САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Бойко Алина Владимировна

Выпускная квалификационная работа

Построение оптимальных управлений в линейных системах с учетом динамических ограничений

Уровень образования: аспирантура

Направление 01.06.01 «Математика и механика»

Основная образовательная программа
МК.3002 «Прикладная математика и процессы управления»

Научный руководитель:
заведующий кафедрой Моделирования экономических систем, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Смирнов Николай Васильевич

Рецензент:
специалист по анализу данных
ООО «Эррайвал»,
кандидат физ.-мат. наук,
Шахов Яков Александрович

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Введение

В данной научной работе рассматривается подход к решению задач оптимального управления, основанный на адаптивном методе. Для нахождения оптимального управления нелинейная задача линеаризуется, затем сводится к задаче интервального линейного программирования (ИЗЛП). Исследование посвящено разработке алгоритма решения задач оптимального управления с динамическими ограничениями на управление.

Работа состоит из трех частей. В первой части приведен обзор методов решения задач оптимального управления, а также актуальность подобных задач в современном мире. Во второй части приведена постановка линейных задач оптимального управления и освещен подход к сведению к задаче линейного программирования с целью применения адаптивного метода. В последней части работы приведены примеры прикладных задач и численная реализация.

2 Общая постановка задачи. Обзор методов решения задач оптимального управления

В современном мире, с помощью математических моделей, можно описать многие процессы, при этом некоторые параметры модели могут быть изменяемыми. В связи с этим возникает необходимость управления этими параметрами для достижения наилучших результатов. Для решения таких задач была создана прикладная наука - «теория оптимального управления». Её основная задача заключается в поиске оптимального управляющего воздействия, которое будет соответствовать заданным условиям и обеспечивать максимум (минимум) критерию качества системы.

Основой теории оптимального управления является принцип максимума, который был разработан Л.С. Понтрягиным в 1956 году [1]. Эта работа привлекла широкий интерес научного общества к проблемам оптимизации задач. В дальнейшем теория оптимального управления была развита такими учеными, как Р.Е. Калман [2], В.И. Зубов [3], В.Г. Болтянский [4–6] и многими другими. Для решения задач теории оптимального управления применяются различные методы, как классические, так и численные.

С развитием новых технологий возникла потребность в нахождении оптимального управления в режиме реального времени. Для этой цели Р. Габасовым и его учениками был разработан адаптивный метод [9–11].

В настоящее время теория оптимального управления продолжает оставаться актуальной прикладной наукой и широко используется в различных областях.

Теория оптимального управления относится к разделу теории экстремальных задач, который занимается определением максимальных и минимальных значений. Исследование экстремальных задач началось еще в древности и было упомянуто в трудах таких ученых, как Аристотель (384–322 годы до н.э.), Евклид (III в. до н.э.) и Архимед (287–212 годы до н.э.). Одним из примеров таких задач является легенда о создании города Карфагена (825 год до н.э.), в котором царица Диодона должна была найти максимальную площадь, которую можно покрыть шкурой одного быка.

Развитие теории экстремальных задач привело к созданию различных разделов, включая линейное программирование, выпуклый анализ, вариационное исчисление, теорию игр и многие другие, одним из которых является теория оптимального управления.

Появление теории управления как отдельной науки принято ассоциировать с появлением принципа максимума, представленного в 1956 году Л.С. Понтрягиным, В. Г Болтянским и Р. В Гамкрелидзе. В том же году Л.С. Понтрягин выступил на сессии Академии наук СССР с докладом, посвященным теории оптимальных систем, чем привлек внимание ученых к актуальным проблемам теории оптимального управления и увеличил интенсивность исследований в области экстремальных задач. Для понимания необходимости создания отдельной прикладной науки, посвященной оптимальному управлению и основных принципов и подходов, лежащих в основе современной теории оптимального управления, рассмотрим в общих чертах состояние теории экстремальных задач до появления принципа максимума Л.С. Понтрягина [12].

Появление дифференциального исчисления значительно обогатило теорию экстремальных задач. Поскольку позволило не только находить точки экстремума функции, но и анализировать поведение функции в их окрестностях, что несло в себе значимую практическую пользу. Со временем простейшие экстремальные задачи нахождения максимума (минимума) функции, решающиеся посредством дифференциального исчисления (взятия частных производных), усложнились введением ограничений в виде равенств на переменные. Введение дополнительных переменных или множителей Лагранжа, позволяло сводить экстремальные задачи с ограничениями к исходному виду задачи оптимизации, требующей найти экстремум функции.

В тридцатые годы при изучении экономических процессов Л. В Контаровичем [13], оказалось, что многие процессы могут быть описаны более сложной системой с разными видами ограничений. Поскольку метод множителей Лагранжа не позволял решать подобные задачи, началась разработка новых методов решения, а подобные системы получили название «задачи линейного программирования».

Изучение задач линейного программирования привело к открытию новых фактов и методов, которые существенно повлияли на развитие теории экстремальных задач. В этот период была создана теория двойственности, а также широко использовались понятия выпуклого и двойственного конусов, которые ранее не были изучены в контексте экстремальных задач.

В начале 1950-х годов возникло новое направление - выпуклое программирование. Одним из основных результатов этого направления стала формулировка теоремы Куна-Такера, которая позднее была перенесена на нелинейное программирование. Новые методы позволяли находить максимум (минимум) функции при заданных ограничениях без необходимости дифференцирования.

Кроме того, исследования в области выпуклого анализа дали идею использования выпуклых аппроксимаций множеств значений функции, что значительно упрощало анализ. Таковы основные факты истории развития теории экстремальных задач, которые так или иначе легли в основу создания принципа максимума Л.С. Понтрягина и давшего развитие современной теории оптимального управления. Стоит отметить, что все рассмотренные новшества в теории экстремальных задач характеризуют интенсивное развитие этой, казалось бы, устоявшейся области математики.

2.1 Общая постановка задачи

Рассмотри подробнее математическую постановку задачи. Для строгой формулировки задачи определим основные понятия.

2.2 Объекты управления

Задача рассматривается на некотором промежутке времени. Время в общем случае непрерывно изменяется от начальной до конечной точки

$$t_0 \leq t \leq t_1.$$

Состояние системы в момент времени t однозначно описывается вектором, состоящих из фазовых координат. Фазовые координаты в момент времени t будем обозначать $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. Они являются непрерывными функциями времени. Таким образом, фазовый вектор является точкой в n — мерном евклидовом пространстве

$$x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)^T,$$

При изменении t фазовый вектор являтся непрерывной функцией времени

$$\{x(t)\} = \{x(t) \in E^n |\ t_0 \le t \le t_1\}.$$

В стандартной задаче оптимального управления обычно заданы начальное и конечное состояние

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{1}$$

где x_0, x_1 — заданные постоянные векторы.

В других классах задач оптимального управления необходимо преодолеть заданное пороговое значение в конце рассматриваемого временного промежутка, т.е. удовлетворить ограничениям типа неравенств

$$x(t_1) \ge x_1. \tag{2}$$

Также встречаются задачи, когда объект управления в конечный момент времени должен попасть на линейное многообразие, заданное системой уравнений

$$Hx(t_1) = g, \tag{3}$$

где H — $(k \times n)$ матрица, g — $(k \times 1)$ — вектор.

Предполагается, что изменение фазового вектора зависит от управляющих параметров $u_1(t), \dots, u_m(t)$, которые составляют вектор управления

$$u(t) = \big(u_1(t), \dots, u_m(t)\big)^T. \tag{4}$$

Будем считать, что элементы вектора управления являются кусочно-непрерывной функцией времени.

$$\{u(t)\} = \{u(t) \in E^m |\ t_0 \le t \le t_1\}. \tag{5}$$

Предполагается, что движения объекта управления описываются системой дифференциальных уравнений. В общем случае это нелинейная система

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t). \tag{6}$$

Предполагается, что каждая функция $f_1, \dots, f_n$ является непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным.

Для системы (6) при решении прикладных задач часто используют систему линейного приближения

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{7}$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$ матрица частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$, $B(t)$ — $(m \times n)$ матрица частных производных $\frac{\partial f}{\partial u}$.

В случае, если дифференциальные уравнения явно не зависят от времени, система называется стационарной (автономной).

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \tag{8}$$

где A и B постоянные матрицы соответсвующих размерностей.

