АЙВАЗЬЯН Аршак Владимирович

Выпускная квалификационная работа

Модельная структура на категории алгебр над обогащенной теорией Ловера

Образовательная программа бакалавриат «Математика»

Направление и код: 01.03.01 «Математика»

Шифр ОП: СВ.5000.2019

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент
Бондарко Михаил Владимирович

Рецензент:
к.ф.-м.н., Пекинский институт
математических наук и приложений
у озера Янчи
Иванов Сергей Олегович

Санкт-Петербург

2023 год

1 Введение

Классически, алгебраическая теория – это следующий набор данных:

- множество носителей (или сортов) S
- множество операций O, имеющих dom вида $S_1 \times ... \times S_n$ (формальное произведение; может быть пустым — 1) и cod вида S_i.
- множество эквациональных аксиом A, т. е. тождеств связывающих операции.

Например, группа – это теория с тремя операциями:

- носитель G
- операции $\cdot \colon G \times G \to G$, ${}^{-1} \colon G \to G$, $e \colon 1 \to G$
- аксиомы $a(bc) = (ab)c$, $aa^{-1} = e$, $a^{-1}a = e$, $ae = a$, $ea = a$

Ясно, что также многие широко известные алгебраические понятия (например, моноиды, кольца, модули) являются алгебраическими теориями. Чуть менее очевидный пример алгебраической теории: симплициальные множества (равно как и предпучки на любой малой категории). При этом, например, области целостности и поля не являются алгебраическими теориями, так как определяющие их аксиомы невозможно записать в виде соотношений на операции. Последнее связано с тем фактом, что категории полей и областей целостности плохие: например, в них нет почти никаких пределов и копределов (в том числе даже произведений и копроизведений). Тем временем любая категория алгебр алгебраической теории биполна, точна (в частности, регулярна), локально представима и имеет проективное генерирующее семейство (см. [Bor94]).

Естественная среда *интерпретации* алгебраических теорий – категории с конечными произведениями: носители рассматриваются как объекты, операции как морфизмы, аксиомы как коммутативности соответствующих диаграмм. Легко видеть, что на самом деле каждая алгебраическая теория T определяет функтор $T \colon \mathrm{CatProd} \to \mathrm{Cat}$, где CatProd – 2-категория категорий[1], имеющих конечные произведения, и функторов, сохраняющих произведения. Примеры:

1. Группы в категории множеств – обычные группы, $\mathrm{Group}[\mathrm{Set}] = \mathrm{Group}$.
2. Группы в категории топ. пространств – топологические группы, $\mathrm{Group}[\mathrm{Top}] = \mathrm{TopGroup}$.
3. Группы в категории гладких многобразиий – группы Ли, $\mathrm{Group}[\mathrm{Diff}] = \mathrm{LieGroup}$.
4. Группы в категории групп – абелевы группы, $\mathrm{Group}[\mathrm{Group}] = \mathrm{Ab}$ (аргумент Экмана-Хилтона).

[1] Мы принимаем аксиому универсумов Гротендика и языковое соглашение typical ambiguity with universe polymorphism.

5. Функтор $\mathrm{Group}[\pi_1]\colon \mathrm{Group}[\mathrm{Top}] \to \mathrm{Ab}$ так как π_1 сохраняет произведения.

Конечно, приятность возникающих категорий непосредственно ограничена приятностью подлежащих категорий: свойства, выше упомянутые для категорий алгебраических объектов в Set, не имеют места в общем. Математика, о которой можно говорить в произвольной категории с конечными произведениями, – это в точности алгебра в смысле, определенном выше[2]. Здесь следует также отметить, что хотя в произвольной категории с произведениями и удается *определить* любое алгебраическое понятие, мало интересно можно сказать про них. В виду дикости произвольных категорий с конечными произведениями, это представляется скорее бесплодной землей, не содержащей ни одного содержательного вопроса. Как минимум от категории математических структур, по-видимому, естественно требовать локально-представимости — это с одной стороны наделяет её множеством категорных совершенств (которые, например, оказываются витальными для теории гомотопий), а, с другой стороны, покрывает, по-видимому, подавляющее большинство реальных категорий, в которых протекает математика (с точностью до замены "поломанных" категорией, таких как Top или (особенно) SmoothManifold на гораздо более полезные категории дельта-порожденных пространств DeltaSp и гладких множеств SmoothSet — здесь обе являются локально-представимыми и декартово-замкнутами, а вторая, более того, является топосом Гротендика). Локально представимые категории будут основным контекстом в этой работе. Условие локальной-представимости само по себе недостаточно для того, чтобы интерепртация *декартовых* алгебраических теорий (как они определены выше) в категории приводила к продуктивному понятию (что, например, видно в категории R-Mod, где плодотворна моноидальная структура тензорного произведения, а не декартового), но об этом мы скажем подробнее несколько позже.

