Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математической теории игр и статистических решений

Викулова Алла Андреевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

О нестандартном задании характеристической функции в кооперативных играх

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат ф.-м. наук
доцент
Громова Е.В.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Введение

Теория игр представляет собой набор математических инструментов, с помощью которых можно выяснить природу конфликта и его управление. Первоначально теория игр находила свое применение в рамках экономической науки, но позднее также получила широкое признание и в других социальных науках. Сегодня теория игр применима к широкому диапазону поведенческих отношений, и в настоящее время является общим термином для науки логического принятия решений. Теория игр актуальна и находит свое применение в экономике (рынок игр, торги, аукционы, совместное распределение затрат), политике (голосование), окружающей среде (природе) (рыболовство, борьба с загрязнением), промышленности (телекоммуникации, проблемы местоположения, заключение контрактов и т.д.) и других областях.

Существует большое количество классов игр [1, 2], однако выделяют две основные ветви теории игр: некооперативные и кооперативные, которые значительно отличаются друг от друга областью решаемых задач. В некооперативной теории игр рассматривается в основном то, как интеллектуальные индивиды взаимодействуют между собой для достижения собственных целей. У каждого игрока имеется задача выбора стратегии, максимизирующей выигрыш этого игрока, который, в свою очередь, зависит от стратегий, выбранных другими игроками. Игра называется кооперативной (коалиционной), если игроки могут объединяться в группы и действовать в соответствие с некоторым заранее определенным принципом оптимальности, который включает в себя соглашения о множестве кооперативных стратегий и механизм распределения общего выигрыша между игроками. Кооперация является одной из основных форм человеческого поведения.

Большинство кооперативных игр описываются с помощью характеристической функции, а вопрос построения данной функции является одним из основных в теории указанных игр. Как известно, существуют различные способы задания характеристической функции, наиболее известными и часто используемыми являются так называемые α, β, γ и δ – характеристические функции [3, 4]. Однако в данной работе также предлагается рассмотреть новый способ для построения характеристических функций в кооперативных играх — ζ–характеристическую функцию. Согласно новому подходу характеристическая функция вычисляется в два этапа с использованием выражений для оптимальных управлений, что существенно упрощает процесс вычислений по сравнению с построением характеристической функции Неймана-Моргенштерна.

Очень важными с точки зрения практического применения являются теоретико-игровые задачи в области природоохранного менеджмента, а особенно, кооперативные игры управления вредными выбросами. Загрязняющие вещества, поступающие в атмосферный воздух, являются фактором, воздействующим на самые разные процессы и объекты, в том числе, на климат. В Париже на 21-й сессии Конференции Сторон Рамочной конвенции ООН об изменении климата, которая состоялась 12 декабря 2 года, был подписан документ, в котором, в частности, указывается, что в период до 2020 года развивающиеся страны получат 100 млрд долларов в год для решения проблем климата [5]. Во избежание данных проблем необходима заинтересованность правительства в сфере охраны окружающей среды.

Работа имеет следующую структуру. Глава 1 содержит общие сведения о кооперативных играх, также вводится определение α–характеристической функции (классический способ построения характеристической функции) и рассматривается пример с конкретным видом функции полезности.

В Главе 2 описана δ–характеристическая функция, которая впервые была предложена в работе [6]. При построении данной функции, в отличие от подхода [4] учитываются ограничения на управления и проверяется выполнение условия супераддитивности характеристической функции для примеров. Выяснилось, что при заданных ограничениях δ–характеристическая функция не супераддитивна в общем случае, приведен контрпример.

В Главе 3 новая характеристическая функция, построенная нестандартным образом в работе [7], адаптирована на случай игры, описанной в Главе 1. Доказана супераддитивность рассмотренной функции в общем случае. Теоретический результат продемонстрирован на примерах. В конце работы приводится пример построения характеристической функции всеми тремя изученными способами, основанный на реальных данных об очистке и загрязнении окружающей среды тремя предприятиями Иркутской области. Данная проблема сформулирована как кооперативная игра трех лиц. В качестве кооперативного решения вычислен вектор Шепли для всех трех способов построения характеристической функции.

Постановка задачи

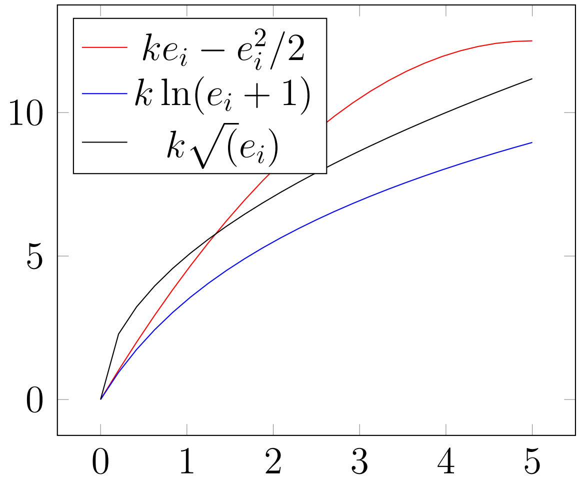
Будем рассматривать теоретико-игровую модель загрязнения окружающей среды с множеством неидентичных игроков N (стран, предприятий), каждый из которых способствует образованию вредных выбросов, повреждающих общий экологический ресурс. Рассматривается кооперативный вариант игры управления вредными выбросами. В данной задаче используется статическая постановка, т. е. игроки принимают решения, не зная поведения других игроков, в этом случае говорят, что участники действуют одновременно. Пусть e_i — это объем вредных выбросов, производимый i-ым игроком. Мы рассматриваем задачу с ограничением, а именно, $e_i \in [0; k]$, в отличие от работы [4], что является общим подходом (см., например, [8,9]). Считается заданной производственная функция $f_i(e_i)$, которая является возрастающей, дифференцируемой, выпуклой по e_i, и соответствует доходам игрока i. Здесь предполагается, что объемы производства прямо пропорциональны уровню загрязнения, так что $f_i(e_i) \geqslant 0$. Функция $d_i(\hat{e})$ - положительная, возрастающая, дифференцируемая, характеризующая расходы на устранение ущерба от суммарного загрязнения $\hat{e}$, где $\widehat{e} = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. Каждый из игроков $i = 1, \ldots, N$ максимизирует свою целевую функцию u_i , которая зависит от его собственного производства e_i и от общих выбросов, производимыми всеми игроками,

$$\max_{e_i, i \in N} u_i(e) = f_i(e_i) - d_i(\hat{e}),$$

где $\widehat{e} = \sum\limits_{i \in N} e_i,\ \ e = \{e_i\}_{i \in N}$ [4, 8, 9].

В качестве функции полезности $f_i(e_i)$, где $i = 1, \ldots, n$, можно использовать, например, логарифмическую, квадратичную функции, а также функцию квадратного корня, которые являются возрастающими, дифференцируемыми и выпуклыми вверх по e_i (см. рис. 1).

Рис. 1: Графики разных функций полезности, при $k = 5$



Для построения кооперативного решения в задаче управления вредными выбросами необходимо определить характеристическую функцию этой игры.

Цель работы:

- рассмотреть различные способы построения характеристической функции в кооперативной игре с отрицательными связями, выявить достоинства и недостатки рассмотренных подходов;

- адаптировать новое определение характеристической функции, предложенное Петросяном, Громовой [7], для данного класса игр и доказать ее супераддитивность;

- рассмотреть пример кооперативной игры в области природоохранного менеджмента для реальных данных.

Обзор литературы

Необходимые сведения из теории игр широко представлены в книге (Петросян, Зенкевич, Шевкопляс, «Теория игр», 2012), там же рассмотрены некоторые модели управления загрязнением окружающей среды несколькими игроками. Кроме того, теоретико-игровая задача сокращения вредных выбросов была также изучена в работах (Петросян, Захаров, «Введение в математическую экологию», 1986; Petrosjan, Zaccour, «Time–consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction», 2003) и др.

В статье (Petrosjan, Zaccour, 2003) был предложен еще один подход для построения характеристической функции, как альтернатива стандартному заданию функции, представленного в книге (von Neumann, Morgenstern, «Theory of Games and Economic Behavior», 1953). Еще один новый способ построения характеристической функции был сформулирован и рассмотрен в статье (Петросян, Громова, «Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх», 2014). Постановка задачи данной квалификационной работы содержит модель игры с отрицательными связями, описанную, например, в работах (Reddy, Zaccour, «A friendly computable characteristic function», 2016; Chander, Tulkens, «The core of an economy with multilateral environmental externalities», 1997; Eyckmans, Finus, «An almost ideal sharing scheme for coalition games with externalities», 2004).

Для работы также потребовалось изучение материала и поиск данных по борьбе с загрязнением окружающей среды, которые были найдены в открытых Интернет-источниках (ресурсы: rbk.ru, priroda.ru).