Также встречаются прикладные задачи, в которых линейные слагаемые заданы явным образом, а нелинейности носят харктер степенной функции

$$\dot{x} = A_1(t)x(t) + B(t)u(t) + A_2(t)x^q(t). \tag{9}$$

здесь $A_1(t), A_2(t)$ — $(n \times n)$ матрица, $b(t)$ — вектор-функция размерности n, $q \in R^1$.

2.3 Целевые функционалы

Целевой функционал (функционал качества), который требуется максимизировать (минимизировать) в общем виде выглядит следующим образом

$$\max_{u(t)} J = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)dt + I(x_1, t_1). \tag{10}$$

F и I являются непрерывно дифференцируемыми функциями по фазовым переменным и управлениям. Таким образом, функционал (10) зависит от фазовых координат и управляющих параметров, которые зависят от времени, в то же время, зависит и от конечного состояния и конечного момента времени.

В прикладных задачах часто встречаются линейные функционалы, зависящие только от управления

$$\max_{u(t)} J = -\int_{t_0}^{t_1} u(t)dt. \tag{11}$$

Также нелинейные функционалы, зависящие только от управления

$$\max_{u(t)} J = -\int_{t_0}^{t_1} |u(t)|dt. \tag{12}$$

Достаточно распространены функционалы в виде квадратичных форм с фазовыми переменными

$$\max_{u(t)} J = \int_{t_0}^{t_1} (x^T Dx + u^T Eu)dt. \tag{13}$$

2.4 Динамические ограничения

Управление задано на множестве допустимых управлений $\{u(t)\} \in U$. Множество U предполагается выпуклым и компактным.

В классических постановках задачи оптимального управления приняты ограничения на управление вида

$$0 \leq u(t) \leq L, \tag{14}$$

Вектор L состоит из наперед заданных констант, которые описывают реальные ограничения в конкретной прикладной задаче.

Однако, в рамках проведенных исследований, было обнаружено, что для многих прикладных задач актуальны динамические ограничения. Речь идет о ситуациях, когда управленческий ресурс постоянно меняется в зависимости от времени и текущих значений фазовых переменных. В этом случае динамические ограничения могут носить линейный характер

$$0 \leq u(t) \leq Q_1(t)x(t) + Q_2(t) \tag{15}$$

где $Q_1(t)$ — $(m \times n)$ матрица, $Q_2(t)$ — вектор — функция размерности m, а в некоторых задачах могут быть описаны нелинейными неравенствами

$$0 \leq u(t) \leq Q_1(t)x^p(t) + Q_2(t), \tag{16}$$

где $Q_1(t)$ — $(m \times n)$ матрица, $Q_2(t)$ — вектор — функция размерности размерности m, $p \in Z$. В практических задачах часто встречаются ограничения в виде неравенств с экспонентами

$$0 \leq u(t) \leq e^{\alpha t}x(t) + Q_2(t), \tag{17}$$

где $\alpha \in R$ — заданная константа.

2.5 Принцип Максимума Л.С. Понтрягина

В данном параграфе мы рассмотрим классический подход к решению задач оптимального управления. Принцип Максимума Л.С. Понтрягина. После подробного рассмотрения предпосылок к появлению принципа максимума Понтрягина и зарождения современной теории оптимального управления, рассмотрим первые появления формулировки условий принципа максимума.

Принцип максимума для линейных систем был сформулирован в своих работах Р. В Гамкрелидзе и являлся серьезным достижением, поскольку не следовал из вариационного исчисления и включал в себя все результаты теории регулирования. Позднее принцип максимума был сформулирован Л.С. Понтрягиным для нелинейных систем.

Принцип максимума является необходимым условием существования экстремума для задачи оптимального управления. Формулировка и доказательство принципа максимума можно назвать первым серьезным результатом в развитии теории оптимального управления. Первоначальное доказательство принципа максимума было сложным и не коррелировало с классическими методами вариационного исчисления. Многие математики старались переосмыслить его и применить к новым классам задач, это было сделано в следующих работах ([20] — [24]).

Принцип максимума и сейчас является базовым знанием в теории оптимального управления и вариационном исчислении, изучаемым во многих математических и технических учебных заведениях.

Для нахождения оптимального управления используем принцип максимума Л.С. Понтрягина. Гамильтониан системы будет выглядить следующим образом

$$H(x,u,\lambda,t) = G(x,u,t) + \lambda f(x,u,t).$$

Нам необходимо найти $u(t), \lambda(t), x(t)$ удовлетворяющий следующим условиям

$$\max_{0 \le u(t) \le k(t)x + p(t)} H(x,u,\lambda,t), \quad \forall t, t_0 \le t \le t_1$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \ x(t_0) = x_0 \tag{18}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \ \lambda(t_1) = \frac{\partial I}{\partial x_1}.$$

2.6 Уравнение Беллмана

После возникновения принципа максимума, следующим значимым шагом в развитии теории оптимального управления послужило создание метода, динамического программирования, основанного на принципе оптимальности Р. Беллмана. Параллельно с развитием теории экстремальных задач в 1940 году Р. Беллман впервые ввел понятие динамического программирования. Ключевым его результатом стало «уравнение

Беллмана» или «уравнение динамического программирования», первым применением которого является именно теория управления. Со временем уравнение Беллмана стало важным инструментом в экономике и развитии теории игр.

Открытие Р. Беллмана сыграло важную роль в развитии оптимального управления, поскольку уравнение Беллмана является достаточным условием для задач управления. Практически любая задача оптимального управления может быть решена путем применения уравнения Беллмана. За свою работу Беллман удостоился Медали почета от Института инженеров электротехники и электроники (IEEE) в 1979 г., за вклад в теорию процессов принятия решений и теорию управления системами, в частности, за создание и применение динамического программирования. Помимо этого, за время своей научной деятельности Беллман опубликовал 619 статей и 39 книг.

Принцип оптимальности заключается в выборе оптимальной стратегии так, что стратегия зависит только от предыдущего шага. Иными словами, на оптимальную стратегию влияет только текущее состояние системы. Принцип оптимальности Беллмана лежит в основе многих современных подходов к решения задач оптимального управления. Одним из таких подходов является применение уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана, позволяющего быстро находить оптимальное управление даже для нелинейных систем. Таким образом рассмотренные в этой главе исследования положили начало современной теории оптимального управления, показав важность и актуальность продолжения развития этой прикладной науки.

2.7 Численные методы

В связи с наличием трудностей построения аналитического решения задач оптимального управления появилась необходимость создания различных приближенных численных методов. Помимо этого, развитие технологий и увеличение вычислительных мощностей компьютеров породило необходимость нахождения оптимального управления в режиме реального времени, но классические подходы не позволяли этого реализовать.

Современные методы можно разделить на несколько категорий в зависимости от их алгоритмической структуры. В основе первой лежит применение принципа максимума путем сведения задачи к краевой. Ко второй категории относятся численные методы, основанные на динамическом программировании. К третьей группе относятся методы, погружающие задачу оптимального управления в другой класс задач, для которых нахождение решения не составляет труда.

Поскольку теория управления сравнительно новый раздел математики, она постоянно развивается, а широкое применение этой науки в инженерии, астрономии, экономике и других отраслях обеспечивает постоянное ее развитие.

Существует широкое множество современных численных методов. появившихся в последние годы по всему миру. Одним из таких методов, является метод последовательных приближений, основанный на методе динамического программирования [40].

Для решения задач оптимального управления применяется также метод множителей Лагранжа [41], но применим он не для любых систем.

Все существующие методы имеют существенный недостаток, это отсутствия динамики в системе. Но в современном мире редко известно заранее состояние системы через требуемое время, потому появляется необходимость создания нового подхода. Именно этому положил начало Р. Габасов и его ученики в 2000 году [9].

Р. Габасов предложил подход, не использующий классические формулировки в явном виде. Подход основан на погружении задачи оптимального управления в класс задач линейного программирования, предложив при этом искать оптимальный план не классическим симплекс-методом, а адаптивным методом. Адаптивный метод имеет ряд преимуществ, поскольку позволяет быстрее находить решение в условиях задач большой размерности, что является значимым фактором для динамических систем.

В настоящий момент исследования Р. Габасова являются востребованными и применяются к широкому классу задач. [29, 31–35]

3 Линейные задачи оптимального управления с динамическими ограничениями

Большинство классических подходов используют статичные ограничения на управление, однако при решении прикладных задач часто встречаются именно динамические ограничения. Введение динамических ограничений на управляющую переменную позволяет более точно отразить реальность.