Классическое определение алгебраической теории неестественно выделяет некоторое множество исходных операций. Так, эквивалентные по совершенно синтаксическим причинам алгебраические теории будут рассматриваться им как разные. Поэтому естественно сформировать по данной алгебраической теории категорию, объекты которой суть формальные произведения $C_1 \times .. \times C_n$, а морфизмы – все формальные операции между ними, и рассматривать её как инвариантное понятие алгебраической теории. Это наблюдение ведет к современному пониманию термина алгебраическая теория:

Определение 1.1. Финитарной алгебраической теорией или теорией Ловера (Lawvere) с множеством сортов S называется малая категория T, снабженная существенно биективным сохраняющим произведения функтором $(\mathrm{finSet}/S)^{\mathrm{op}} \to T$. Для алгебраической теории T и категории с конечными произведениями C, категорией T-объектов в C называется категория сохраняющих произведения функторов $T \to C$ и естественных преобразований между ними.

[2]Также как математика в произвольном топосе с объектом натуральных чисел — это конструктивная математика, а математика в Set – классическая математика; подробнее об этом см. статью internal logic на nlab и литературу там.

Финитарная здесь указывает на конечную арность всех операций (можно говорить также о алгебраических теориях ранга λ, где λ регулярный кардинал). T-алгеброй мы будем называть T-объект в Set. Легко видеть, что алгебраическая теория индуцирует финитарную (то есть сохраняющую фильтрованные копределы) монаду на Set^S и монадическое сопряжение $\mathrm{Forget}\colon T[\mathrm{Set}] \rightleftarrows \mathrm{Set}^S \colon \mathrm{Free}$. Существенный образ правого функтора называется свободными T-алгебрами, а существенный образ (под его действием) подкатегории кортежей конечных множеств называется свободными конечнопорожденными T-алгебрами. Так, (как было фактически отмечено в мотивации к определению) алгебраическая теория T это просто двойственная категория к категории конечнопорожденных свободных T-алгебр.

На самом деле, 2-категория S-сортных алгебраических теорий эквивалентна 2-категории финитарных монад на Set^S. В этом смысле понятие алгебраический теории, как оно определено выше, действительно захватывает всю (финитарную) алгебру доступную в Set^S. Вот некоторые обычные атрибуты финитарного монадического сопряжения ([Bor94], раздел 4):

- сопряжение Forget – Free, где оба функтора финитарны (что содержательно только для правого Forget, конечно)
- забывающий функтор унивалентен (= инъективен на Hom-множествах) и консервативен (= отражает изоморфизмы)
- категория алгебр биполна (предполагая, что подлежащая категория такова, разумеется — например, если она локально-представима)

Но это очень далеко от истины в других категориях. Если потребовать, для категории с конечными произведениям C потребовать кополноту и дистрибутивность конечные произведений относительно всех копределов, тогда алгебраическая теория по-прежнему индуцирует монадическое сопряжение между категорией T-объектов в C и C^S [3]. Примером такой категории является любая кополная декартово-замкнутая категория. Но, во-первых, и такие категории вообще говоря имеют финитарные монады, не описываемые алгебраическими теориями. Во-вторых (как было отмечено ранее с R-Mod) есть много естественных категорий, где это условие не выполняется и алгебраические теории (в смысле определенном выше) на самом деле не определяют монад.

Также во контекстах на множествах операций алгебраических объектов имеется естественная дополнительная структура (скажем, это может быть симплициальное множество, (что-то похожее на) топологическое пространство, гладкое многообразие или граф, последнее, например, оказывается полезно в операционной семантике см. [BW20]) и её интересно было бы захватывать.

Эти два наблюдения ведут к понятию V-обогащенной алгебраической теории над базой A, где V замкнутая симметричная моноидальная локально конечно представимая категория, а A

[3] см. nlab, multisorted Lawvere theories

V-обогащенная локально конечно представимая категория. Оно было введено Джоном Пауром и Koki Nishizawa в их работе [PN09], где показано, что 2-категории алгебраических V-теорий на A и финитарных V-монад на A канонически эквивалентны. Локально конечная представимость, конечно, является существенным, нежелательным ограничением (например, исключая большую часть топосов Гротендика, в частности, разного рода топосы пространств (гладких, голоморфных, алгебраических)), но для произвольных локально представимых категорий теорию алгебраических теорий над базой ещё предстоит установить (мы планируем сделать это в дальнейшем).

Это работа устроена следующим образом:

- В секции "Теория категорий" мы излагаем стандартный материал о локально-представимых категориях.

- В секции "Обогащение" мы (следуя Пауэру) определяем категории, над которыми будет обогащаться. Мы предлагаем конструкции, дающие много примеров категорий и указываем пока не покрытые ими примеры — это оригинальные результа работы. Далее мы (следуя упомянутой выше работе) определяем обогащенные алгебраические теории.