1 Стандартное построение характеристической функции в кооперативных играх

1.1. Понятие характеристической функции

Кооперативной игрой в форме характеристической функции будем называть пару $< N, V >$, где $N = 1, \ldots, n$ — множество игроков, $V(S)$ — характеристическая функция, под которой понимается отображение из множества всех возможных коалиций $V : 2^N \to R^1, V(\emptyset) = 0$, ставящее в соответствие каждой коалиции S величину суммарного выигрыша, который игроки из данной коалиции могут себе обеспечить, действуя самостоятельно.

Важно отметить свойство супераддитивности:

$$V(S_1 \cup S_2) \geqslant V(S_1) + V(S_2), \quad \forall S_1, S_2 \subseteq N,\ S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

Данное свойство стимулирует игроков к объединению в большую коалицию N и придает смысл вектору Шепли. Выполнение свойства супераддитивности для характеристической функции ранее являлось обязательным [10], однако в настоящее время это условие не является обязательным [11].

1.2. α - характеристическая функция

При построении α–характеристической функции используется классический подход Неймана–Моргенштерна [12], который долгое время представлялся единственно возможным способом построения характеристической функции в кооперативной игре. Согласно данному подходу под $V(S)$ понимается наибольший гарантированный выигрыш коалиции S. Сама $V(S)$ может быть вычислена следующим образом: игроки из коалиции S максимизируют свой суммарный выигрыш, в то время как игроки из $N \backslash S$ действуют противоположно интересам коалиции, т. е. минимизируют общий выигрыш коалиции S.

$$V^{\alpha}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \sup\limits_{\substack{e_i \\ i \in S}} \inf\limits_{\substack{e_j \\ j \in N \backslash S}} \sum\limits_{i \in S} u_i(e_1, \ldots, e_n), & S \subset N, \\ \sup\limits_{e_1, \ldots, e_n} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(e_1, \ldots, e_n), & S = N. \end{cases} \tag{1}$$

Построенная по (1) характеристическая функция является супераддитивной в общем случае [13]. Однако, стоит выделить ряд проблем, возникающих при построении данной функции:

- вычислительные сложности (необходимо решить $2^n - 1$ задач оптимизации и др.);
- с точки зрения экономической интерпретации предположение о том, что игроки из коалиции $N \backslash S$ буду играть против коалиции S является маловероятным.

1.3. Пример построения α - характеристической функции

Пример 1. Рассмотрим кооперативную игру с квадратичной функцией полезности при $n = 3$, $f_i(e_i) = ke_i - \frac{1}{2}e_i^2$, $e_i \in [0; k]$, $d_i = d_i\widehat{e}$, где $\widehat{e} = e_1 + e_2 + e_3$. Характеристическая функция для данной игры имеет вид:

$$V^{\alpha}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max\limits_{\substack{e_i, \\ i \in S}} \min\limits_{\substack{e_j, \\ j \in N \backslash S}} \sum\limits_{i \in S} \left(ke_i - \frac{1}{2}e_i^2 - d_i\widehat{e}\right), & S \subset N, \\ \max\limits_{\substack{e_i, \\ i \in S}} \sum\limits_{i=1}^{3} \left(ke_i - \frac{1}{2}e_i^2 - d_i\widehat{e}\right), & S = N. \end{cases} \tag{2}$$

Для того, чтобы управления находились в области допустимых значений, введем дополнительное требование на параметры модели:

$$k \geqslant \sum_{i=1}^{3} d_i, \quad \sum_{i=1}^{3} d_i \geqslant 0.$$

Согласно (2), найдем значения характеристической функции для всех возможных коалиций (см. приложение 1).

Характеристическая функция гранд-коалиции $N = \{1, 2, 3\}$ имеет вид

$$V^{\alpha}(\{1,2,3\}) = \max_{ei, i=\overline{1,3}} \sum_{i=1}^{3} u_i = \frac{3}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2, \quad \bar{e}_i = k - \sum_{i=1}^{3} d_i \quad i = \overline{1,3}.$$

Для одноэлементных коалиций имеем

$$V^{\alpha}(\{i\}) = k(k - d_i) - \frac{1}{2}(k - d_i)^2 - d_i(3k - d_i), \quad i = \overline{1,3}$$

Характеристические функции для двухэлементных коалиций:

$$V^{\alpha}(\{2,3\}) = 2k(k - (d_2 + d_3)) - (k - (d_2 + d_3))^2 - (d_2 + d_3)(3k - (d_2 + d_3)),$$

$$V^{\alpha}(\{1,3\}) = 2k(k - (d_1 + d_3)) - (k - (d_1 + d_3))^2 - (d_1 + d_3)(3k - (d_1 + d_3)),$$

$$V^{\alpha}(\{1,2\}) = 2k(k - (d_1 + d_2)) - (k - (d_1 + d_2))^2 - (d_1 + d_2)(3k - (d_1 + d_2)).$$

Для рассмотренного примера доказана супераддитивность характеристической функции (см. приложение 1).

2 Нестандартное построение характеристической функции

2.1. δ - характеристическая функция

δ–характеристическая функция строится в два этапа. На первом этапе необходимо найти равновесие по Нэшу $e^{NE} = \{e_i^{NE}\}_{i \in N}$, а затем использовать данные стратегии для игроков, входящих в коалицию $N \setminus S$.

$$V^{\delta}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \sup\limits_{\substack{e_i,\ i \in S \\ e_j = e_j^{NE},\ j \in N \setminus S}} \sum\limits_{i \in S} u_i(e_S, u_{N \setminus S}^{NE}), & S \subset N, \\ \sup\limits_{e_1, \ldots, e_n} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(e_1, \ldots, e_n), & S = N. \end{cases}$$

Преимущества:

- проще вычислительный процесс;
- имеет понятную экономическую интерпретацию.

Недостатки:

- не супераддитивна в общем случае;
- проблемы существования и единственности равновесия по Нэшу.

2.2. Игра с отрицательными связями

В работе [4] доказывается, что характеристическая функция (2.1.) является супераддитивной функцией для некоторого достаточно широкого класса игр, в которые, в частности, могут быть включены игры, описанные в постановке задачи. В англоязычной литературе игры, в которых функция полезности i-го игрока имеет вид $u_i(e) = f_i(e_i) - d_i\left(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i\right)$, получили название игр с отрицательными связями, т. к. увеличение управляемых параметров e_j других игроков приводит к уменьшению функции полезности i-го игрока.

В работе [4] представлено доказательство супераддитивности δ – характеристической функции для игр с отрицательными связями, в котором не рассматривается ограничение на параметр e_i. Как правило, в задачах такого типа управляемый параметр (объем вредных выбросов) выбирается на отрезке $[0, k]$. Следовательно, экстремальные значения функции полезности u_i достигаются на границах интервала, что не учитывается при доказательстве в [4]. Т. е. доказательство [4] можно считать справедливым только для того случая, когда управления попадают в интервал $[0, k]$. Для подтверждения сказанного рассмотрим представленную модель для примеров с конкретными видами функции полезности.

2.3. Пример построения δ – характеристической функции

Пример 2. Рассмотрим игру при $n = 3,\ u_i = f_i(e_i) - d_i(\hat{e})$, $f_i(e_i) = k\sqrt{e_i},\ d_i(\hat{e}) = d_i\hat{e}$, где $\hat{e} = e_1 + e_2 + e_3$. Тогда

$$V^\delta(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max\limits_{\substack{e_i, i\in S \\ e_j = e_j^{NE},\ j\in N\setminus S}} \sum\limits_{i\in S} \left(k\sqrt{e_i} - d_i\hat{e}\right), & S \subset N, \\ \max\limits_{e_i, i\in N} \sum\limits_{i\in N} (k\sqrt{e_i} - d_i\hat{e}), & S = N. \end{cases}$$

Из условий допустимости были введены дополнительные требования на параметры модели:

$$k \geqslant \sum_{i=1}^{3} d_i, \quad \sum_{i=1}^{3} d_i \geqslant 0.$$

Для гранд-коалиции имеем

$$V^{\delta}(\{1,2,3\}) = \max_{e_1,e_2,e_3} \sum_{i=1}^{3} u_i(e_1,e_2,e_3) =$$
$$= \max_{e_1,e_2,e_3} \left(k\sum_{i=1}^{3}\sqrt{e}_i - \sum_{i=1}^{3} d_i \sum_{i=1}^{3} e_i \right). \qquad (3)$$

Чтобы найти максимум функции, считаем частные производные $\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i}, \quad i=\overline{1,3}$:

$$\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i} = \frac{k}{2\sqrt{e}_i} - \sum_{i=1}^{3} d_i = 0.$$

Следовательно, максимизирующие управления имеют вид:

$$e_i = \left(\frac{k}{2\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right)^2, \quad i=\overline{1,3}.$$

Подставляя найденные управления в (3), получаем

$$V^{\delta}(\{1,2,3\}) = \frac{3k^2}{2\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 3\sum_{i=1}^{3} d_i \left(\frac{k}{2\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right)^2 = \frac{3k^2}{4\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}.$$

Для одноэлементрых коалиций находим стратегии из равновесия по Нэшу:

$$\begin{cases} \max\limits_{e_1} u_1(e_1,e_2,e_3) \\ \max\limits_{e_2} u_2(e_1,e_2,e_3) \\ \max\limits_{e_3} u_3(e_1,e_2,e_3). \end{cases}$$