3.1 Линейная задача оптимального управления с линейными динамическими ограничениями

Рассмотрим линейную задачу оптимального управления (7) с функционалом (10) при линейной подынтегральной функции F и линейными динамическими ограничениями (15). В данном случае элементы постановки задачи будем рассматривать в следующем виде

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t),$$

$$\max_{u(t)} J = \int_{t_0}^{t_1} (p_1(t)x(t) + p_2(t)u(t) + p_3(t))dt + I(x_1, t_1), \tag{19}$$

$$0 \le u(t) \le q_1(t)x(t) + q_2(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

В рамках этого параграфа мы предполагаем, что управление $u(t)$ задано в классе кусочно — постоянных функций с периодом квантования $h = (t_1 - t_0)N$, где N - положительное целое число.

$$u(t) = u((i-1)h) = u_i, \quad t \in [(i-1)h, ih), \quad i = \overline{1, N}. \tag{20}$$

3.1.1 Приведение к задаче линейного программирования

Для линейной дифференциальной системы выпишем общее решение в форме Коши:

$$x(t, t_0, x_0) = Y(t)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\Big[B(\tau)u(\tau) + C(\tau)\Big]d\tau\Big), \tag{21}$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица.

Подставим (21) в функционал J системы (19):

$$\max_{u(t)} J = \int_{t_0}^{t_1} \left(p_1(t)Y(t)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\Big[B(\tau)u(\tau) + C(\tau)\Big]d\tau\Big) \right.$$

$$\left. + p_2(t)u(t) + p_3(t) \right) dt + I(x_1, t_1).$$

Поскольку максимизируем функционал по $u(t)$, можем отбросить слагаемые, не зависящие от $u(t)$, получим

$$\max_{u(t)} J = \int_{t_0}^{t_1} \left(p_1(t)Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + p_2(t)u(t) \right) dt.$$

Целевой функционал запишем в виде

$$\max_{U} D^T U,$$

где

$$U = (u_1, \ldots, u_N)^T, \quad D = (d_1, \ldots, d_N)^T,$$

$$d_k = \int_{t_0+(k-1)h}^{t_0+kh} p_1(t)Y(t)\Big[\int_{t_0}^{t_0+(k-1)h} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau + p_2(t)\Big]dt, \quad k = \overline{1, N},$$

Для правой границы системы 19 получим

$$Y(t_1)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}(\tau)\Big[B(\tau)u(\tau) + C(\tau)\Big]d\tau\Big) = x_1.$$

Преобразуем

$$Y(t_1)\int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = x_1 - Y(t_1)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}(\tau)C(\tau)\Big).$$

Получим

$$VU = W, \tag{22}$$

где

$$V = (v_1, \ldots, v_N), \quad v_k = \int_{t_0+(k-1)h}^{t_0+kh} Y(t_1)Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1, N},$$

$$W = x_1 - Y(t_1)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}(\tau)C(\tau)\Big).$$

Подставим 21 в динамические ограничения системы 19:

$$0 \le u(t) \le q_1(t)Y(t)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\Big[B(\tau)u(\tau) + C(\tau)\Big]d\tau\Big) + q_2(t),$$

$$0 \le u(t) \le g(t_0, x_0, u_0, \dots, u_{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor}), \tag{23}$$

где

$$g(t_0, x_0, u_0, \dots, u_{t-h}) = q_1(t)Y(t)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 +$$

$$\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\Big[B(\tau)u(\tau) + C(\tau)\Big]d\tau\Big) + q_2(t) = q_1(t)Y(t)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+h} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau \ u_0 + \int_{t_0+h}^{t_0+2h} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau \ u_1 + \dots$$

$$+ \int_{t-h}^{t} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau \ u_{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\mathrm{C}(\tau)d\tau\Big) + q_2(t).$$

Мы можем рекурсивно вычислить неравентсва (23) и получим набор векторов $R = (R_1, \dots, R_N), \quad R_i \in R^m$:

$$0 \le u(t_0) \le g(t_0, x_0) = R_1,$$

$$0 \le u(t_h) \le g(t_0, x_0, t_h, u(t_0)) = R_2,$$

$$\dots$$

$$0 \le u(t_i) \le g(t_0, x_0, t_i, u(t_0), \dots, u(t_{i-1})) = R_i, \quad i = \overline{3, N}.$$

$$R_{i*} \le R_i, \quad i = \overline{1, N}. \tag{24}$$

Начальное значение $R_{*1} = R_1 = q_1(t_0)k_0 + q_2(t_0)$.
Для $i > 1$

$$R_{*i} = \begin{cases} \psi_i^1, & \text{если } \psi_i^1 > 0 \\ \psi_i^2, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{25}$$

$$\zeta_i = \begin{cases} R_i, & \text{если } \int_{t_0+ih}^{t_0+(i+1)h} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau < \mathbb{O}_{nxm} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{26}$$

где

$$\psi_i^1 = q_1(t_0+ih)Y(t_0+ih)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \sum_{j=1}^{i}\int_{t_0+(j-1)h}^{t_0+jh} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau\zeta_j + \\ + \int_{t_0}^{t_0+ih} Y^{-1}(\tau)C(\tau)\Big) + q_2(t_0+ih)$$

$$\psi_i^2 = q_1(t_0+ih)Y(t_0+ih)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \sum_{j=1}^{i}\int_{t_0+(j-1)h}^{t_0+jh} Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau\frac{\zeta_j}{2} + \\ + \int_{t_0}^{t_0+ih} Y^{-1}(\tau)C(\tau)\Big) + q_2(t_0+ih)$$

Таким образом, мы определили R_{*i} как вектор ниже, чем фактический R_i.

Окончательно получим интервальную задачу линейного программирования

$$\max_U D^T U, \tag{27}$$

$$VU = W, \tag{28}$$

$$0 \le U \le R \tag{29}$$

3.1.2 Органичения в виде неравенств для конечного положения системы

На практике конечное положение может быть задано в виде множества, в которое система должна попасть в конечный момент времени t_1

$$Hx(t_1) \ge S$$

Подставив также 21 в систему 19 получим

$$HY(t_1)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}(\tau)\Big[B(\tau)u(\tau) + C(\tau)\Big]d\tau\Big) \ge S.$$

Преобразуем

$$HY(t_1)\int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \ge S - Y(t_1)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}(\tau)C(\tau)\Big).$$

Получим

$$V'U \ge W', \tag{30}$$

где

$$V' = (v'_1, \dots, v'_N), \quad v'_k = \int_{t_0+(k-1)h}^{t_0+kh} HY(t_1)Y^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1,N},$$

$$W' = S - Y(t_1)\Big(Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1}(\tau)C(\tau)\Big).$$

Итоговая задача состоит из функционала (27), уравнения движения (30) и ограничений (29).

3.2 Линейная задача оптимального управления с нелинейными динамическими ограничениями

В прикладных задачах часто встречаются примеры нелинейных динамических ограничений. Рассмотрим также линейную задачу оптимального управления с нелинейными динамическими ограничениями (17).

В данном случае элементы постановки задачи будем рассматривать в следующем виде

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t),$$

$$\max_{u(t)} J = \int_{t_0}^{t_1} (p_1(t)x(t) + p_2(t)u(t) + p_3(t))dt + I(x_1, t_1), \tag{31}$$

$$0 \le u(t) \le q_1(t)x(t)^{p(t)} + q_2(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

Для приведения системы (31) необходимо линеаризовать нелинейность в динамических ограничениях и используя формулу Коши (21) аналогично пункту 2.1 получить задачу линейного программирования (29).

Избавиться от нелинейности можно путем подбора отрезка или набора отрезов прямых, приближенных к исходной нелинейной функции. Поскольку подбор линеаризации индивидуален для каждого вида функции, мы не будем подробно останавливаться на этом. В третьей части будет рассмотрен пример линеаризации для прикладной задачи макроэкономического роста.

4 Примеры линейных задач оптимального управления

Теория оптимального управления имеет широкое применение в современном мире. Рассмотрим несколько задач, решение которых имеют практическое значение.

4.1 Актуарная задача

В качестве первого примера рассмотрим актуарную задачу урегулирования убытков клиентов в страховой компании. Для решения которой требуется найти такую политику отправки убытков регулятору, чтобы получать максимальную прибыль в каждом расчетном периоде.

На российском страховом рынке действует правило прямого возмещения убытков по ОСАГО, которое получило название Бельгийская система [42]. При страховом случае с двумя участниками, в котором установлен виновник, потерпевший может обратиться в свою страховую компанию (например компанию A) и получить возмещение убытка. Страховая компания должна выплатить компенсацию пострадавшему лицу (клиент компании А), тем самым компенсируя убытки другой компании (компании B). После этого компания A может потребовать возмещения убытков от компании B. Но компенсация для компании A не равна выплаченной сумме (см рис.1). В течение одной календарной недели все компании направляют свои требования с убытками в некоторую электронную систему, после чего рассчитывается среднерыночное значение и это фиксированное значение возвращается на счет каждой страховой компании. Этот процесс повторяется каждую неделю.