- В секции "Гомотопическая теория категорий" мы излагаем стандартный материал о модельных категориях и правом трансфере модельной структуры.

- В последней секции мы строим обогащенную модельную структуру на категории алгебр для обогащенной финитарной монады.

Точка зрения алгебраических теорий имеет преимущество над финитарными монадами (и поэтому требует ограничиваться контекстом Пауэра, а не работать в произвольном) в том, что дает возможность определить понятие также гомотопических алгебр, на ряду с обычными. Гомотопические алгебры естественно возникают во многих контекстах, как об этом прекрасно написано в введении работы [Bad02], в которой устанавливается теорема жесткости: категория гомотопических алгебр симплициальной алгебраической теории в sSet канонично Квиллен-эквивалентна её категории ординарных алгебр. В дальнейшем мы планируем установить аналогичный результат для категорий обогащенных в V.

Также в дальнейшем планируется определить обогащенные алгебраические теории для ∞-категорий и устанивить связь конструкций.

2 Теория категорий

Локально-представимые категории имеют много полезных равносильных определений (каноничный учебник [AR94]). Мы укажем здесь одно из них: синтаксическое. Понятие алгебраической теории 1.1 имеет естественное обобщение, в котором операции не обязаны быть тотальными, но их области определения контролируются равенствами операций. Например, таково определение теории Cat:

- носители: объекты Ob и морфизмы Mor
- операции: $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}\colon \mathrm{Mor} \to \mathrm{Ob}$, $\mathrm{id}\colon \mathrm{Ob} \to \mathrm{Mor}$, $\circ\colon \mathrm{Mor} \times_{\mathrm{Ob}} \mathrm{Mor} \to \mathrm{Mor}$
- аксиомы: (стандартные)

Здесь область определения операция композиции описывается на $\mathrm{Mor} \times \mathrm{Mor}$ равенством $\mathrm{cod}(\mathrm{pr}_1) = \mathrm{dom}(\mathrm{pr}_2)$ (что можно рассматривать также как пулбек $\mathrm{Mor} \to \mathrm{Ob} \leftarrow \mathrm{Mor}$). Также как естественная область интерпретации финитарных алгебраических теорий — категории с конечными произведениями, естественная область интерпретации финитарных существенно алгебраических теорий — категориях с конечными пределами. Равенста, описывающие область определения операций, интерпретируются как уравнители.

Также как и для алгебраических теорий, чтобы избавиться от привязки к выделенному набору операций, естественно сформировать категорию, предоставляющую инвариантную точку зрения на понятие существенно алгебраической категории. Но определение в том же стиле дать не удаётся, потому что в отличии от теории произведений, имеющих один и тот же каркас объектов (и отличающихся именно операциями между ними), предельные теории имеют разные формы в этом смысле.

Определение 2.1. Финитарной предельной теорией с множеством сортов S называется малая конечно полная категория T, снабженная функтором $S \to T$, образ которого порождает все объекты T конечными пределами. Для предельной теории T и категории с конечными произведениями C, категорий T объектов в C называется категория сохраняющих конечные пределы функторов $T \to C$ и естественных преобразований между ними.

Аналогично определяется предельная теория ранга λ, где λ регулярный кардинал, с заменой конечных пределов на λ-малые пределы (то есть индексная категориях которых имеет мощность меньше λ, где мощность малой категории это мощность множества её морфизмов, конечно). T-алгеброй мы также будем называть T-объект в Set.

Определение 2.2. Локально λ-представимая категория это категория эквивалентная категории алгебр существенной алгебраической теории ранга λ.

Обратно по локально λ-представимой категории C, её предельная теория восстанавливается как двойственная категория к полной подкатегории λ-представимых объектов: то есть объектов $A \in C$ таких, что функтор $\mathrm{Hom}(A, -)$ сохраняет λ-фильтрованные копределы [4]. Но множество

[4]То есть копределы, индексная категория которых имеет конус над каждой λ-малой диаграммой. В случае когда $\lambda = \aleph_0$ это воспроизводит обычное понятие фильтрованной категории, по определению имеющей конус над каждой конечной диаграммой.

сортов S и функтор $S \to T$ восстановить по категории алгебр невозможно — например, различные Морита-эквивалентные кольца определяют разным предельные теориям с выделенным множеством сортов, но их категории алгебр эквивалентны. Так явление уже имеет место уже для обычных алгебраических теорий. Указание множества сортов — это дополнительная структура, которая позволяет определить забывающий функтор $T[C] \to C^S$ как прекомпозицию с функтором $S \to T$.