Аналогично, считаем частные производные по e_i и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i} = 0, \quad i=\overline{1,3},$$

т. е.

$$\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i} = \frac{k}{2\sqrt{e}_i} - d_i = 0,$$

отсюда

$$e_i = \left(\frac{k}{2d_i}\right)^2.$$

Характеристическая функция для двухэлементной коалиции $\{2,3\}$:

$$V^{\delta}(\{2,3\}) = \max_{\substack{e_2,e_3 \\ e_1=e_1^{NE}}} (u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3)), \quad e_1^{NE} = \left(\frac{k}{2d_1}\right)^2,$$

тогда

$$V^{\delta}(\{2,3\}) = k(\sqrt{e}_2 + \sqrt{e}_3)) - (d_2 + d_3)(e_1^{NE} + e_2 + e_3). \tag{4}$$

Находим e_2 и e_3 из условий:

$$\frac{\partial(u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3))}{\partial e_2} = 0,$$

$$\frac{\partial(u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3))}{\partial e_3} = 0.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial(u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3))}{\partial e_2} = \frac{k}{2\sqrt{e}_2} - (d_2 + d_3) = 0,$$

$$\frac{\partial(u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3))}{\partial e_3} = \frac{k}{2\sqrt{e}_3} - (d_2 + d_3) = 0.$$

Следовательно,

$$e_2 = e_3 = \left(\frac{k}{2(d_2 + d_3)}\right)^2.$$

Для того, чтобы управления находились в области допустимых значений, введем дополнительное требование на параметры модели. Ограничение на управление для коалиции $\{1,2,3\}$:

$$0 \leqslant \left(\frac{k}{2\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right)^2 \leqslant k,$$

следовательно $\left(\frac{k}{2\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right)^2 \geqslant 0$, т. к. $k \geqslant 0$ и $d_i \geqslant 0$, и $\left(\frac{k}{2\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right)^2 \leqslant k$, при $k \leqslant \left(2\sum\limits_{i=1}^{3} d_i\right)^2$.

Соответственно для одноэлементной коалиции, например $\{1\}$, имеем:

$$0 \leqslant \left(\frac{k}{2d_1}\right)^2 \leqslant k,$$

откуда следует, что $\left(\frac{k}{2d_1}\right)^2 \geqslant 0$, т. к. $k \geqslant 0, \quad d_1 \geqslant 0$, и $\left(\frac{k}{2d_1}\right)^2 \leqslant k$, при $k \leqslant (2d_1)^2$.

Аналогично, для коалиции из двух игроков, например $\{2,3\}$, получаем:

$$0 \leqslant \left(\frac{k}{2(d_2+d_3)}\right)^2 \leqslant k,$$

следовательно

$$\left(\frac{k}{2(d_2+d_3)}\right)^2 \geqslant 0,$$

и

$$\left(\frac{k}{2(d_2+d_3)}\right)^2 \leqslant k,$$

при $k \leqslant (2(d_2+d_3))^2$.

Однако для коалиций $\{2,3\}$ и $\{1\}$, при ограничениях $k > 4(d_2+d_3)^2$, $k > 4d_1^2$ соответственно, e_i выходят за пределы компакта. Следовательно, оптимальные управления стоит искать на границах. Выразим d_i из полученных неравенств

$$d_1 < \frac{\sqrt{k}}{2}, \quad d_2 + d_3 < \frac{\sqrt{k}}{2} \tag{5}$$

Очевидно, для одноэлементной коалиции максимум достигается при $e_i = 0$, а для двухэлементной при $e_i = k$, т. к. при подстановке управления в (4), получаем $2k(\sqrt{k} - (d_2+d_3)) \geqslant 0$, при $d_2 + d_3 \leqslant \sqrt{k}$, что удовлетворяет неравенству из (5).

Найдем значения характеристической функции для коалиций $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$ с учетом полученных ограничений и управлений, и проверим выполнения супераддитивности:

$$V(\{1\}) = 0, \quad e_1 = 0,$$

$$V(\{2,3\} = 2k(\sqrt{k} - (d_2 + d_3)), \quad e_2 = e_3 = k,$$

$$V(\{1,2,3\}) = \frac{3k^2}{4\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}, \quad e_i = \left(\frac{k}{2\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right)^2, \quad i = \overline{1,3}$$

Проверим выполнение неравенства $V^\delta(\{1\})+V^\zeta(\{2,3\}) \leqslant V^\delta(\{1,2,3\})$ (для других коалиций проверка выполняется аналогично циклической перестановкой индексов).

$$\frac{3k^2}{4\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 2k(\sqrt{k} - (d_2 + d_3)) \geqslant 0,$$

получаем

$$3k - 8\sum_{i=1}^{3} d_i\sqrt{k} + 8\sum_{i=1}^{3} d_i(d_2 + d_3) \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть $t = \sqrt{k}$, тогда

$$3t^2 - 8\sum_{i=1}^{3} d_i t + 8\sum_{i=1}^{3} d_i(d_2 + d_3) \geqslant 0.$$

Дискриминант $D = 32\sum\limits_{i=1}^{3} d_i(2d_1 - d_2 - d_3)$, тогда при $D \leqslant 0$ неравенство выполняется, следовательно δ – характеристическая функция супераддитивна.

Рассмотрим случай, когда $D > 0$, т. е. $d_1 > \frac{d_2+d_3}{2}$. Получили два корня

$$k_1 = \frac{4}{9}\left(2\sum_{i=1}^{3} d_i + \sqrt{2\sum_{i=1}^{3} d_i(2d_1 - d_2 - d_3)}\right)^2,$$

$$k_2 = \frac{4}{9}\left(2\sum_{i=1}^{3} d_i - \sqrt{2\sum_{i=1}^{3} d_i(2d_1 - d_2 - d_3)}\right)^2.$$

Пусть $k_2 < k_3 < k_1$, допустим

$$k_3 = \frac{4}{9}\left(\left(2\sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{3} d_i(2d_1 - d_2 - d_3)\right) = \frac{8}{9}\sum_{i=1}^{3} d_i(4d_1 + d_2 + d_3),$$

при ограничениях $k_3 \leqslant 4\left(\sum\limits_{i=1}^{3} d_i\right)^2$, $d_1 < \frac{\sqrt{k}}{2}$, $d_2 + d_3 < \frac{\sqrt{k}}{2}$, $d_1 > \frac{d_2+d_3}{2}$. Нетрудно убедиться в том, что k_3 удовлетворяет данным ограничениям. Тогда подставим k_3 в неравенство (6) и проверим выполнение условия супераддитивности:

$$\frac{24}{9}\sum_{i=1}^{3} d_i(4d_1+d_2+d_3) - \frac{8}{3}\sum_{i=1}^{3} d_i\sqrt{8\sum_{i=1}^{3} d_i(4d_1 + d_2 + d_3) + 8\sum_{i=1}^{3} d_i(d_2+d_3)} \geqslant 0.$$

В ходе преобразований приходим к неравенству:

$$-2d_1 + d_2 + d_3 \geqslant 0,$$

следовательно

$$d_1 \leqslant \frac{d_2 + d_3}{2}.$$

По условию задачи данное неравенство не удовлетворяет ограничению $d_1 > \frac{d_2+d_3}{2}$. В таком случае, неравенство (6) не выполняется, следовательно, δ – характеристическая функция не супераддитивна для данного пример.

Полученные выводы можно легко проверить при наборе параметров, удовлетворяющих ограничениям, например, пусть $d_2 = 2, d_3 = 4, d_1 = 4$, $k = \frac{1760}{9}$.

2.4. Пример с квадратичной функцией полезности

Рассмотрим *Пример 1* из раздела 1.3., тогда δ–характеристическая функция имеет вид:

$$V^{\delta}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max\limits_{\substack{e_i, i\in S \\ e_j = e_j^{NE},\ j\in N\setminus S}} \sum\limits_{i\in S} \left(ke_i - \frac{1}{2}e_i^2 - d_i\hat{e}\right), & S \subset N, \\ \max\limits_{e_i, i\in N} \sum\limits_{i\in N} \left(ke_i - \frac{1}{2}e_i^2 - d_i\hat{e}\right), & S = N. \end{cases} \tag{7}$$

Для того, чтобы управления из (7) находились в области допустимых значений, необходимо было ввести дополнительные требования на параметры модели:

$$k \geqslant \sum_{i=1}^{3} d_i, \quad \sum_{i=1}^{3} d_i \geqslant 0.$$

Найдены значения характеристической функции для всех возможных коалиций (см. приложение 3):

$$V^{\delta}(N) = V^{\alpha}(N) = \frac{3}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2, \quad \bar{e}_i = k - \sum_{i=1}^{3} d_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

$$V^{\delta}(\{1\}) = \frac{1}{2}k^2 - 3kd_1 + \frac{1}{2}d_1^2 + d_1(d_2 + d_3),$$

$$V^{\delta}(\{2\}) = \frac{1}{2}k^2 - 3kd_2 + \frac{1}{2}d_2^2 + d_2(d_1 + d_3),$$

$$V^{\delta}(\{3\}) = \frac{1}{2}k^2 - 3kd_3 + \frac{1}{2}d_3^2 + d_2(d_1 + d_2),$$

$$V^{\delta}(\{2,3\}) = k^2 - (d_2 + d_3)(3k - d_1),$$

$$V^{\delta}(\{1,3\}) = k^2 - (d_1 + d_3)(3k - d_2),$$

$$V^{\delta}(\{1,2\}) = k^2 - (d_1 + d_2)(3k - d_3).$$

В приложении 2 доказано свойство супераддитивности δ–характеристической функции для данного примера.