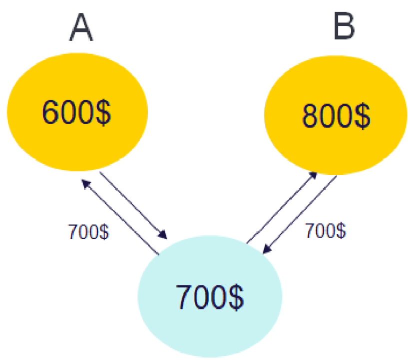

Рис. 1: Процесс расчета компенсаций убытков

Основная проблема этой системы в том, что для компаний, которые платят меньше, чем в среднем по рынку, эта система выгодна, так как они получают компенсацию больше, чем реально оплаченный убыток, а для остальных компаний этот процесс приносит убытки. Для решения этой проблемы компания может пересмотреть свою политику продаж и урегулирования претензий. Но для небольших компаний это не решение проблемы.

Можно прогнозировать среднее значение каждой недели, но на короткий период времени (не более чем на 5 недель вперед). Мы рассмотрим, как найти оптимальную политику для компании, если среднерыночное значение известно на пять недель вперед; т.е. как компенсировать убытки, чтобы получить максимальную выгоду.

Актуарную задачу можно рассматривать как задачу оптимального управления с управляющим параметром $u(t)$, равным сумме убытков, которые заявляет страховая компания A в течение недели. Для крупных компаний на рынке эта система не является проблемой, поскольку эти компании определяют рынок. Мы рассмотрим политику маленьких компаний, не влияющих на рынок, так как их вклад в среднее незначителен. Каждую неделю страховая компания A решает, какие убытки должны быть выплачены и отправлены для получения компенсации.

Пусть задан начальный капитал компании для данного вида компенсации убытков $k(t_0) = k_0$. В конце периода мы хотим получить капитал более k_1. Предположим, что мы знаем среднее значение для каждого интервала времени $c(t)$. На практике мы можем прогнозировать среднее значение на несколько недель вперед с небольшой долей ошибок. Однако такой расчет подробно не рассматривается, поскольку в данной статье мы не касаемся методов и моделей прогнозирования фиксированного среднего.

Финансовый результат каждой недели:

$$f(t) = n(t)c(t) - u(t),$$

где $n(t)$ — количество требований.

Поскольку прирост капитала складывается из финансового результата $f(t)$ от выплаты убытков и суммы амортизации капитала

$$\dot{k}(t) = n(t)c(t) - u(t) - \delta k(t),$$

где δ — коэффициент амортизации капиатала.

Поскольку в каждый момент времени убытки не могут быть выплачены сверх капитала, применим ограничения

$$0 \leq u(t) \leq k(t).$$

Необходимо определить управление $u(t)$, удовлетворяющее всем ограничениям и обеспечивающее максимальную сумму выплачиваемых убытков $u(t)$ за все периоды. Окончательно получаем следующую систему

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \to \max_{u(t)} \\ \dot{k}(t) = n(t)c(t) - u(t) - \delta k(t), \quad k(t_0) = k_0, \\ k(t_1) \geq k_1, \quad 0 \leq u(t) \leq k(t), \quad u \in U.\end{gathered} \tag{32}$$

4.1.1 Адаптивный метод

Для поиска оптимальной политики актуарной задачи мы используем современный подход, основанный на адаптивном методе Р. Габасова. Адаптивный метод используется для решения широкого класса задач оптимального управления (см. [43] – [45]).

Для линейной системы (32) мы получаем следующую ИЗЛП

$$\begin{aligned} &\max_U U, \\ &VU \geq W, \\ 0 \leq &U \leq R, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$v_k = e^{-\delta(t_1 - t_0)} \int_{t_0+(k-1)h}^{t_0+kh} e^{\delta(\tau - t_0)} d\tau, \quad k = \overline{1, N}, \quad V = (v_1, \dots, v_N),$$

$$W = -k_1 - e^{-\delta(t_1 - t_0)} \Big(k_0 + \int_{t_0}^{t_1} Y^{-1} c(\tau) n(\tau) d\tau \Big).$$

Таким образом, для системы (33) оптимальным планом $u'(t)$ является оптимальное управление, полученное с помощью адаптивного метода.

4.1.2 Численный эксперимент

Рассмотрим численное приложение. Предположим, что в начальный момент времени капитал составляет 1 миллион, за 5 недель мы хотим увеличить капитал до более чем 5 миллионов. При этом мы знаем среднее фиксированное значение и количество требований на каждую неделю. Мы рассматриваем именно такой небольшой отрезок времени, потому что на практике мы знаем информацию о рынке только за 5 недель. Примем следующие параметры и построим оптимальное управление: $t_0 = 0$,

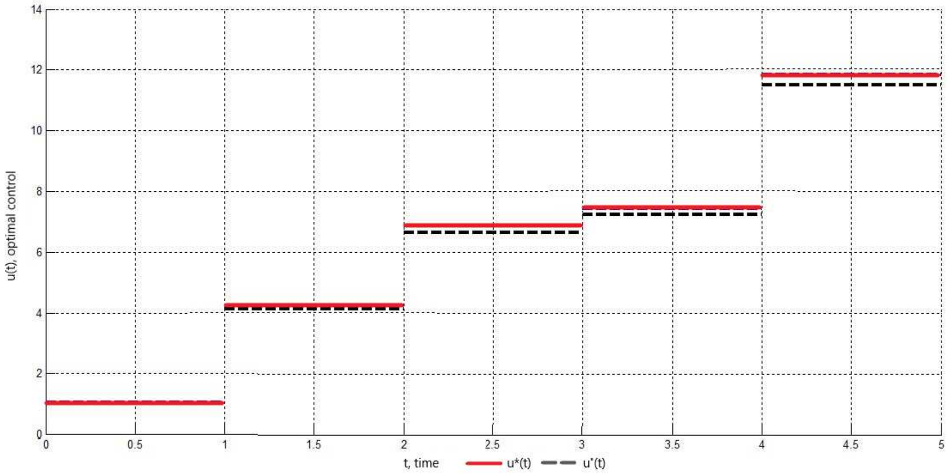

Рис. 2: Оптимальное управление адаптивного метода - $u*(t)$, симплекс-метода - $u\prime(t)$.

$t_1 = 5,\ N = 5,\ c(1) = 74\,932,\ c(2) = 82\,546,\ c(3) = 53\,266,\ c(4) = 274\,959,$ $c(5) = 260\ 634,\ \ k_0 = 1 * 10^6,\ \ k_1 = 5 * 10^6,\ \ \delta = 9.6 * 10^{-4},\ \ n(1) = 68,$ $n(2) = 96,\ n(3) = 142,\ n(4) = 50,\ n(5) = 71.$

Страховой компании необходимо определить такой полис, чтобы максимально увеличить количество претензий, по которым необходимо получить компенсацию. Для численного примера мы разработали несколько программ в среде MATLAB.

Разница целевой функции для адаптивного метода и симплекс-метода составляет $6,68 * 10^{-12}$. Также время работы алгоритма адаптивного метода составляет $0,434$ сек и время работы симплекс-метода $2,63$ сек.

На графике (см. рис. 3) целевая функция адаптивного метода, стартовавшего с левой границы, быстро сходится к требуемому контрольному значению.

Полученный вектор управления является оптимальной политикой для выставления требований. Результирующее управление, полученное с помощью адаптивного метода, находится на правой границе ограничений управления. Преимущество адаптивного метода состоит в том, что для задач большой размерности он не требует построения гамильтониана или решения сопряженных систем. Кроме того, адаптивный метод работает быстрее и точнее, чем симплексный метод, что является существенным фактором в случаях большой размерности.