Для финитарных алгебраических теорий конечно представимые объекты (как они определены выше) — это в точности то, что называется конечно представимыми объектами в универсальной алгебре (объекты заданные конечными множествами образующих и соотношений). Так, например, предельная теория SyntGroup это просто двойственная категория к категории конечнопредставимых групп. Классическому синтаксическому описанию теории групп (как в начале секции для Cat) соответствует одноэлементное множество сортов S и функтор $S \to \mathrm{SyntGroup}$ выбирающий свободную группу на одном образующим (и функтор $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, -)$ возвращает подлежащее множество группы). В общем случае, аналогично классическое синтаксическое описание существенно алгебраической теории определяет множество сортов S как множество носителей и функтор $S \to T$ отправляющий носитель A_i в $\mathrm{FreeAlg}(\varnothing, ..., \varnothing, 1, \varnothing, .., \varnothing)$ где одноэлементное множество 1 стоит на позиции i, соответствующей носителю. Например, для Cat образ S состоит из категорий $\bullet$ и $\bullet \to \bullet$ — это свободные категории на $\mathrm{Ob} = 1, \mathrm{Mor} = \varnothing$ и $\mathrm{Ob} = \varnothing, \mathrm{Mor} = 1$ соответственно (и соответствующие Hom-функторы возвращают множество объектов и множество морфизмов категории соответственно)

Так структура множества сортов на теории соответствует структуре забывающего функтора на категории алгебр. В действительности, для чистых теорий T ранга λ (без указания множества сортов) описанные выше конструкции устанавливают антиэквивалентность синтаксиса и семантики.

Теорема 2.1 (Двойственность Габриэля-Ульмера)**.** 2-категория предельных теорий ранга λ антиэквивалентна 2-категории локально λ представимых категорий

$$\begin{array}{ccc} \lambda\text{-LimitTheory}^{op} & \to & \lambda\text{-LocPresentCat} \\ T & \mapsto & T[\mathrm{Set}] \\ (C_\lambda)^{\mathrm{op}} & \mapsfrom & C \end{array}$$

где λ-LimitTheory$^{\mathrm{op}}$ 2-категория

- предельных теорий ранга λ
- конечно непрерывных функторов
- естественных преобразований

LocPresentCat 2-категория

- локально λ-представимых категорий
- правых сопряженных функторов ранга λ
- естественных преобразований

Локально представимые категории обладают множеством категорных совершенств. Мы укажем только некоторые, которые будем использовать в работе.

Теорема 2.2. Пусть C локально представимая категория, тогда C биполна.

Теорема 2.3. Пусть C, D локально представимые категория, $F\colon C \to D$ имеет ранг (то есть сохраняет λ-фильтрованные пределы для некоторого регулярного λ). Тогда если F сохраняет все (малые) пределы, тогда F правый сопряженный, а если сохраняет все копределы, то левый сопряженный.

Так в версии для левого функтора, требование о ранге становится лишним: функтор сохраняющий все копределы, в частности, просто уже финитарен

3 Обогащение

Пусть V замкнутая симметричная моноидальная локально конечно представимая категория. Мы (как это оказывается естественно в обогащенной теории локально конечно представимых категорий [Kel82]) требуем согласованности структур: операции моноидальной структуры сохраняют конечнопредставимость (то есть единица I конечно-представима и $x \otimes y$ конечнопредставимо, если таковы x, y). Далее мы будем ссылаться на это понятие коротко: моноидальная lfp категория.

Утверждение 3.1. Пусть C локально конечно представимая декартово-замкнутая сбалансированная категория, в которой терминальный объект 1 является сепаратором (последнее свойство называется well pointed категория). Если 1 является конечно-представимым, то C декартово моноидальная lfp.

Доказательство. Для X конечно представимого объекта C рассмотрим функтор $\underline{\mathrm{Hom}}(X, -)\colon C \to C$. Так как $\mathrm{Hom}(1, \underline{\mathrm{Hom}}(X, -)) = \mathrm{Hom}(X, -)$, а функтор $\mathrm{Hom}(1, -)$ консервативен (т.к. унивалентен и C сбалансированная) и финитарен, то и $\underline{\mathrm{Hom}}(X, -)$ финитарен ([Kel82], 1.3). Теперь для X, Y конечно представимых объектов $\underline{\mathrm{Hom}}(X \times Y, -) = \underline{\mathrm{Hom}}(X, -) \circ \underline{\mathrm{Hom}}(Y, -)$ финитарен. Таким образом $\mathrm{Hom}(X \times Y, -) = \mathrm{Hom}(1, \underline{\mathrm{Hom}}(X \times Y, 1))$ финитарен, что и требовать доказать. $\square$

Следствие 3.1. Пусть K малая категория, если терминальный объект 1 в топосе предпучков $\mathrm{PSh}(K)$ конечо-представим, то $\mathrm{PSh}(K)$ декартово моноидальная lfp.

Доказательство. Топосы декартово-замкнуты и сбалансированы, а топосы предпучков локально конечно представимы и well-pointed. $\square$

Утверждение 3.2. Если K содержит терминальный объект или K конечная категория, то $\mathrm{PSh}(K)$ декартово моноидальная lfp.