2.5. Пример с логарифмической функцией полезности

Рассмотрим *Пример 3*. Пусть при $n = 3,\ u_i = f_i(e_i) - d_i(\hat{e})$, $f_i(e_i) = k\ln(e_i + 1),\ d_i(\hat{e}) = d_i\hat{e}$, где $\hat{e} = e_1 + e_2 + e_3$. Тогда

$$V^\delta(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max\limits_{\substack{e_i, i\in S \\ e_j = e_j^{NE},\ j\in N\setminus S}} \sum\limits_{i\in S} (k\ln(e_i+1) - d_i\hat{e}), & S \subset N, \\ \max\limits_{e_i, i\in N} \sum\limits_{i\in N} (k\ln(e_i+1) - d_i\hat{e}), & S = N. \end{cases}$$

Для того, чтобы управления находились в области допустимых значений, введем дополнительное требование на параметры модели:

$$\sum_{i=1}^{3} d_i \geqslant \frac{k}{k+1},$$

при $k > 0$.

Гранд-коалиция имеет вид

$$V^\delta(\{1,2,3\}) = 3k\ln\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 3\sum_{i=1}^{3} d_i \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1\right), \quad \bar{e}_i = \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1, \quad i = \overline{1,3}.$$

Характеристическая функция для одноэлементных коалиций

$$V^\delta(\{i\}) = k\ln\left(\frac{k}{d_i}\right) - d_i\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{k}{d_j} - 1\right).$$

Соответственно для различных коалиций из двух игроков имеем

$$V^\delta(\{2,3\}) = 2k\ln\left(\frac{k}{d_2+d_3}\right) - (d_2+d_3)\left(\frac{k}{d_1} + \frac{2k}{d_2+d_3} - 3\right),$$

$$V^\delta(\{1,3\}) = 2k\ln\left(\frac{k}{d_1+d_3}\right) - (d_1+d_3)\left(\frac{k}{d_2} + \frac{2k}{d_1+d_3} - 3\right),$$

$$V^\delta(\{1,2\}) = 2k\ln\left(\frac{k}{d_1+d_2}\right) - (d_1+d_2)\left(\frac{k}{d_3} + \frac{2k}{d_1+d_2} - 3\right).$$

Было проверено выполнение условия супераддитивности (см. приложение 2).

3 ζ – характеристическая функция

3.1. Определение

Рассмотрим задачу максимизации суммы выигрышей игроков. Пусть $\bar{e}$ — управления, доставляющие максимум $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(e_1, \ldots, e_n)$. Характеристическая функция $V^{\zeta}(S)$ как сила коалиции S, $S \subset N$, может быть вычислена следующим образом: игроки из S используют стратегии $\bar{e}_S = \{\bar{e}_i\}_{i \in S}$ из оптимального n – набора $\bar{e}$, в то время как оставшиеся игроки из множества $N \backslash S$ минимизируют выигрыш $\sum\limits_{i \in S} u_i$ коалиции S.

$$V^{\zeta}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \inf\limits_{\substack{e_j, j \in N \backslash S \\ e_i = \bar{e}_i,\ i \in S}} \sum\limits_{i \in S} u_i(\bar{e}_S, e_{N \backslash S}), & S \subset N, \\ \max\limits_{\substack{e_1, \ldots, e_n, \\ e_i, i \in S}} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(e_1, \ldots, e_n), & S = N. \end{cases}$$

Преимущества:

- удовлетворяет свойству супераддитивности в общем случае, в отличие от δ–характеристической функции;
- процесс вычисления значительно проще, чем у стандартной характеристической функции Неймана – Моргенштерна;
- оптимальные управления всегда существуют и могут быть вычислены для широкого класса игр, не требуя значительных ограничений, таких как, например, существование и единственность равновесия по Нэшу.

3.2. Супераддитивность

Утверждение: $V^{\zeta}(S)$, построенная согласно (1), является супераддитивной характеристической функцией, т.е.:

$$V(S_1 \cup S_2) \geq V(S_1) + V(S_2), \quad \forall S_1, S_2 \subseteq N,\ S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

Док-во:

$$V(S_1 \cup S_2) = \min_{\substack{e_j,\, j \in N \setminus (S_1 \cup S_2) \\ e_i = \overline{e}_i,\, i \in (S_1 \cup S_2)}} \sum_{i \in (S_1 \cup S_2)} u_i(e) =$$

$$= \min_{\substack{e_j,\, j \in N \setminus (S_1 \cup S_2) \\ e_i = \overline{e}_i,\, i \in (S_1 \cup S_2)}} \left(\sum_{i \in S_1} u_i(e) + \sum_{i \in S_2} u_i(e) \right).$$

Так как сумма минимумов не превосходит минимум суммы, имеем

$$V(S_1 \cup S_2) \geq \min_{\substack{e_j,\, j \in N \setminus (S_1 \cup S_2) \\ e_i = \overline{e}_i,\, i \in (S_1 \cup S_2)}} \left(\sum_{i \in S_1} u_i(e) \right) + \min_{\substack{e_j,\, j \in N \setminus (S_1 \cup S_2) \\ e_i = \overline{e}_i,\, i \in (S_1 \cup S_2)}} \left(\sum_{i \in S_2} u_i(e) \right).$$

Поскольку минимум сначала берется по меньшему множеству, получаем

$$V(S_1 \cup S_2) \geq \min_{\substack{e_j,\, j \in N \setminus S_1 \\ e_i = \overline{e}_i,\, i \in S_1}} \left(\sum_{i \in S_1} u_i(e) \right) + \min_{\substack{e_j,\, j \in N \setminus S_2 \\ e_i = \overline{e}_i,\, i \in S_2}} \left(\sum_{i \in S_2} u_i(e) \right) =$$
$$= V(S_1) + V(S_2),$$

что и требовалось доказать.

3.3. Пример с квадратичной функцией полезности

Рассмотрим *Пример 1* из раздела (1.3.), тогда ζ – характеристическая функция может быть вычислена следующим образом:

$$V^{\zeta}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \min\limits_{\substack{e_i, i \in N \setminus S \\ e_j = \overline{e}_j,\ j \in S}} \sum\limits_{i \in S} \left(ke_i - \frac{1}{2} - d_i \hat{e} \right), & S \subset N, \\ \max\limits_{e_i, i \in N} \sum\limits_{i \in N} \left(ke_i - \frac{1}{2} - d_i \hat{e} \right), & S = N. \end{cases} \tag{8}$$

Из условий допустимости были введены дополнительные требования на параметры модели:

$$k \geqslant \sum_{i=1}^{3} d_i, \quad \sum_{i=1}^{3} d_i \geqslant 0.$$

Аналогично характеристическим функциям δ и α получаем:

$$V^{\zeta}(N) = V^{\delta}(N) = V^{\alpha}(N) = \frac{3}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2, \quad \bar{e}_i = k - \sum_{i=1}^{3} d_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

Также найдены характеристические функций для одноэлементных и двухэлементных коалиций, согласно (8):

$$V^{\zeta}(\{i\}) = k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \frac{1}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - d_i\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right), \quad i = \overline{1,3},$$

$$V^{\zeta}(\{2,3\}) = 2k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - (d_2 + d_3)\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right),$$

$$V^{\zeta}(\{1,3\}) = 2k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - (d_1 + d_3)\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right),$$

$$V^{\zeta}(\{1,2\}) = 2k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - (d_1 + d_2)\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right).$$

Проверено выполнение свойства супераддитивности построенной характеристической функции (см. приложение 3).

3.4. Пример с логарифмической функцией полезности

Рассмотрим *Пример 2* из раздела (2.5.), тогда характеристическая функция имеет вид:

$$V^{\zeta}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \min\limits_{\substack{e_i, i \in N \setminus S \\ e_j = \bar{e}_j,\ j \in S}} \sum\limits_{i \in S} (k \ln(e_i + 1) - d_i \hat{e}), & S \subset N, \\ \max\limits_{e_i, i \in N} \sum\limits_{i \in N} (k \ln(e_i + 1) - d_i \hat{e}), & S = N. \end{cases} \tag{9}$$

Для того, чтобы управления находились в области допустимых значений, введем дополнительное требование на параметры модели:

$$\sum_{i=1}^{3} d_i \geqslant \frac{k}{k+1},$$

при $k > 0$.