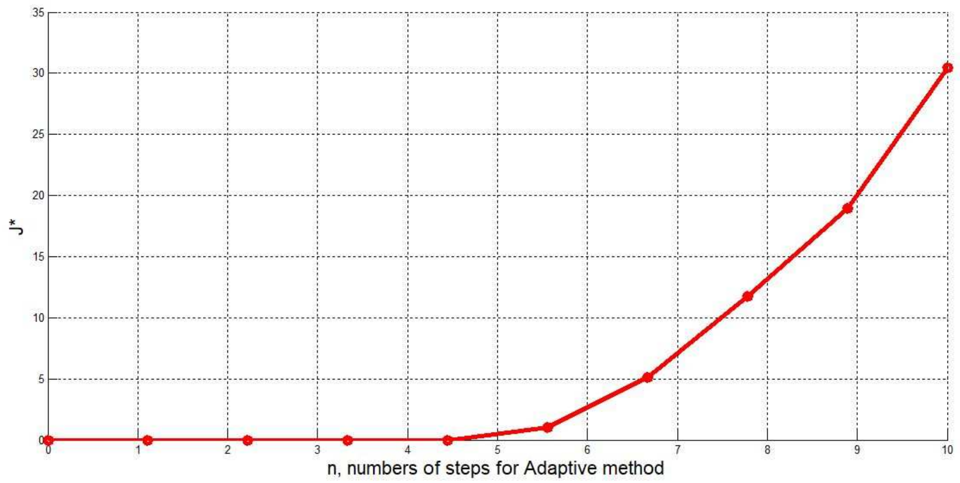

Рис. 3: Изменение целевого функционала на каждом шаге Адаптивного метода.

Таким образом, используя современный подход, основанный на адаптивном методе, удалось решить актуарную задачу с реальными данными.

4.2 Задача оптимального распределения капитальных вложений в отрасли

Рассмотрим задачу построения оптимального распределения капитальных вложений в отрасли [33]. Управлением в задаче является интенсивность ввода основных производственных фондов. Требуется найти такое управление, которое минимизирует функционал качества.

Пусь $K(t)$ - величина основных производственных фондов в году t. За ΔK примем изменение этой величины за промежуток времени Δt, выраженное формулой:

$$\Delta K = K(t + \Delta t) - K(t)$$

Интенсивность ввода основных производственных фондов обозначим как $V(t)$, то есть количество фондов, вводимых за единицу времени (например, за год). При этом с учетом физического и морального износа количество фондов уменьшается со временем. Предположим, что интенсивность выбытия основных производственных фондов в году t равна $\mu K(t)$. Тогда за промежуток времени Δt из производства будет выведено $\mu K(t)\Delta t$ единиц фондов, а введено $V(t)\Delta t$ единиц новых фондов. Таким образом, уравнение баланса основных производственных фондов может быть записано так:

$$K(t+\Delta t) - K(t) = V(t)\Delta t - \mu K(t)\Delta t$$

Поделим обе части этого равенства на Δt и устремим Δt к 0. Получим:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K(t) + V(t) \tag{34}$$

Получили модель роста основных производственных фондов отрасли (34). Пусть k_0 обозначает начальное значение основных фондов, k_1 — значение основных фондов в конечный момент времени. Также известны величина R и интервал времени $T = [t0, t1]$. Для более точной моделирования введем дополнительные ограничения на функции $K(t)$ и $V(t)$:

$$\begin{aligned} K(t_0) &= k_0, \\ K(t_1) &\geq k_1, \\ 0 \leq V(t) &\leq R, \quad t \in T, \end{aligned} \tag{35}$$

Введем критерий качества:

$$F(K(t), V(t)) = \int_{t_0}^{t_1} = V(t)dt - \beta K(t_1) \to min \tag{36}$$

Получили линейную задачу оптимального управления (34)-(36), в которой требуется найти такую пару $(K(t), V(t))$, удовлетворяющую (34)-(35) и доставляющую минимум функционалу (36). Здесь управление представлено в виде $V(t)$, а фазовая переменная — $K(t)$. Важно отметить, что функционал (36) состоит из двух слагаемых, поэтому его минимизация означает экономию капиталовложений и максимизацию $K(t_1)$ основных фондов в конце рассматриваемого периода времени. Числа α и β — это весовые коэффициенты, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Если $\beta > \alpha$, то приоритет отдается первому требованию, если $\alpha > \beta$, то второму.

4.2.1 Сведение к ИЗЛП

С помощью формулы Коши эту задачу можно свести к интервальной задаче линейного программирования. Управление $V(t)$ будем искать в классе кусочно-постоянных функций с периодом квантования $h = t_1 - t_0$, где N — некоторое натуральное число.

В итоге получим следующее

$$C^T V \to min,$$

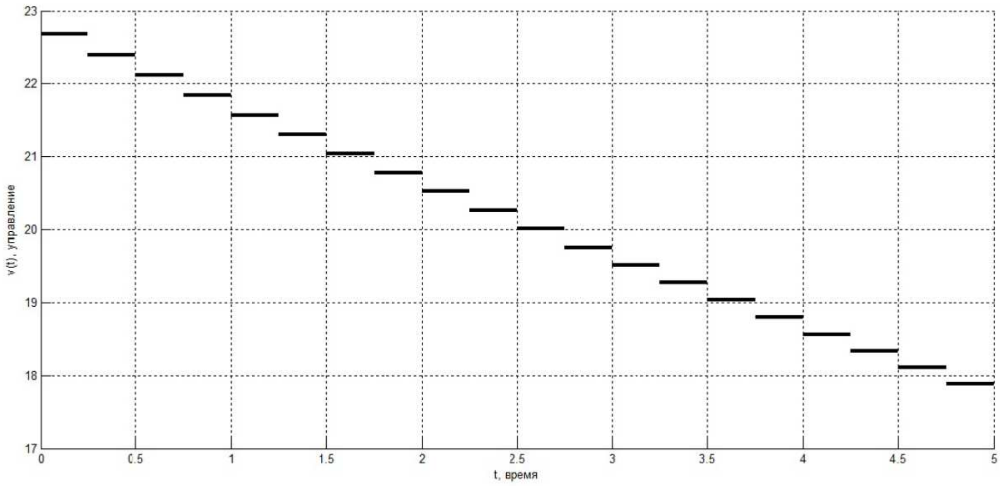

Рис. 4: Оптимальное управление задачи распределения капиатльных вложений.

$$AV \geq B, \tag{37}$$
$$0 \leq V(t) \leq R, \quad t \in T,$$

где $V(t) = (V(t_0), \ldots, V(t_0 + (N-1)h)); \quad B = k_1 - k_0 e^{-\mu(t_1 - t_0)}$;
$C = (C_h(t_0), \ldots, C_h(t_0 + (N-1)h))^T$; $C_h(t) = \alpha - \beta e^{-\mu t_1} \int_t^{t+h} e^{\mu\tau} d\tau$;
$A = (A_h(t_0), \ldots, A_h(t_0 + (N-1)h)); \quad A_h(t) = e^{-\mu t_1} \int_t^{t+h} e^{\mu\tau} d\tau.$

4.2.2 Численная реализация

Подставим в задачу (34)-(36) конкретные значения параметров и найдем оптимальное управление $V(t)$, доставляющее минимум функционалу (36). $t_0 = 0$; $t_1 = 5$; $k_0 = 2$; $k_1 = 6$; $\mu = 0,05$; $N = 20$; $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $R = 23$.

В качестве начальной опоры выбран первый элемент вектора A, а в качестве начального плана выбрана граница. Рассматриваемый интервал времени составляет 5 лет, следовательно, период квантования $h = t_1 - t_0$ составляет 3 месяца.

Полученное значение целевой функции равно $113,0300532921691$

Задачу (34)-(36) мы свели к ИЗЛП (37) и с помощью адаптивного метода [33] нашли оптимальное управление $V(t)$. Алгоритм адаптивного метода реализован в среде MATLAB. Полученное управление является кусочно-постоянной функцией, определенной на интервале прогнозирования $[0, 5]$ (см. рис. 4). Изменение целевой функции в ходе работы адаптивного метода представлено на графике (см. рис. 5). Целевая функция

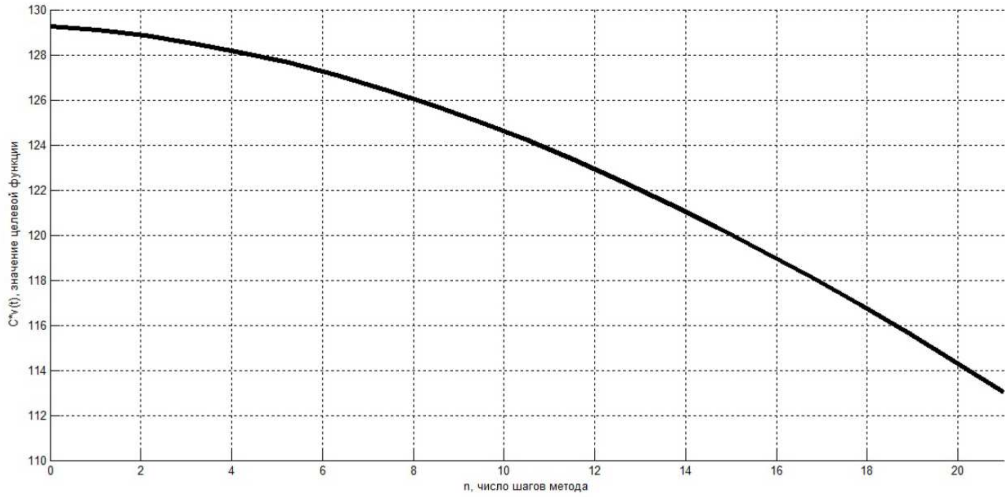

Рис. 5: Изменение целевого функционала задачи распределения капиатльных вложений.