Доказательство. Если K содержит терминальный объект 1, то терминальный объект топоса предпучков представим $\mathrm{Hom}_K(-,1)$ и следовательно является конечно представимым.

В любом топосе предпучков каждый предпучок копределом диаграммы представимых предпучков отображающихся в него. Если K конечная категория, то множества морфизмов между предпучками конечных множеств конечны. Значит для предпучка конечных множеств эта диаграмма конечна, следовательно он является конечным копределом представимых, следовательно является конечно представимым. В частности, предпучок одноэлементных множеств (терминальный объект) конечно представим. □

Следствие 3.2. Категория симплициальных множеств sSet декартово моноидальная lfp

Утверждение 3.3. Категория G-множеств G-Set для конечно представимой группы G является декартово моноидальной lfp.

Утверждение 3.4. Если K, L такие категории, что топосы предпучков над ними декартово моноидальные lfp, то и $\mathrm{PSh}(K \coprod L)$ декартово моноидальная lfp.

Доказательство. Терминальный объект является копроизведением терминальных объектов $\mathrm{PSh}(K)$ и $\mathrm{PSh}(L)$, которые конечно представимы по условию, следовательно он является конечно представимым. □

Утверждение 3.5. Пусть T коммутативная финитарная монада на моноидальной lfp категории C, тогда категория $\mathrm{Alg}\ T$ является моноидальной lfp.

Доказательство. Категория алгебр финитарной монады на локально конечно представимой категории является локально конечно представимой ([AR94], 2.78, замечание в конце). Тензорное произведение алгебр $(A,a),(B,b)$ определяется как коуравнитель:

$$T(TA \otimes TB) \underset{T(a\otimes b)}{\overset{(T\nabla)\circ\mu}{\rightrightarrows}} T(A \otimes B) \to A \boxtimes B$$

где μ — умножение в монаде, ∇ — естественное преобразование из lax моноидальной структуры (которой обладает каждая коммутативная монада на моноидальной категории), $\otimes$ тензорное произведение в подлежащей категории и композиция $(T\nabla)\circ\mu \colon T(TA\otimes TB) \to TT(A\otimes B) \to T(A\otimes B)$ записана в прямой нотации. Моноидальная единица определяется как $T1$, где 1 единица подлежащей категории. Это действительно определяет структуру замкнутой симметричной моноидальной категории (результат восходит к работе Андреса Кока [Koc71], но более удобное изложение [Bra14], 6.4.12, учитывая 6.3.12. Более общие результаты о моноидальных структурах на категориях моноидальных монад [Sea13]). Так как монада финитарна, то её забывающий функтор финитарен, следовательно его левый сопряженный (функтор свободной алгебры T) сохраняет конечно-представимые объекты, следовательно $T1$ конечно-представимо. Также (в виду того, что подлежащая категория моноидальная lfp и T сохраняет конечно представимые объекты) оба объекта из диаграммы уравнителя, определяющей $\boxtimes$, являются конечно представимыми, следовательно её копредел конечно представим. $\square$

Следствие 3.3. Категория пунктированных объектов в подхо дящем топосе предпучков, моноидальная lfp. Категория абелевых объектов (и более обще: модулей над конечно-представимым кольцом) в подходящем топосе предпучков моноидальная lfp. В частности, таковы классические категории Set_*, R-Mod.

Замечание 3.1. Категория малых категорий Cat, группоидов Grpd и предпорядков Preord являются декартово моноидальными lfp ([Kel82]).

Напомним, что подлежащая категория V-обогащенной категории A определяется применением к каждому $\mathrm{Hom}(X, Y)$ для $X, Y \in A$ функтора $\mathrm{Hom}(I, -)\colon V \to \mathrm{Set}$. Мы будем всегда обозначать подлежащую категорию как A_0 и таким образом (следуя [Kel82]), когда это удобно, использовать слова "категория "функтор" и т.п. в значении V-категория, V-функтор и т.п., когда V ясно из контекста.

Замечание 3.2. Так как $\mathrm{Hom}(I, -)\colon V \to \mathrm{Set}$ сохраняет все пределы (как любой Hom-функтор) и фильтрованные копределы (т.к. I конечно-представима), то по теореме о сопряженном функторе для локально-представимых категорий, он является правым сопряженным.

V-категория A называется *конечно экспоненцируемой*, если для каждого конечно представимого $x \in V$ и каждого $Z \in A$ задан объект Z^x такой, что $[x, A(Z, -)] \cong A(-, Z^x)$. Для $V = \mathrm{Set}$ объект Z^x это категорное произведение соответствующего множества копий Z с самим собой. Мы пользуемся стандартными понятиями взвешенного и конического предела в обогащенной категории (см. [Kel05], Chapter 3)[5]

Утверждение 3.6 ([Kel05], 3.73)**.** V-категория A имеет все конечные обогащенные пределы тогда и только тогда, когда она имеет все конечные конические пределы и конечно экспоненцируема. В этом случае также функтор $F\colon A \to B$ сохраняет все конечные пределы $\iff$ F сохраняет конечные конические пределы и конечное экспоненцирование.