Значение характеристической функции для гранд-коалиции получаем аналогично как в примере с δ–характеристической функцией:

$$V^{\zeta}(\{1,2,3\}) = 3k \ln \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 3\sum_{i=1}^{3} d_i \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1 \right), \quad \bar{e}_i = \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1, \quad i = \overline{1,3}.$$

Согласно (9) для одноэлементных коалиций получаем

$$V^{\zeta}(\{i\}) = k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - d_i \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1 + 2k \right).$$

Для коалиций, состоящих из двух игроков, имеем

$$V^{\zeta}(\{2,3\}) = 2k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - (d_2 + d_3) \left(k - 2 + \frac{2k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right),$$

$$V^{\zeta}(\{1,3\}) = 2k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - (d_1 + d_3) \left(k - 2 + \frac{2k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right),$$

$$V^{\zeta}(\{1,2\}) = 2k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - (d_1 + d_2) \left(k - 2 + \frac{2k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right).$$

ζ–характеристическая функция удовлетворяет свойству супераддитивности, доказательство (см. приложение 3).

3.5. Кооперативная игра управления вредными выбросами на примере предприятий Иркутской области

Загрязнение атмосферы в городах и поселках области является следствием выбросов веществ от предприятий теплоэнергетики, нефтехимической, угольной, деревообрабатывающей промышленности, автотранспорта и т. д.. Изучив различные рейтинги городов России и крупных компаний по объему выбросов в воздух загрязняющих веществ, наибольший интерес вызвало экологическое положение в Иркутской области [14]. Принцип данного выбора основан на сведениях, полученных из государственного доклада Министерства природы РФ, в котором отмечается, что ОАО "Иркутскэнерго" , ОАО "Братский алюминиевый завод" и ОАО "Ангарский нефтехимический комбинат" суммарно выбрасывают в атмосферный воздух около 73,8% всего объема загрязняющих веществ от стационарных источников в области [15].

Причиной увеличения выбросов загрязняющих веществ энергетической компании ОАО "Иркутскэнерго"явилось применение топлива худшего качества. На увеличение выбросов компании ОАО "АНХК"повлиял рост объемов переработки нефти и расхода топлива на технологические нужды. Однако в результате выполнения природоохранных мероприятий и повышения технологической дисциплины валовые выбросы загрязняющих веществ в атмосферный воздух снизились на предприятии цветной металлургии – ОАО "Братский алюминиевый завод" [16].

Данные по чистой прибыли каждой из компаний и загрязнению атмосферы соответствуют положению на 2004 год (см. таблицу 1). Для полной картины понимания проблемы загрязнения рассмотренной области приведем данные за 2012 год, согласно которым, Ангарск входит в десятку самых загрязненных городов России. Зафиксировано 278,5 тысяч тонн выбросов, причем доля автомобилей составляет всего 4,6%. ОАО "Иркутскэнерго" принадлежат ТЭЦ, оказывающие огромное влияние на загрязнение окружающей среды в Ангарске. Братск находится на 18 месте в рейтинге по объему выбросов в атмосферу загрязняющих веществ среди 100 городов России. Всего зафиксировано выбросов в 134,9 тысячи тонны с долей автомобильных выбросов в 11,2%.

Рассмотрим практический пример решения кооперативной игры управления вредными выбросами в Иркутской области при $n = 3$, где в качетсве игроков выступают данные компании, которые являются основными источниками загрязнения области. Пусть функция полезности имеет рассмотренный ранее вид $u_i = f_i(e_i) - d_i(\widehat{e}), \quad f_i(e_i) = k_i e_i - \frac{1}{2}e_i^2, \quad d_i(\widehat{e}) = d_i\widehat{e}$, где $\widehat{e} = e_1 + e_2 + e_3$, где $k_i \geqslant 0$ — коэффициент, равный отношению общего дохода от производства i-ой компанией (P_i) к объему общего загрязнения соответствующей компании (V_i), $d_i \geqslant 0$ — величина налога (штраф), который зависит от суммарного загрязнения $\widehat{e}$. По данным о компаниях (см. таблицу 1) были найдены коэффициенты k_i. Для вычисления штрафов понадобились следующие сведения: какие вредные вещества производят компании и в каком количестве, а также величина налога за ущерб от загрязнения окружающей среды.

Основные выбросы от ТЭЦ — это твердые частицы, оксиды азота, серы и углерода. Известно, что оксид углерода (угарный газ) является чрезвычайно сильным отравляющим газом. Для нефтехимических заводов характерны выбросы в виде продуктов сгорания углеводородов, содержащие также оксид углерода, диоксид серы и оксиды азота. Для алюминиевых заводов помимо различных фтористых соединений, существенным является огромные выбросы твердых отходов и углеводородов.

В таблице 2 приведены данные по общему воздействию загрязняющих веществ от стационарных источников. Пусть в данной задаче рассматриваемые три компании будут нести штраф за все суммарные загрязнения, т. к. известно, что они являются основными источниками загрязнения области. На основе полученных сведений о воздействии на окружающую среду различных вредных веществ и рассмотрения нормативов платы за выбросы в атмосферный воздух загрязняющих веществ стационарными источниками от 12 июня 2003 года (см. таблицу 2) и неизменные в 2005 году [17], были получены коэффициенты, определяющие штраф для каждой компании (см. приложение 4).

Таблица 1: Данные о компаниях

Компания	P_i (млн. руб)	V_i (тыс. т)
Иркутскэнерго	900	182,5
Братский алюм. завод	872,4	54,3
Ангарский нефтехим. комб.	1290,7	33,6

Таблица 2: Воздействие на окружающую среду в 2004 г.

Показатель	Объемы выбросов (тыс. т)	Плата за выбросы (руб)
Жид. и газообр. вещ-ва	357,68	5
Тв. вещ-ва	130,04	13,7
Диоксид серы	133,26	21
Оксид углерода	114,37	0,6
Оксид азота	66,39	35
Углеводороды	1,14	5
Прочее	4,81	10

Таблица 3: Значения коэффициентов

Компания	k_i	d_i
Иркутскэнерго	4931,5068	20,69
Братский алюм. завод	16066,2983	7,84
Ангарский нефтехим. комб.	380675	3,82

На основании данных таблицы 1 и таблицы 2 были получены следующие результаты, представленные в таблице 3. Программный код вычисления рассмотренного примера представлен в приложении 4.

Таблица 4: Значения характеристических функций для различных коалиций

Коалиция	V^{α}	V^{δ}	V^{ζ}
$\{1\}$	10930727,55	10930968,68	10930659,65
$\{2\}$	128597393,55	128597585,63	128597093,21
$\{3\}$	737579079,13	737579188,01	737578672,17
$\{1,2\}$	139528690,23	139528799,11	139528675,66
$\{1,3\}$	748510185,99	748510378,06	748510124,57
$\{2,3\}$	866176570,49	866176811,63	866176142,32
$\{1,2,3\}$	877108517,52	877108517,52	877108517,52

Исход игры описывается так называемым дележом — это 3–мерный вектор, удовлетворяющий свойствам индивидуальной и коллективной рациональности [10]. В качестве принципа оптимальности распределения выигрыша между игроками используем вектор Шепли, вычисляемый по следующим формулам:

$$Sh(V)_1 = \frac{1}{3}V(\{1\}) + \frac{1}{6}(V(\{1,2\} - V(\{2\})) + \frac{1}{6}(V(\{1,3\} - V(\{3\}))+$$
$$\frac{1}{3}(V(\{1,2,3\} - V(\{2,3\})),$$

$$Sh(V)_2 = \frac{1}{3}V(\{2\}) + \frac{1}{6}(V(\{1,2\} - V(\{1\})) + \frac{1}{6}(V(\{2,3\} - V(\{3\}))+$$
$$\frac{1}{3}(V(\{1,2,3\} - V(\{1,3\})),$$
$$Sh(V)_3 = \frac{1}{3}V(\{3\}) + \frac{1}{6}(V(\{1,3\} - V(\{1\})) + \frac{1}{6}(V(\{2,3\} - V(\{2\}))+$$
$$\frac{1}{3}(V(\{1,2,3\} - V(\{1,2\})).$$

Сравним значение его компонент с выигрышами игроков, полученными в равновесии по Нэшу:

Таблица 5: Значения α – характеристической функции и вектора Шепли

Игрок	V^{α}	Sh
$\{1\}$	10930727,55	10931292,12
$\{2\}$	128597393,55	128597817,37
$\{3\}$	737579079,13	737579408,04

Таблица 6: Значения δ – характеристической функции и вектора Шепли

Игрок	V^{δ}	Sh
$\{1\}$	10930968,68	10931378,09
$\{2\}$	128597585,63	128597817,37
$\{3\}$	737579188,01	737579408,04

Таблица 7: Значения ζ – характеристической функции и вектора Шепли

Игрок	V^{ζ}	Sh
$\{1\}$	10930659,65	10931517,43
$\{2\}$	128597093,21	128597743,08
$\{3\}$	737578672,17	737579257,01

Очевидно, что должно выполняться свойство индивидуальной рациональности, а именно $Sh(V)_i \geqslant V(i)$, что непосредственно подтверждается данными из таблиц 5–7. Выполнение данного свойства побуждает игроков кооперироваться с целью уменьшения затрат на устранение ущерба от суммарного загрязнения, т. е. для максимизации прибыли.