равномерно убывает, достигая минимума на правой границе. Из-за специфического вида множества планов, применение симплекс-метода не целесообразно для этой задачи, в то же время, адаптивный метод быстро сходится к оптимальному плану.

4.3 Модель экономического роста с нелинейной производственной функцией

Рассмотрим неоклассическую модель макроэкономического роста, предложенную Р. Солоу в 1956 г. [9]. Модель рассматривает агрегированную замкнутую экономику, в которой все затраты и весь выпуск продукции находятся внутри системы в любой момент времени. Для математической формулировки задачи Солоу использовал производственную функцию, связывающую капитал и трудовые ресурсы с выпускаемым продуктом.

Для решения нам необходимо найти такую политику потребления экономики, чтобы максимизировать конечный капитал и суммарное потребление за весь период времени. Данная модель относится к нелинейным задачам оптимального управления, решение которой несет практическую пользу во многих задачах экономического планирования.

Рассмотрим основные элементы неоклассической модели экономического роста. Согласно основному уравнению баланса, общий выходной продукт U равен сумме потребления C и инвестиций I.

$$U = C + I. \tag{38}$$

Величины U , C и I могут быть выражены в национальной валюте. Инвестиции обеспечивают рост капитала и компенсируют его амортизацию. Пусть $K(t)$ — капитал в момент времени t, тогда $K'(t)$ — скорость изменения капитала, амортизация пропорциональна капиталу, то есть равна $\mu K(t)$, где μ — норма амортизации капитала. Таким образом, мы получаем первое дифференциальное уравнение модели экономического роста

$$I = K' + \mu K. \tag{39}$$

Следующим важным элементом модели экономического роста является производственная функция, которая в общем случае устанавливает связь между количеством произведенной продукции с количествами затрат (капитал, рабочая сила и т.д.)

$$U = F(K, L), \tag{40}$$

где $L = L(t)$ - трудозатраты в момент времени t (общее количество человеко—часов, отработанных в году, которое в конечном итоге измеряется в национальной валюте).

Теория производственных функций является важной частью прикладных экономических исследований, которая в основном сформировалась во второй половине 20-го века (см. монографии [46–48]). Существуют разные виды производственных функций, их свойства хорошо изучены. Однако эти моменты не являются объектом нашего исследования, потому подробно на них останавливаться не будем. Конкретные примеры применения производственных функций можно найти в публикациях [49–51]. В нашем исследовании мы будем использовать динамическую производственную функцию Кобба — Дугласа.

$$U(t) = \alpha_0 L(t)\alpha_1 K(t)\alpha_2 e^{pt}, \tag{41}$$

где параметры α_0, α_1, α_2 — положительные константы, α_1, $\alpha_2 \in (0, 1)$, p — коэффициент технологического роста. Все параметры функции (41) определяются методами экономической статистики с использованием информации о состоянии экономики за несколько лет. Последнее предположение состоит в том, что трудовые ресурсы растут с постоянной скоростью

$$\dot{L} = nL, \tag{42}$$

где n — темп роста трудовых ресурсов. Начальное значение $L(0) = L_0$ также известно. Целью экономической политики является максимизация объема потребления за управляемый период $t \in [0, z]$ и капитала в конечный момент времени $K(z)$.

Выпишем (39) в нормальной форме, учитывая основное уравнение баланса, получим

$$\dot{K} = I - \mu K = U - C - \mu K, \tag{43}$$

$$t \in [0, z], \quad K(0) = K_0.$$

Подставим (41) и решение уравнения (42)

$$L(t) = L_0 e^{nt} \tag{44}$$

в (43) получим

$$\dot{K}(t) = \alpha_0 L \alpha_1 e^{(p+\alpha_1 n)t} K(t) \alpha_2 - C(t) - \mu K(t). \tag{45}$$

Введем ограничение на минимальный размер капитала $K(z)$ в конечный момент времени

$$K(z) \geq K_1.$$

Поскольку потребление не может превышать выпуск U, получим

$$0 \leq C(t) \leq \alpha_0 L \alpha_1 e^{(p+\alpha_1 n)t} K(t) \alpha_2.$$

Поскольку требуется максимизировать конечный капитал и общее потребление, введем функционал

$$J = e^{-\delta z} K(z) + \int_0^z e^{-\delta t} C(t),$$

где δ — коэффициент дисконтирования.

Тогда математическая постановка задачи принимает следующий вид

$$J = e^{-\delta z} K(z) + \int_0^z e^{-\delta t} C(t) dt \to max, \tag{46}$$

$$\dot{K}(t) = \lambda(t) K(t) \alpha_2 - \mu K(t) - C(t), \tag{47}$$

$$K(0) = K_0, \quad K(z) \geq K1,$$

$$0 \leq C(t) \leq \lambda(t) K(t)^{\alpha_2}, \quad t \in [0, z], \tag{48}$$

где

$$\lambda(t) = \alpha_0 L \alpha_1 e^{(p+\alpha_1 n)t}$$

Нелинейную систему (46)—-(48) можно рассматривать как нелинейную задачу оптимального управления. Здесь потребление $C(t)$ является управлением, а капитал $K(t)$ — фазовая переменная. Таким образом, необходимо найти пару $(C(t), K(t))$, удовлетворяющую (47), (48), доставляющую максимум функционалу (46).

Управление дано в классе кусочно-постоянных функций с периодом квантования $h = \frac{z}{N}$, где N — натуральное число.

$$C(t) = C((i-1)h) = C_i, \tag{49}$$
$$t \in [(i-1)h, ih), \quad i = \overline{1, N}.$$

4.3.1 Линеаризация

Рассмотрим (47). Аппроксимируем нелинейность

$$K(t)^{\alpha_2}, \quad t \in [0, z]$$

сегментом прямой $aK(t) + b$. Коэффициенты a, b находятся из системы

$$\begin{cases} aK_0 + b = K_0^{\alpha_2}, \\ aK_1 + b = K_1^{\alpha_2}. \end{cases} \tag{50}$$

Получим

$$a = \frac{K_0^{\alpha_2} - K_1^{\alpha_2}}{K_0 - K_1},$$
$$b = K_0^{\alpha_2} - aK_0.$$

Такой подход возможен благодаря гладкости производственной функции и ее элемента $K(t)\alpha_2$. После замены нелинейного элемента уравнения (47) получаем следующую систему

$$J = e^{-\delta z} K(z) + \int_0^z e^{-\delta t} C(t) dt \to \max,$$
$$\dot{K}(t) = A(t)K(t) - C(t) + F(t), \tag{51}$$
$$K(0) = K_0, \quad K(z) \geq K_1,$$
$$0 \leq C(t) \leq \lambda(t) K(t)^{\alpha_2}, \quad t \in [0, z],$$

где

$$A(t) = \lambda(t)a - \mu, \quad F(t) = \lambda(t)b.$$

Таким образом, нам удалось преобразовать (46)-(48) в линейную задачу оптимального управления (51).

Следует отметить, что нелинейный элемент остается в ограничениях управления (48). Этот фактор мы линеаризуем дальше.

4.3.2 Интервальная задача линейного программирования

Преобразование линейной задачи оптимального управления в задачу интервального линейного программирования является первым этапом адаптивного метода оптимального управления Габасова. Теперь опишем эту процедуру для дифференциального уравнения из (51) с начальным условием $K(0) = K_0$.