Определение 3.1. Фильтрованным копределом в V-категории называется (обогащенный) конический копредел по ординарной фильтрованной диаграмме. V-функтор называется финитарным, если он сохраняет все фильтрованные копределы. Так финитаность функтора равносильна финитарности его подлещего. Объект X V-категории A называется локально конечно представимым, если $\mathrm{Hom}(X, -)\colon A \to V$ финитарен.

[5]читатель также может найти очень полезным ознакомиться с мотивацией этих понятий, прекрасно изложенной в статье weighted limit на nlab

Определение 3.2. Категория A называется локально конечно представимой, если существует малая категория G и правый сопряженный, финитарный, консервативный функтор $A \to [G^op, V]$

Это одно из равносильных определений локально конечно представимой категории, о которых мы упоминали. Так в случае Set это означает, что локально представимые категории являются определенного рода рефлексивными подкатегориями топосов предпучков.

Пусть A локально конечно представимая (в обогащенном смысле см. [Kel82], 3.2) конечно обогащено полная категория, как обычно A_f полная подкатегория конечно представимых объектов.

Определение 3.3 ([PN09], 2.1)**.** Алгебраической теорией на A (или над базой A) называется строго биективный строго сохраняющий конечные обогащенные пределы V-функтор $\mathbb{T}\colon A_f^{\mathrm{op}} \to T$, где T малая V-обогащенная категория.

Объекты T (иначе говоря, объекты A_f^{op}) кодируют арности теории, а морфизмы — операции. В случае $V = \mathrm{Set}$, $A = \mathrm{Set}^S$ мы получаем классическую финитарную алгебраическую теорию с множеством сортов S. В случае $V = A = \mathrm{sSet}$ мы получаем хорошо известные в теории гомотопий симплициальные алгебраические теории.

Обозначим как $\tilde{\iota}\colon A \to [A_f^{\mathrm{op}}, V]$ функтор получаемый композицией обогащенного вложения Йонеды и ограничения.

Определение 3.4 ([PN09], 2.2)**.** Категорией алгебр алгебраической теории T называется описанный ниже пулбэк в категории локально малых V-категорий V-Cat:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alg}(T) \arrow[r, "P_T"'] \arrow[d, "U_T"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[T, V]} \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\tilde{\iota}"] & {[A_f^{\mathrm{op}}, V]} \end{tikzcd}$$

Так алгебра задается объектом из A, снабженным дополнительной структурой и аксиомами, приходящими из морфизмов в T, которых нет в A_f^{op}.

Понятие обогащенной алгебраической теории на A действительно точно захватывает финитарную алгебру доступную в A:

Теорема 3.1 ([PN09], 5.2)**.** Категории алгебраических V-теорий на A и финитарных V-монад на A канонически эквивалентны

$$\mathrm{AlgTheory}(A) \simeq \mathrm{FinMonad}(A)$$

$$T \mapsto \mathrm{Monad}(\mathrm{Alg}(T) \to A)$$

функтор забывающий структуру алгебры является финитарно V-монадичным

$$(A_f^{op} \to M(A_f)^{op}) \leftarrow\!\shortmid M$$

естественный функтор $A_f^{op} \mapsto$ (дуал категории к.п. свободных алгебр) является алгебраической теорией

При этой эквивалентности соответстветствующие V-категории алгебр канонически эквивалентны.

4 Гомотопическая теория категорий

Определение 4.1. Категорией со слабыми эквивалентностями (C, W) называется категория C снабженная классом морфизмов W (называемых *слабыми эквивалентностями*), содержащим все изоморфизмы, замкнутым относительно композции и удовлетворяющим правилу 2 из 3: если композиция двух морфизмов и один из них лежит в W, то и второй лежит.

Категории со слабыми эквивалентностями можно рассматривать как данные задающие (через локализацию Двайера-Кана) контексты для абстрактной теории гомотопий (то есть $(\infty, 1)$-категории). Но в тех случаях, когда категория со слабыми эквивалентностями снабжается некоторой дополнительной структурой (аксиоматизирующей расслоения и корасслоения пространств), возникают существенно более эффективные методы для управления и вычислений в соответствующей теории гомотопий.

Определение 4.2. Модельной структурой на биполной категории со слабыми эквивалентностями (M, W) называется пара классов морфизмов C, F (называемых *кофибрациями* и *фибрациями*) и две слабо ортогональные функториальные системы факторизации $(C \cap W, F)$, $(C, F \cap W)$.