Выводы

В данной работе исследована модель игры с отрицательными связями с использованием α, δ, ζ – характеристических функций. Изученные подходы были применены для нахождения оптимального кооперативного решения в одной игре управления вредными выбросами на основе реальных данных для предприятий Иркутской области.

В ВКР были выявлены недостатки подхода, описанного в построении δ–характеристической функции, а именно, при доказательстве супераддитивности данной функции не учитывались ограничения на управления игроков. Было получено, что для некоторых конкретных примеров с ограничениями на управление, δ–характеристическая функция оказалась супераддитивной, однако для функции полезности, в качестве которой была использована функция квадратного корня от управления, свойство супераддитивности не выполняется. Последнее дает право утверждать, что предположение о супераддитивности δ–характеристической функции для так называемых игр с отрицательными связями [4] не доказано в общем случае.

Также в работе описана и исследована новая характеристическая функция, для которой было адаптировано доказательство супераддитивности в статической постановке игры.

Заключение

Как известно, теория игр осуществляет решение многих экономических задач, связанных с экологическими проблемами. Исследованная в данной работе модель игры с отрицательными связями [4] может быть использована для решения задач управления вредными выбросами. Важно рассмотреть кооперативный вариант игры, что соответствует совместным действиям игроков (стран-участниц), с целью уменьшения суммарного объема загрязнения.

Была решена задача (управления вредными выбросами) для различных видов функций полезности: квадратичной, логарифмической и функции квадратного корня. Найдены оптимальные управления (стратегии) игроков, и проверено выполнение свойства супераддитивности рассмотренных характеристических функций. В качестве наглядного примера изучены данные по загрязнению окружающей среды Иркутской области. Теоретическим вкладом данной работы являются следующие результаты. Найдены недостатки в доказательстве супераддитивности δ–характеристической функции в работе [4]. В разделе 2.3. приведен контрпример. Адаптировано определение ζ–характеристической функции для игр с отрицательными связями и доказана ее супераддитивность в общем случае.

Актуальность данной работы объясняется значительным интересом к кооперативным моделям поведения игроков, особенно в области природоохранного менеджмента.

Список литературы

[1] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр СПб.: БХВ-Петербург, 2012, 426 с.

[2] Мазалов В. В.Математическая теория игр и ее приложения. СПб.: «Лань», 2010.

[3] Chander P. The gamma–cor and coalition formation // International Journal of Game Theory. 2007. V. 35. P. 539–556.

[4] Reddy P. V., Zaccour G. A friendly computable characteristic function. Mathematical Social Sciences. 2016

[5] РБК Парижское соглашение об изменении климата // URL: http://www.rbc.ru/rbcfreenews/571701529a794758f55d3d90 (дата обращения: 20.04.2016).

[6] Petrosjan L., Zaccour G. Time–consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // J. of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27, no. 3. P. 381–398.

[7] Петросян Л. А., Громова Е. В. Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, вып. 3 С. 193–203.

[8] Chander P., Tulkens H. The core of an economy with multilateral environmental externalities. International Journal of Game Theory 26. 1997. P. 379–401.

[9] Eyckmans J., Finus M. An almost ideal sharing scheme for coalition games

with externalities. Working Paper Series 2004–14. Center for Economic Studies, K.U. Leuven.

[10] Воробьев Н. Н.Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: «Наука», 1985.

[11] Печерский С. Л., Яновская Е. Б. Кооперативные игры: решения и аксиомы. СПб.: Изд-во Европ. универс., 2004.

[12] von Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1953.

[13] Петросян Л. А., Данилов Н. А. Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами // Вестник ЛГУ. 1979. №1. С. 46–54.

[14] РБК Рейтинг компаний по степени загрязнения окружающей среды // URL: http://rating.rbc.ru/article.shtml?2006/01/25/4627399 (дата обращения: 26.02.2016).

[15] Ангарск попал в ТОП-10 самых загрязненных городов России // URL:http://irkutskmedia.ru/news/oblast/13.08.2013/295648/angarsk-popal-v-top-10-samih-zagryaznennih-gorodov-rossii.html (дата обращения 18.03.2016)

[16] Национальный портал Природа России: URL:http:// www.priroda.ru (дата обращения: 2.03.2016).

[17] Нормативы платы за выбросы в атмосферный воздух загрязняющих веществ стационарными источниками // URL: http://base.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc;base=LAW;n=172885 (дата обращения: 20.03.2016).

Приложения

3.6. Приложение 1. Доказательство супераддитивности α – характеристической функции для *Примера 1*

Найдем значение характеристической функции для всех возможных коалиций.

$$V^{\alpha}(\{1,2,3\}) = \max_{e_1,e_2,e_3} \sum_{i=1}^{3} u_i(e_1,e_2,e_3) =$$
$$= \max_{e_1,e_2,e_3} \left(k\sum_{i=1}^{3} e_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} e_i^2 - \sum_{i=1}^{3} d_i \sum_{i=1}^{3} e_i \right). \tag{10}$$

Для нахождения максимума функции, считаем частные производные $\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i}, \quad i=\overline{1,3}$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i} = k - e_i - (d_1+d_2+d_3) = 0.$$

Следовательно, максимизирующие управления имеют вид:

$$\bar{e}_i = k - \sum_{i=1}^{3} d_i, \quad i=\overline{1,3}.$$

Подставляя $\bar{e}_i$ в (10), получаем

$$V^{\alpha}(\{1,2,3\}) = \max_{e_i, i=\overline{1,3}} \sum_{i=1}^{3} u_i(e_1,e_2,e_3) = \frac{3}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2.$$

Характеристическая функция для одноэлементной коалиции, например $\{1\}$:

$$V^{\alpha}(\{1\}) = \max_{e_1}\min_{e_2,e_3} u_1(e_1,e_2,e_3) = \max_{e_1}\min_{e_2,e_3}\left(ke_1 - \frac{1}{2}e_1^2 - d_1\sum_{i=1}^{3} e_i\right).$$

Очевидно, что минимум достигается при $e_2 = e_3 = k$.

Находим e_1 из условия $\frac{\partial u_1(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_1} = 0$:

$$\frac{\partial u_1(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_1} = k - e_1 - d_1 = 0.$$

Следовательно, $e_1 = k - d_1$.

Получаем

$$V^{\alpha}(\{1\}) = k(k-d_1) - \frac{1}{2}(k-d_1)^2 - d_1(3k-d_1).$$

Аналогично,

$$V^{\alpha}(\{2\}) = k(k-d_2) - \frac{1}{2}(k-d_2)^2 - d_2(3k-d_2),$$
$$V^{\alpha}(\{3\}) = k(k-d_3) - \frac{1}{2}(k-d_3)^2 - d_3(3k-d_3).$$

Характеристическая функция для двухэлементной коалиции:

$$V^{\alpha}(\{2,3\}) = \max_{e_2,e_3} \min_{e_1}(u_2(e_1,e_2,e_3) + u_3(e_1,e_2,e_3)) =$$
$$= \max_{e_2,e_3} \min_{e_1} \left(k(e_2+e_3) - \frac{1}{2}(e_2^2+e_3^2) - (d_2+d_3)\sum_{i=1}^{3} e_i \right).$$

Ясно, что функция достигает минимума при $e_1 = k$. Вычисляем производные $\frac{\partial u_2(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_2}$, $\frac{\partial u_3(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_3}$ и находим e_2 и e_3, доставляющие максимум функции:

$$\frac{\partial u_2(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_2} = k - e_2 - (d_2+d_3) = 0,$$
$$\frac{\partial u_3(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_3} = k - e_3 - (d_2+d_3) = 0.$$

Следовательно, $e_2 = e_3 = k - (d_2+d_3)$.

$V^{\alpha}(\{2,3\}) = 2k(k-(d_2+d_3)) - (k-(d_2+d_3))^2 - (d_2+d_3)(3k-(d_2+d_3))$,

$V^{\alpha}(\{1,3\}) = 2k(k-(d_1+d_3)) - (k-(d_1+d_3))^2 - (d_1+d_3)(3k-(d_1+d_3))$,

$V^{\alpha}(\{1,2\}) = 2k(k-(d_1+d_2)) - (k-(d_1+d_2))^2 - (d_1+d_2)(3k-(d_1+d_2))$.

Проверим условие супераддитивности. Покажем выполнение неравенства $V^{\delta}(\{1\}) + V^{\zeta}(\{2,3\}) \leq V^{\delta}(\{1,2,3\})$ (для других коалиций проверка выполняется аналогично циклической перестановкой индексов):

$$k(k-d_1) - \frac{1}{2}(k-d_1)^2 - d_1(3k-d_1) + 2k(k-(d_2+d_3)) -$$

$$-(k-(d_2+d_3))^2-(d_2+d_3)(3k-(d_2+d_3)) \leqslant \frac{3}{2}\left(k-\sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2$$

Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{1}{2}(k-d_1)(k+d_1)-3kd_1+d_1^2+k^2-3k(d_2+d_3) \leqslant \frac{3}{2}\left(k-\sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2.$$

Отсюда

$$\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}d_1^2-3k\sum_{i=1}^{3} d_i \leqslant \frac{3}{2}k^2+\frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2-3k\sum_{i=1}^{3} d_i$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{2}d_1^2-\frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 \leqslant 0,$$

при $d_i \geqslant 0$. Следовательно, α–характеристическая функция супераддитивна.