Выпишем формулу Коши для дифференциального уравнения

$$K(t, 0, K_0) = Y(t)\Big[Y^{-1}(0)K_0 + \int_0^t Y^{-1}(\tau)(F(\tau) - C(\tau))d\tau\Big], \qquad (52)$$

где

$$Y(t) = e^{\int_0^t A(\tau)d\tau}.$$

Подставим (52) в систему (51)

$$J = e^{-\delta z}Y(z)\Big[Y^{-1}(0)K_0 + \int_0^z Y^{-1}(\tau)(F(\tau) - C(\tau))d\tau\Big] + \int_0^z e^{-\delta t}C(t)dt \to \max, \qquad (53)$$

$$Y(z)\Big[Y^{-1}(0)K_0 + \int_0^z Y^{-1}(\tau)(F(\tau) - C(\tau))d\tau\Big] \geq K_1. \qquad (54)$$

В функционале (53) слагаемые без управления $C(t)$ можно отбросить, получим

$$\int_0^z (e^{-\delta\tau} - e^{-\delta z}Y(z)Y^{-1}(\tau))C(\tau)d\tau \to \max. \qquad (55)$$

Преобразуем (54)

$$Y(z)\int_0^z Y^{-1}(\tau)C(\tau)d\tau \leq Y(z)\Big[Y^{-1}(0)K_0 + \int_0^z Y^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau\Big] - K_1. \qquad (56)$$

Учитывая тип управления (49) можем разделить интегралы (55), (56) на части

$$\int_0^h (e^{-\delta\tau} - e^{-\delta z} Y(z) Y^{-1}(\tau)) d\tau C_1 + \\ \int_h^{2h} (e^{-\delta\tau} - e^{-\delta z} Y(z) Y^{-1}(\tau)) d\tau C_2 + \dots \\ \int_{(h-1)N}^{hN} (e^{-\delta\tau} - e^{-\delta z} Y(z) Y^{-1}(\tau)) d\tau C_N \to \max \quad (57)$$

$$Y(z)\Big[\int_0^h Y^{-1}(\tau) d\tau C_1 + \int_h^{2h} Y^{-1}(\tau) d\tau C_2 + \dots \\ \int_{(h-1)N}^{hN} Y^{-1}(\tau) d\tau C_N\Big] \le \\ Y(z)\Big[Y^{-1}(0) K_0 + \int_0^z Y^{-1}(\tau) F(\tau) d\tau\Big] - K_1. \quad (58)$$

Далее перепишем (57), (58) в следующей векторной форме

$$D^{\mathrm{T}} C \to \max, \quad (59)$$

$$PC \le B, \quad (60)$$

где

$$C = C_{N\times 1} = (C_1, \dots, C_N)^T$$

искомый вектор управления (потребление),

$$D = D_{N\times 1} = (D_h(h), \dots, D_h(Nh))^T,$$

$$D_h(t) = \int_{t-h}^{t} (e^{-\delta\tau} - e^{-\delta z} Y(z) Y^{-1}(\tau)) d\tau,$$

$$P = P_{1\times N} = (P_h(h), \dots, P_h(Nh)),$$

$$P_h(t) = Y(z) \int_{t-h}^{t} Y^{-1}(\tau) d\tau,$$

$$B = -K_1 + Y(z)\Big(Y^{-1}(0) K_0 + \int_0^z F(\tau) Y^{-1}(\tau) d\tau\Big).$$

Для ограничений (48) мы также можем использовать аппроксимацию нелинейности отрезком прямой, как это было выше, или использовать формулу Коши (52) для нелинейного элемента $K(t)^{\alpha_2}$. Рассмотрим два подхода к преобразованию ограничений в стандартный тип прямых ограничений.

4.3.3 Первый подход

Подставим (52) в (48)

$$0 \le C(t) \le \lambda(t) Y(t)^{\alpha_2} \Big[Y^{-1}(0) K_0 + \\ + \int_0^t F(\tau) Y^{-1}(\tau) d\tau - \int_0^t Y^{-1}(\tau) C(\tau) d\tau \Big]^{\alpha_2}. \quad (61)$$

Преобразуем последнее слагаемое (61)

$$\int_0^t Y^{-1}(\tau) C(\tau) d\tau = \int_0^h Y^{-1}(\tau) d\tau C_1 + \\ + \int_h^{2h} Y^{-1}(\tau) d\tau C_2 + \ldots + \int_{t-h}^t Y^{-1}(\tau) d\tau C_m, \quad (62)$$

где $m = \lceil \frac{t}{h} \rceil$. Поскольку

$$C_i \ge 0, \quad i = \overline{1, N}$$

и третий член в (61) отрицательные, используем (62), получим

$$0 \le C \le R, \quad (63)$$

где

$$R = R_{N \times 1} = (R_h(0), \ldots, R_h((N-1)h))^T,$$

$$R_h(t) = \lambda(t) \left(Y(t) \left(Y^{-1}(0) K_0 + \int_0^t F(\tau) Y^{-1}(\tau) d\tau \right) \right)^{\alpha_2}.$$

Таким образом (59), (60) и (63) - ИЗЛП.

4.3.4 Второй подход

В (48) мы заменим нелинейность, используя процедуру линеаризации, и получим

$$0 \le C(t) \le \lambda(t)(aK(t) + b). \quad (64)$$

Подставим (52) в (64) получим

$$0 \le C(t) \le a\lambda(t) Y(t) \Big[Y^{-1}(0) K_0 + \\ + F \int_0^t Y^{-1}(\tau) d\tau - \int_0^t Y^{-1}(\tau) C(\tau) d\tau \Big] + b\lambda(t)$$

Последний интеграл в квадратных скобках также можно представить в виде суммы интегралов (62), а затем выразить C_i, $i = \overline{1, N}$. Таким образом, мы получаем неравенства того же вида, что и в (63).

Используя один из этих подходов, мы получаем ИЗЛП в стандартной форме. Далее мы будем использовать первый подход, т.е. ИЗЛП в форме (59), (60), (63).

4.3.5 Численная реализация

На основе подхода, описанного выше, было разработан пакет программ в среде MATLAB. Для тестового примера мы выбрали следующие параметры модели:

$$a_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0.3, \quad \alpha_2 = 0.2,$$

$$\mu = 0.05, \quad n = 0.1, \quad \delta = 0.09,$$

$$N = 60, \quad p = 0.1, \quad z = 5 \; years,$$

$$K_0 = 5, \quad L_0 = 2, \quad K_1 = 1.1K_0.$$

Полученные параметры линейной аппроксимации имеют вид

$$a \approx 0.05, \quad b \approx 1.11.$$

Ошибка аппроксимации $e \approx 0.002$. В качестве меры погрешности была принята норма разности.

На рисунке 6 представлена аппроксимация нелинейности $K(t)^{\alpha_2}$ в (47). Пунктирная линия обозначает отрезок прямой $aK + b$. Из графика видно, что гладкость производственной функции позволяет нам использовать простой метод аппроксимации. Если длина управляемого временного интервала была больше, то вместо одного отрезка прямой мы могли бы использовать ломанную линию.

Полученное оптимальное управление, представляющее собой возрастающую кусочно-постоянную функцию, показано на рисунке 7. Следовательно, потребление $C(t)$ будет расти со временем.