Морфизмы в $F \cap W$, $C \cap W$ называются тривиальными или ациклическими (ко)фибрациями. Из этого определения модельной категории вытекают все свойства замкнутости, которые требуют от классов морфизмов в традиционных изложениях[6]. В качестве разного характера стандартных текстов по модельным категориям (включающие, в частности, используемые далее без определения фибрантные и кофибрантные объекты, объект путей и цилиндрический объект, сопряжения Квиллена, кофибрантно порожденные модельные категории, локализацию, модельную структуру Квиллена на sSet), мы отсылаем к [Hov99], [Hir03], [Dwy04] [MP11], [Rie14], [Bal21].

Определение 4.3. Моноидальной модельной категорией называется категория V, снабженная модельной и замкнутой симметричной моноидальной структурами так что

1. для кофибраций f, f' их пушаут-произведение $f \,\square\, f'$ является кофибрацией и она ациклическая, если хотя бы одна из f, f' такова

[6] Это было отмечено Джоялом в его лекциях о квазикатегориях 2008 года и выделено Риел в заметке Emily Riehl, A concise definition of a model category

2. для любого кофибрантного объекта X и любой кофибрантной замены единицы $QI \to I$ морфизм $QI \to X$ является слабой эквивалентностью

Замечание 4.1. Легко видеть, что при этих условиях функторы $X \otimes -$ и $[X, -]$ образуют сопряжение Квиллена для каждого кофибрантного объекта X. Если единица I кофибрантна, то второе условие вытекает из первого.

Определение 4.4. Пусть V моноидальная модельная категория. Экспоненцируемая и тензорируемая V-категория C, чья подлежащая категория C_0 снабжена модельной структурой, называется V-обогащенной модельной категорией, если тензорирование $V \times C_0 \to C_0$ является бифунктором Квиллена. C_0 называется подлежащей модельной категорией C. Симплициальной модельной категорией называется $\mathrm{sSet}_{\mathrm{Quillen}}$-обогащенная модельная категория, где $\mathrm{sSet}_{\mathrm{Quillen}}$ снабжена декартовой моноидальной структурой.

Особенно хорошо абстрактная теория гомотопий работает в контексте локально представимых модельных категорий.

Определение 4.5. Комбинаторной модельной категорией называется кофибратно порожденная локально-представимая модельная категория.

Комбинаторные модельные категории, по-видимому, составляют большинство встречающихся в жизни модельных категорий и при этом обладают большим числом технических преимуществ. Поэтому полезно заменять модельную комбинаторную на Квиллен-эквивалентную её комбинаторную, когда это возможно. Так, например, хотя категория топологических пространств Top не локально-представима, но Квиллен-эквивалентные ей категории дельта-порожденных пространств DeltaSp и, конечно, симплициальных множеств sSet локально-представимы. На самом деле, каждая кофибрантно порожденная модельная категория Квиллен-эквивалентна модельной категории заданной образующими и соотношениями (то есть локализации категории симплициальных предпучков см. [Dug01]). Эти модельные категории являются также симплициальными модельными категориями и особенно хороши.

Сформулируем теперь понятие трансфера модельной структуры вдоль сопряжения.

Определение 4.6. Пусть $F : A \leftrightarrows M : U$ сопряжение (где F левый, U правый), M модельная категория. Модельная структура на A называется правой трансферной, если $\mathrm{fib}(A) = F^{-1}(\mathrm{fib}(M))$, $\mathrm{weak}(A) = F^{-1}(\mathrm{weak}(M))$.

Эти условия однозначно определяют модельную структуру на A, потому что кофибрации являются в точности левым ортогональным классом к ациклическим фибрациями, также как ациклические кофибрация являются левым ортогоналоьным классом к фибрациям. Трансферная струкутра не всегда существует (то есть ациклическии кофибрации, как они определены в предыдущем предложении, не всегда являются пересечением кофибраций и слабых эквивалентностей). Далее мы используем термины для классов морфизмов в A именно так, как они определены здесь.

Теорема 4.1 ([Bal21], 4.4.3)**.** *A имеет правую трансферную модельную структуру $\iff$ следующие два условия в A выполнены:*

> *Факторизация.* Каждый морфизм в раскладывается в композицию ациклической кофибрации, за которой следует фибрация, и кофибрации, за которой следует ациклическая фибрация.
>
> *Ацикличность.* Каждая ациклическая кофибрация является слабой эквивалентностью.

Сами по себе оба эти условия трудно проверяемые, но, при некоторых предположениях, для них есть более простые достаточные условия.

Утверждение 4.1. Пусть M кофибрантно порождена и U сохраняет малые объекты (что верно, например, если F сохраняет фильтрованные копределы), тогда *условие факторизации* выполнено. Более того, если в этом случае существует модельная структура на A, то она кофибрантно порожденная: порождающие (ациклические) кофибрации получаются действием U на порождающие (ациклические) кофибрации в M

Так, в виду того, что забывающий функтор категории алгебр финитарной монаду сохраняет фильтрованные копределы, в этом случае условие факторизации для кофибрантно порожденной модельной категории выполняется автоматически.