3.7. Приложение 2. Доказательство супераддитивности δ – характеристической функции для примеров

3.7..1 *Пример 1*

Известно, что

$$V^\delta(\{1,2,3\}) = V^\alpha(\{1,2,3\}) = \frac{3}{2}\left(k-\sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2, \quad \bar{e}_i = k-\sum_{i=1}^{3} d_i, \quad i=\overline{1,3}.$$

Далее из системы

$$\begin{cases} \max\limits_{e_1} u_1(e_1,e_2,e_3) \\ \max\limits_{e_2} u_2(e_1,e_2,e_3) \\ \max\limits_{e_3} u_3(e_1,e_2,e_3) \end{cases}$$

находим равновесные по Нэшу стратегии.

Для этого считаем частные производные $\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i}$, $\quad i=\overline{1,3}$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i} = k-e_i-d_i = 0,$$

отсюда получаем, что

$$e_i^{NE} = k - d_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

$$u_i^{NE} = k(k - d_i) - \frac{1}{2}(k - d_i)^2 - d_i \left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)$$

и $V^\delta(\{i\}) = u_i^{Nash}$, следовательно

$$V^\delta(\{1\}) = \frac{1}{2}k^2 - 3kd_1 + \frac{1}{2}d_1^2 + d_1(d_2 + d_3).$$

Аналогично,

$$V^\delta(\{2\}) = \frac{1}{2}k^2 - 3kd_2 + \frac{1}{2}d_2^2 + d_2(d_1 + d_3),$$

$$V^\delta(\{3\}) = \frac{1}{2}k^2 - 3kd_3 + \frac{1}{2}d_3^2 + d_2(d_1 + d_2).$$

Вычисляем характеристическую функцию для двухэлементных коалиций, возьмем, например для $\{2,3\}$, тогда:

$$V^\delta(\{2,3\}) = \max_{\substack{e_2, e_3 \\ e_1 = e_1^{NE}}} (u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3)), \quad e_1^{NE} = k - d_1.$$

Соответственно,

$$V^\delta(\{2,3\}) = k(e_2 + e_3) - \frac{1}{2}(e_2^2 + e_3^2) - (d_2 + d_3)(e_1^{NE} + e_2 + e_3).$$

Далее находим e_2 и e_3 из условий:

$$\frac{\partial((u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + (u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3))}{\partial e_2} = k - e_2 - (d_2 + d_3) = 0,$$

$$\frac{\partial((u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + (u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3))}{\partial e_3} = k - e_3 - (d_2 + d_3) = 0.$$

Получаем, что $e_2 = e_3 = k - (d_2 + d_3)$.

Подставляем полученные управления в функцию:

$$V^\delta(\{2,3\}) = k^2 - (d_2 + d_3)(3k - d_1).$$

Аналогично,

$$V^{\delta}(\{1,3\}) = k^2 - (d_1 + d_3)(3k - d_2),$$

$$V^{\delta}(\{1,2\}) = k^2 - (d_1 + d_2)(3k - d_3).$$

Проверим условие супераддитивности. Покажем выполнение неравенства $V^{\delta}(\{1\}) + V^{\zeta}(\{2,3\}) \leq V^{\delta}(\{1,2,3\})$ (для других коалиций проверка выполняется аналогично циклической перестановкой индексов).

$$\frac{1}{2}k^2 - 3kd_1 + \frac{1}{2}d_1^2 + d_1(d_2 + d_3) + k^2 - (d_2 + d_3)(3k - d_1) \leqslant \frac{3}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2.$$

Тогда

$$\frac{3}{2}k^2 - 3k\sum_{i=1}^{3} d_i + \frac{1}{2}d_1^2 + 2d_1(d_2 + d_3) \leqslant \frac{3}{2}k^2 - 3k\sum_{i=1}^{3} d_i + \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2.$$

Следовательно получаем

$$\frac{1}{2}d_1^2 + 2d_1d_2 + 2d_1d_3 \leqslant \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2,$$

очевидно,

$$-2d_1^2 - 3d_2^2 - 3d_3^2 - 2d_1d_2 - 2d_1d_3 - 6d_2d_3 < 0.$$

Следовательно V^{δ} — супераддитивная характеристическая функция.

3.7..2 ***Пример 3***

$$V^{\delta}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max\limits_{\substack{e_i, i \in S \\ e_j = e_j^{NE},\ j \in N \setminus S}} \sum\limits_{i \in S} (k \ln(e_i + 1) - d_i \hat{e}), & S \subset N, \\ \max\limits_{e_i, i \in N} \sum\limits_{i \in N} (k \ln(e_i + 1) - d_i \hat{e}), & S = N. \end{cases}$$

Получаем:

$$V^{\delta}(\{1,2,3\}) = \max_{e_1,e_2,e_3} \sum_{i=1}^{3} u_i(e_1,e_2,e_3) =$$

$$= \max_{e_1,e_2,e_3} \left(k \sum_{i=1}^{3} \ln(e_i+1) - \sum_{i=1}^{3} d_i \sum_{i=1}^{3} e_i \right).$$

Для нахождения максимума функции, считаем частные производные $\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i}, \quad i=\overline{1,3}$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i} = \frac{k}{e_i+1} - \sum_{i=1}^{3} d_i = 0.$$

Следовательно, максимизирующие управления имеют вид:

$$e_i = \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1, \quad i=\overline{1,3}.$$

Получаем

$$V^{\delta}(\{1,2,3\}) = 3k \ln \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 3 \sum_{i=1}^{3} d_i \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1 \right).$$

Для одноэлементрых коалиций находим равновесные по Нэшу стратегии:

$$\begin{cases} \max\limits_{e_1} u_1(e_1,e_2,e_3) \\ \max\limits_{e_2} u_2(e_1,e_2,e_3) \\ \max\limits_{e_3} u_3(e_1,e_2,e_3). \end{cases}$$

Считаем частные производные по $\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i}, \quad i=\overline{1,3}$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial u_i(e_1,e_2,e_3)}{\partial e_i} = \frac{k}{e_i+1} - d_i = 0$$

Отсюда

$$e_i = \frac{k}{d_i} - 1.$$

Следовательно,

$$u_i^{NE} = k \ln\left(\frac{k}{d_i}\right) - d_i \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{k}{d_i} - 1\right).$$

Известно, что $V^\delta(\{i\}) = u_i^{NE}$, получаем

$$V^\delta(\{1\}) = k \ln\left(\frac{k}{d_1}\right) - d_1 \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{k}{d_i} - 1\right),$$

$$V^\delta(\{2\}) = k \ln\left(\frac{k}{d_2}\right) - d_2 \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{k}{d_i} - 1\right),$$

$$V^\delta(\{3\}) = k \ln\left(\frac{k}{d_3}\right) - d_3 \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{k}{d_i} - 1\right).$$

$V^\delta(\{2,3\}) = \max\limits_{\substack{e_2, e_3 \\ e_1 = e_1^{NE}}} (u_2(e_1^{NE}, e_2, e_3) + u_3(e_1^{NE}, e_2, e_3)), \quad e_1^{NE} = \frac{k}{d_1} - 1,$

тогда

$$V^\delta(\{2,3\}) = k(\ln(e_2+1) + \ln(e_3+1)) - (d_2+d_3)(e_1^{NE} + e_2 + e_3).$$

Для нахождения максимума используем равенство нулю частных производных:

$$\frac{\partial u_2(e_1^{NE} + e_2 + e_3)}{\partial e_2} = 0,$$

$$\frac{\partial u_3(e_1^{NE} + e_2 + e_3)}{\partial e_3} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial u_2(e_1^{NE} + e_2 + e_3)}{\partial e_2} = \frac{k}{e_2+1} - (d_2+d_3) = 0,$$

$$\frac{\partial u_3(e_1^{NE} + e_2 + e_3)}{\partial e_3} = \frac{k}{e_3+1} - (d_2+d_3) = 0.$$

Следовательно,

$$e_2 = e_3 = \frac{k}{d_2+d_3} - 1.$$

Получаем,

$$V^{\delta}(\{2,3\}) = 2k\ln\left(\frac{k}{d_2+d_3}\right) - (d_2+d_3)\left(\frac{k}{d_1} + \frac{2k}{d_2+d_3} - 3\right),$$

$$V^{\delta}(\{1,3\}) = 2k\ln\left(\frac{k}{d_1+d_3}\right) - (d_1+d_3)\left(\frac{k}{d_2} + \frac{2k}{d_1+d_3} - 3\right),$$

$$V^{\delta}(\{1,2\}) = 2k\ln\left(\frac{k}{d_1+d_2}\right) - (d_1+d_2)\left(\frac{k}{d_3} + \frac{2k}{d_1+d_2} - 3\right).$$

Проверим выполнения условия супераддитивности, т. е.

$$V(S_1 \cup S_2) \geqslant V(S_1) + V(S_2), \tag{11}$$

например, для неравенства $V^{\delta}(\{1,2,3\}) \geqslant V^{\delta}(\{1\}) + V^{\zeta}(\{2,3\})$ (для других коалиций проверка выполняется аналогично циклической перестановкой индексов).

