W) \geqslant k - c - 2$, $e_G(u_2, W) \geqslant k - c - 2$, $e_G(w_1, W) \geqslant k - c - 2$, $e_G(w_2, W) \geqslant k - c - 2$.

Случай 2.2.1. $|N_{w_1} \cap N_{w_2}| > |W \setminus (N_{u_1} \cup N_{u_2})|$ или $|N_{u_1} \cap N_{u_2}| > |W \setminus (N_{w_1} \cup N_{w_2})|$.

Не умаляя общности, $|N_{w_1} \cap N_{w_2}| > |W \setminus (N_{u_1} \cup N_{u_2})|$. Наша цель – применить Лемму 24, где $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$, $v_3 = w_1$, $v_4 = w_2$. Очевидно, условие 3 Леммы 24 выполнено. Вспомним, что $d_{G-W}(u_1) = 2$, $d_{G-W}(u_2) = 2$, $d_{G-W}(w_1) = 2$, $d_{G-W}(w_2) = 2$. Значит, условие 1 Леммы 24 выполнено.

Значит, осталось проверить условие 2 Леммы 24. Заметим, что если w_1 и w_2 имеют общего соседа x (см. Рис. 36), то $G - \{u_1, u_2\} - (W \setminus \{x\})$ 2-связен. В самом деле, по Лемме 2.3, $G - \{u_1, u_2\} - W$ 2-связен и $xw_1, xw_2 \in E(G)$.

Следовательно, можно применить Лемму 24. По Лемме 24, в G есть k-стягиваемое множество.

Случай 2.2.2. $|N_{w_1} \cap N_{w_2}| \leqslant |W \setminus (N_{u_1} \cup N_{u_2})|$ и $|N_{u_1} \cap N_{u_2}| \leqslant |W \setminus (N_{w_1} \cup N_{w_2})|$.

Обозначим

$$f_1 = |N_{u_1} \cap N_{u_2}|, f_2 = |N_{u_1} \setminus N_{u_2}|, f_3 = |N_{u_2} \setminus N_{u_1}|, e_1 = |N_{w_1} \cap N_{w_2}|, e_2 = |N_{w_1} \setminus N_{w_2}|, e_3 = |N_{w_2} \setminus N_{w_1}|.$$

Из наблюдения перед случаем 2.2.1 следует, что для любого $v \in \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$, $|N_v| \geqslant k - c - 2$. Следовательно,

$$f_1 + f_2 \geqslant k - c - 2, f_1 + f_3 \geqslant k - c - 2, e_1 + e_2 \geqslant k - c - 2, e_1 + e_3 \geqslant k - c - 2.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$2f_1 + f_2 + f_3 + 2e_1 + e_2 + e_3 \geqslant 4(k - c - 2).$$

По условию случая, $|N_{w_1} \cap N_{w_2}| \leqslant |W \setminus (N_{u_1} \cup N_{u_2})|$. Следовательно, $e_1 \leqslant |W \setminus (N_{u_1} \cup N_{u_2})|$. Очевидно, $N_{u_1} \cup N_{u_2} \subset W$ (по определению N_v для любого $v \in V(G - W)$). Тогда из $|W| = k - 1$ следует, что $e_1 \leqslant k - 1 - |N_{u_1} \cup N_{u_2}|$. Значит, $e_1 \leqslant k - 1 - f_1 - f_2 - f_3$. Следовательно, мы вывели из $|N_{w_1} \cap N_{w_2}| \leqslant |W \setminus (N_{u_1} \cup N_{u_2})|$, что $e_1 + f_1 + f_2 + f_3 \leqslant k - 1$. Аналогично, из $|N_{u_1} \cap N_{u_2}| \leqslant |W \setminus (N_{w_1} \cup N_{w_2})|$ следует, что $f_1 + e_1 + e_2 + e_3 \leqslant k - 1$. Складывая эти неравенства, получим, что

$$2f_1 + 2e_1 + e_2 + e_3 + f_2 + f_3 \leqslant 2k - 2.$$

Значит, $2k - 2 \geqslant 4(k - c - 2) \Rightarrow 2c + 3 \geqslant k$, противоречие с $k \geqslant 2c + 4$. □

Доказательство Теоремы 3:

Докажем Теорему по индукции. Случай $k = 4$ служит базой индукции. Мы не требуем ограничения на $\delta(G)$ в базе индукции. По Теореме 4, любой 3-связный граф на не менее, чем 8 вершинах, содержит 4-стягиваемое множество. Значит, нет проблемы с ограничением на количество вершин в индукционном переходе от $k = 4$ к $k = 5$.

Шаг индукции.

По индукционному предположению, в графе G есть $(k-1)$-стягиваемое множество. Пусть $c = \left[\frac{k-5}{3}\right]$. Тогда $k \geqslant 3c + 5$, $\delta(G) \geqslant k - c$. Следовательно, по Лемме 25, в графе G есть k-стягиваемое множество. □

References

[1] R. Halin. *Untersuchungen über minimale n-fach zusammenhängende Graphen,* Math. Ann. **182** (1969) 175-188.

[2] N. Karol. *Contractible 6-vertex sets,* manuscript.

[3] D.V. Karpov. *Large contractible subgraphs of a* 3*-connected graph.* Discussiones Mathematicae Graph Theory **41** (2021) 83-101. doi:10.7151/dmgt.2172.

[4] D. V. Karpov. *Minimal biconnected graphs,* J. Math. Sci. **204** (2015) 244-257.

[5] M. Kriesell. *Contractible subgraphs in 3-connected graphs,* J. Comb. Theory Ser.B **80** (2000) 32-48.

[6] W.Mader. *High connectivity keeping sets in n-connected graphs,* Combinatorica, **24** (3) (2004) 441-458.

[7] W.Mader. *On vertices of degree n in minimally n-connected graphs and digraphs,* Combinatorics, Paul Erdös is Eighty **2** (1996) 423-449.

[8] W.McCuaig, K.Ota. *Contractible triples in 3-connected graphs,* J. Comb. Theory Ser.B **60** (1994) 308-314.

[9] W.T.Tutte. *A theory of 3-connected graphs* Konik. Nederl. Akad. van Wet., Proc. **64** (1961) 441–455.

[10] N. Y. Vlasova. *Every 3-connected graph on at least 13 vertices has a contractible set on 5 vertices,* Zap. Nauchn. Sem. POMI, **518** (2022) 5-93.