Утверждение 4.2 ([Qui67], II.4)**.** Пусть (по-прежнему в смысле классов морфизмов, как они были определены на A выше)

1. A имеет функтор фибрантной замены,
2. A имеет объект путей для фибрантных объектов, то есть факторизацию диагонального отображения $X \overset{\text{weak}}{\to} P(X) \overset{\text{fib}}{\to} X \times X$.

тогда *условие ацикличности* выполнено.

Для случая комбинаторной симплициальной модельной категории достаточно только предположения о существовании функтора фибрантной замены ([Sch99]).

5 Обогащенная модельная структура на категории алгебр

Итак, пусть V моноидальная модельная категория, M модельная V-обогащенная категория. Сейчас мы покажем, что когда C достаточно хорошая модельная категория, категория алгебр финитарной V-монады на C, при некоторых предположениях, имеет правую трансферную модельную структуру. Это стандартный результат.

Теорема 5.1. Пусть M обогащенная кофибрантно порожденная модельная категория, A категория алгебр финитарной V-монады на A, имеющая обогащенный функтор фибрантной замены и имеющая объект путей в подлежащей модельной категории (в смысле 4.2). Тогда A с правой трансферной модельной структурой является V-обогащенной кофибрантно порожденной модельной категорией.

Доказательство. Для подлежащих категорий, в виду того, что забывающий функтор финитарной монады сохраняет фильтрованные копределы условие факторизации выполняется и из предположения следует, что также выполняется условие ацикличности. Так M_0 имеет правую трансферную модельную структуру. Пусть теперь $f\colon u \to v$ кофибрация в V и $g\colon X \to Y$ фибрация в A. Мы хотим показать, что индуцированный морфизм $X^v \to X^u \times_{Y^u} Y^v$ фибрация, которая является слабой эквивалентностью, если хотя бы один из f, g является. По определению правой трансферной структуры морфизм является слабой эквивалентностью или фибрацию тогда и только тогда, когда его образ под действием забывающего функтора таков. Так как забывающий функтор $U\colon A \to M$ (будучи правым сопряженным) является обогащено непрерывным, то он сохраняет экспоненцирование ([Kel05], 3.73), следовательно под его действием наш морфизм переходит в $U(X)^v \to U(X)^u \times_{U(Y)^u} Y^v$. Этот морфизм индуцируется морфизмом $U(X) \to U(Y)$ и таким образом из того, что M является обогащенной модельной категорией следует утверждение теоремы. $\square$

Список литературы

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra.* 1967.

[Koc71] Anders Kock. «Closed categories generated by commutative monads». В: *Journal of the Australian Mathematical Society* 12.4 (1971), с. 405—424.

[Kel82] G. M. Kelly. «Structures defined by finite limits in the enriched context, I». eng. В: *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 23.1 (1982), с. 3—42.

[AR94] J. Adamek и J. Rosicky. *Locally Presentable and Accessible Categories.* 1994.

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra.* Т. 2. 1994.

[Hov99] M. Hovey. *Model Categories.* 1999.

[Sch99] Stefan Schwede. «Stable homotopical algebra and Γ-spaces». В: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 126 (1999), с. 329—356.

[Dug01] Daniel Dugger. «Combinatorial Model Categories Have Presentations». В: *Advances in Mathematics* 164.1 (2001), с. 177—201. arXiv: `math/0007068`.

[Bad02] Bernard Badzioch. «Algebraic Theories in Homotopy Theory». В: *Annals of Mathematics* 155.3 (2002), с. 895—913. arXiv: `math/0110101`.

[Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. 2003.

[Dwy04] W.G. Dwyer. *Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories*. 2004.

[Kel05] G. Kelly. «The Basic Concepts of Enriched Category Theory». В: *Reprints in Theory and Applications of Categories* (янв. 2005).

[PN09] John Power и Koki Nishizawa. «Lawvere theories enriched over a general base». В: *Journal of Pure and Applied Algebra* 213.3 (2009), с. 377—386.

[MP11] J P May и K Ponto. *More Concise Algebraic Topology: Localization, Completion, and Model Categories*. 2011.

[Sea13] Gavin J. Seal. *Tensors, monads and actions*. 2013. arXiv: `1205.0101 [math.CT]`.

[Bra14] Martin Brandenburg. *Tensor categorical foundations of algebraic geometry*. 2014. arXiv: `1410.1716 [math.AG]`.

[Rie14] E. Riehl. *Categorical Homotopy Theory*. Categorical Homotopy Theory. 2014.

[BW20] John C. Baez и Christian Williams. «Enriched Lawvere Theories for Operational Semantic». В: *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 323 (сент. 2020), с. 106—135. arXiv: `1905.05636v3`.

[Bal21] S. Balchin. *A Handbook of Model Categories*. 2021.