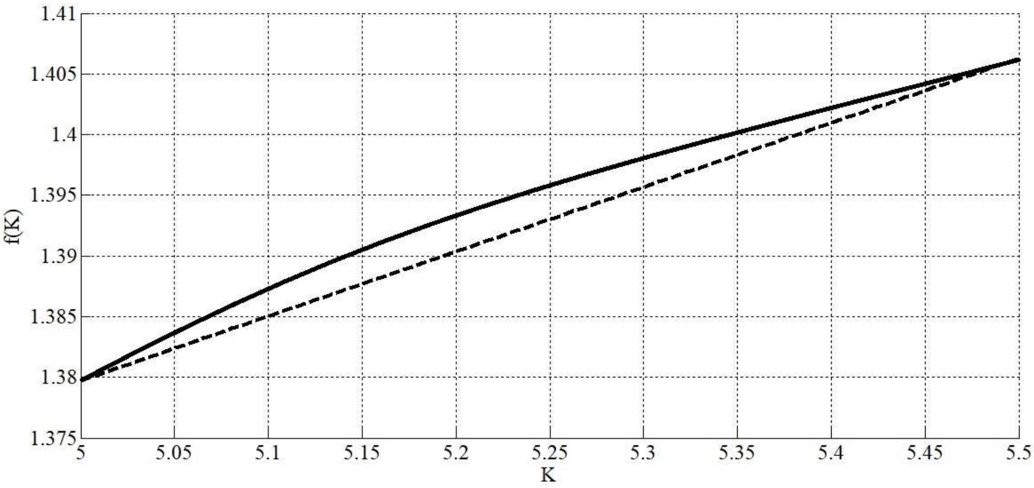

Рис. 6: Аппроксимация нелинейности

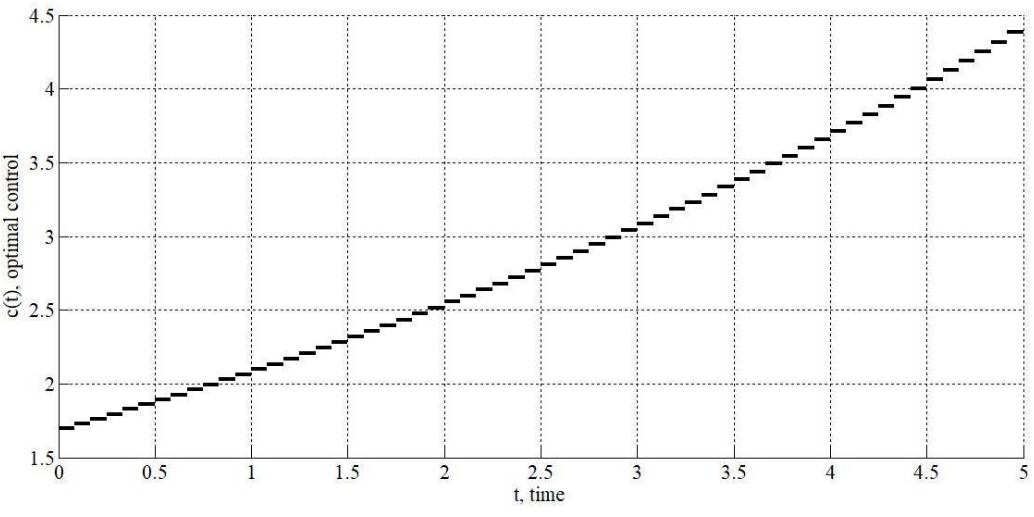

Рис. 7: Оптимальное управление модели макроэкономического роста

5 Заключение

Основные результаты работы:

- проведено исследование основных подходов решения задач оптимального управления;
- подготовлен алгоритм решения и программная реализация для линейных задач оптимального управления с динамическими ограничениями;
- приведены примеры применения адаптивного метода для прикладных задач;
- по теме исследования опубликован ряд работ, презентованных на различных международных конференциях [34, 35, 43, 44].

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку подхода к решению нелинейных и разностных систем с динамическими ограничениями на управление.

Список литературы

[1] Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР. 1966. No 1, С. 7–10.

[2] Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Труды I Междунар. конгресса ИФАК.: АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521—547.

[3] Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования.: Машиностроение, 1974. 336 с.

[4] Болтянский В.Г. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. Изв. АН СССР. Сер.мат., 1964, 28, No 3, С. 48–514 (РЖМат, 1964, 10Б328)

[5] Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления.: Наука. 1966, 307 с. (РЖМат, 1967, 7Б352К)

[6] Болтянский В.Г. Линейная задача оптимального управления. Дифференц. уравнения. 1969, 5, No 5, С. 783–799. (РЖМат, 1969, 12ББ21)

[7] Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления.: ИЛ, 1962. 336 с.

[8] Петросян Л. А., Захаров В.В. Математические модели в экологии. СПб.:Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1997. 253 с.

[9] Альсевич В.В., Габасов Р., Глушенков В.С. Оптимизация линейных экономических моделей. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 211 с.

[10] Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления// Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Вып. 40, No 6. С. 838–859.

[11] Габасов Р. Методы оптимизации: пособие. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.

[12] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

[13] Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Ленинград.: Изд-во ЛГУ, 1939, 64.

[14] Lebesque H., Integrale, lonquer, aire-Ann-math., 1902, 7, C. 231–359.

[15] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимального управления, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., 1976, т 6, С. 133—259.

[16] Hopkin A.M. A phase-plane approach to the compensation of saturating servomechanisms.: AIEE, pt. 1, 1951, 70 c.

[17] McDonald D. Multiple mode operation of servomechanisms. Rev. Sci.Instrum, 1952, No 1.

[18] Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, 1953, 14, No 6.

[19] Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, 1963, 14, No 5.

[20] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[21] Винер Н. Кибернетика и общество. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

[22] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[23] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1977. Т. 14.

[24] Afanasiev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. Mathematical Theory of Control Systems Design. Dordrecht: Kluwer, 1996.

[25] Swan G.W. Application of Control Theory in Medicine.N.Y.: Dekker, 1984.

[26] Ляпунов А. А. О вполне аддитивных вектор-функциях. I. Изв. АН СССР.Сер. мат., 1940, 3, No 0, С. 465–478.

[27] Kharitonov V.L. An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay // Automatica. 2014. Vol. 50(1). P. 211—217.

[28] Харитонов В.Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. II. Матрицы Ляпунова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Выпуск 2. С. 199–207.

[29] Zhabko, A.P., Nurtazina, K.B., Provotorov, V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation,Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya. 15, 3, С. 323–336.

[30] Попков А.С., Баранов О.В. Об оптимальном управлении вращательным движением вала электродвигателя // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т.1, No 1., С. 31–36.

[31] Клюенков А.Л. Реализация адаптивного метода в одной задаче оптимального управления // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т.2, No 1., С. 53—58.

[32] Бойко А.В., Зубаков А.В. Применение адаптивного метода в неоклассической модели экономического роста // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т.3, No 1., С. 607-–611.

[33] Бойко А.В. Применение адаптивного метода к задаче оптимального распределения капитальных вложений в отрасли // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т.4, No 1, С. 581-–585.

[34] Boiko. A.V., Smirnov. N.V. Approach to optimal control in the economic growth model with a non-linear production function. ACM International Conference Pro-ceeding Series. 1 November 2018, Pages 85-89. ICAIT'2018 Proceedings of the 3rd International Conference on Applications in Information Technology.doi:10.1145/3274856.3274874.

[35] Boiko, A.V., Smirnov, N.V. On Approaches for Solving Nonlinear Optimal Control Problems. Studies in Computational Intelligence. 2020.

[36] Габасов Р., Кирилова Ф.М., Ружицкая Е.А. Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях. Известия академии наук. Теория и ситемы управления. 2001. No 1. С. 29-–38.

[37] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Наука. 1966.

[38] Габасов. Р, Кирилова Ф.М., Костюкова О.И. Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче. 1991.

[39] Intriligator. M. Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice Hall, N.Y. 1971.

[40] Колмановский В.Б. Задачи оптимального управления. ж. Математика. 1997.

[41] Трошина Н.Ю. Теория оптимального управления [Электронный ресурс]: URL:http://nto.immpu.sgu.ru/sites/default/files/3/54992.pdf (да- та обращения: 16.03.2017).

[42] Russian association of motor insurers URL:https//www.autoins.ru/en/osago (Application date: 20.02.2019).

[43] Boiko A.V., Smirnov N.V.: Approach to optimal control in the economic growth model with a nonlinear production function. ACM International Conference Proceeding Series. 2018. pp. 85–89.

[44] Boiko A.V., Smirnov N.V.: On Approaches for Solving Nonlinear Optimal Control Problems. Studies in Computational Intelligence. 2020. pp. 183–188. doi: 10.1007/978-3-030-32258-8 21.

[45] Baranov O.V., Smirnov N.V., Smirnova T.E., Zholobov Y.V.: Design of a quadrocopter with PID-controlled fail-safe algorithm // Journal of Wireless Mobile Networks, Ubiquitous Computing, and Dependable Applications, vol. 11, no. 2, 2020. pp. 23–33. doi: 10.22667/JOWUA.2020.06.30.023.

[46] Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики: Изд-во Лань, Санкт-Петербург. 2008.

[47] Shephard R. Theory of Cost and Production Functions: Princeton University Press, Princeton, NJ. 1970.

[48] Терехов Л.Л. Производственные функции. Изд-во Статистика, Москва. 1974.

[49] Dombi M.: Modeling the material stock of manufactured capital with production function. Resources, Conservation and Recycling 138. 2018. pp 207–214. doi: 10.1016/j.resconrec.2018.07.015

[50] Gong B.: Agricultural reforms and production in China: Changes in provincial production function and roductivity in 1978–2015. Journal of Development Economics 132. 2018. pp. 18–31. doi: 10.1016/j.jdeveco.2017.12.005

[51] Moysan G., Senouci M.: A note on 2-input neoclassical production functions. Journal of Mathematical Economics 67, 1. 2016. pp 80–86. doi: 0.1016/j.jmateco.2016.09.011