Имеем

$$k\ln\left(\frac{k}{d_1}\right) - d_1\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{k}{d_i} - 1\right) + 2k\ln\left(\frac{k}{d_2+d_3}\right) - (d_2+d_3)\left(\frac{k}{d_1} + \frac{2k}{d_2+d_3} - 3\right) \leqslant$$

$$\leqslant 3k\ln\left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right) - 3\sum_{i=1}^{3} d_i\left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1\right).$$

В ходе преобразований приходим к неравенству

$$\ln\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{3} d_i\right)^3}{(d_1+d_2)d_3}\right) \leqslant \frac{d_1+d_2}{d_3} + \frac{d_3}{d_1} + \frac{d_3}{d_2}. \tag{12}$$

Сделаем замену. Пусть

$$d_1 = d,$$

$$d_2 = \alpha d,$$

$$d_3 = \beta d.$$

Тогда получаем

$$\ln\left(\frac{(d+\alpha d+\beta d)^3}{(d+\alpha d)\beta d}\right) \leqslant \frac{d+\alpha d}{\beta d} + \beta + \frac{\beta}{\alpha},$$

следовательно,

$$\ln\left(\frac{(1+\alpha+\beta)^3}{\beta d(1+\alpha)}\right) \leqslant \frac{1+\alpha}{\beta} + \beta + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Отсюда

$$e^{\frac{1+\alpha}{\beta}+\beta+\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant \frac{(1+\alpha+\beta)^3}{\beta d(1+\alpha)},$$

тогда

$$d = d_1 \geqslant \frac{(1+\alpha+\beta)^3}{\beta(1+\alpha)e^{\frac{1+\alpha}{\beta}+\beta+\frac{\beta}{\alpha}}},$$

соотвественно

$$d_2 \geqslant \frac{\alpha(1+\alpha+\beta)^3}{\beta(1+\alpha)e^{\frac{1+\alpha}{\beta}+\beta+\frac{\beta}{\alpha}}},$$

$$d_3 \geqslant \frac{(1+\alpha+\beta)^3}{(1+\alpha)e^{\frac{1+\alpha}{\beta}+\beta+\frac{\beta}{\alpha}}}.$$

Т. е. при полученных значениях неравенство (12) выполняется, следовательно характеристическая функция удовлетворяет свойству супераддитивности.

3.8. Приложение 3. Доказательство супераддитивности ζ – характеристической функции для примеров

3.8..1 *Пример 1*

Значение гранд-коалиции:

$$V^{\zeta}(\{1,2,3\}) = V^{\delta}(\{1,2,3\}) = V^{\alpha}(\{1,2,3\}) = \frac{3}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2,$$

где $\bar{e}_i = k - \sum\limits_{i=1}^{3} d_i, \quad i = \overline{1,3}.$

Характеристическая функция для игрока $\{1\}$, для других одноэлементных коалиций все аналогично:

$$V^{\zeta}(\{1\}) = \min_{\substack{e_1=\bar{e}_1\\ e_2,e_3}} u_1(\bar{e}_1, e_2, e_3) = \min_{e_2,e_3}(k\bar{e}_1 - \frac{1}{2}(\bar{e}_1)^2 - d_1(\bar{e}_1 + e_2 + e_3)),$$

$$\bar{e}_1 = k - \sum_{i=1}^{3} d_i.$$

Отсюда находим e_2, e_3.

Очевидно, что $e_2 = e_3 = k$, тогда,

$$V^{\zeta}(\{1\}) = k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \frac{1}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - d_1\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right).$$

Аналогично,

$$V^{\zeta}(\{2\}) = k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \frac{1}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - d_2\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right),$$

$$V^{\zeta}(\{3\}) = k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \frac{1}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - d_3\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right).$$

Для двухэдементной коалиции имеем:

$$V^{\zeta}(\{2,3\}) = \min_{\substack{e_2=e_3=\bar{e}\\ e_1}}(u_2(e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) + u_3(e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)) =$$

$$= \min_{e_1}(2k\bar{e} - \bar{e}^2 - (d_2 + d_3)(e_1 + 2\bar{e}).$$

Посчитаем частную производную $\frac{\partial(u_2(e_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)+u_3(e_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3))}{\partial e_1}$:

$$\frac{\partial(u_2(e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) + u_3(e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3))}{\partial e_1} = -(d_2 + d_3) < 0.$$

Так как производная отрицательная, то делаем вывод, что минимум достигается при $e_1 = k$. Следовательно,

$$V^{\zeta}(\{2,3\}) = 2k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - (d_2 + d_3)\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right).$$

Аналогично,

$$V^{\zeta}(\{1,3\}) = 2k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - (d_1 + d_3)\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right),$$

$$V^{\zeta}(\{1,2\}) = 2k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - (d_1 + d_2)\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right).$$

Проверим на супераддитивность. Выполняется ли неравенство

$V^{\zeta}(\{1\}) + V^{\zeta}(\{2,3\}) \leqslant V^{\zeta}(\{1,2,3\})$.

Подставляя значения соответствующих характеристических функций, имеем

$$3k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \frac{3}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} d_i\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) \leqslant$$

$$\leqslant 3k\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) - \frac{3}{2}\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right)^2 - 3\sum_{i=1}^{3} d_i\left(k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right).$$

Очевидно, что

$$-\sum_{i=1}^{3} d_i\left(3k - \sum_{i=1}^{3} d_i\right) \leq -\sum_{i=1}^{3} d_i\left(3k - 3\sum_{i=1}^{3} d_i\right).$$

Следовательно, V^{ζ} — супераддитивная функция.

3.8..2 *Пример 3*

Значение характеристической функции для гранд-коалиции получаем аналогично как в примере с δ–характеристической функцией

$$V^{\zeta}(\{1,2,3\}) = V^{\delta}(\{1,2,3\}) = 3k\ln\frac{k}{\sum_{i=1}^{3} d_i} - 3\sum_{i=1}^{3} d_i\left(\frac{k}{\sum_{i=1}^{3} d_i} - 1\right).$$

Далее

$$V^{\zeta}(\{1\}) = \min_{\substack{e_1=\bar{e}_1\\ e_2,e_3}} u_1(\bar{e}_1, e_2, e_3) = \min_{e_2,e_3}(k\ln(\bar{e}_1 + 1) - d_1(\bar{e}_1 + e_2 + e_3)),$$

где $\bar{e}_1 = \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1$.

Очевидно, что $e_2^{\{1\}} = e_3^{\{1\}} = k$, тогда,

$$V^{\zeta}(\{1\}) = k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - d_1 \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1 + 2k \right).$$

Аналогично,

$$V^{\zeta}(\{2\}) = k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - d_2 \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1 + 2k \right),$$

$$V^{\zeta}(\{3\}) = k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - d_3 \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1 + 2k \right).$$

Найдем значение

$$V^{\zeta}(\{2,3\}) = \min_{\substack{e_2 = e_3 = \bar{e} \\ e_1}} (u_2(e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) + u_3(e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)) =$$

$$= \min_{e_1} (k(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) - \frac{1}{2}((\bar{e}_2)^2 + (\bar{e}_3)^2) - (d_2 + d_3)(e_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3)).$$

Минимум достигается при $e_1^{\{2,3\}} = k$. Следовательно,

$$V^{\zeta}(\{2,3\}) = 2k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - (d_2 + d_3) \left(k - 2 + \frac{2k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right).$$

Аналогично,

$$V^{\zeta}(\{1,3\}) = 2k \ln \left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right) - (d_1 + d_3) \left(k - 2 + \frac{2k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} \right),$$

$$V^{\zeta}(\{1,2\}) = 2k\ln\left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right) - (d_1+d_2)\left(k-2+\frac{2k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right).$$

Проверим условие супераддитивности. Покажем выполнение неравенства $V^{\zeta}(\{1\})+V^{\zeta}(\{2,3\}) \leqslant V^{\zeta}(\{1,2,3\})$ (для других коалиций проверка выполняется аналогично циклической перестановкой индексов).

Имеем

$$k\ln\left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right) - d_1\left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 1 + 2k\right) + 2k\ln\left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right) -$$

$$-(d_2+d_3)\left(k-2+\frac{2k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right) \leqslant 3k\ln\left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i}\right) - 3\sum_{i=1}^{3} d_i\left(\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{3} d_i} - 3\right).$$

После преобразований, перенеся все в правую сторону неравенства, имеем,

$$(2d_1+d_2+d_3)\left(\sum_{i=1}^{3} d_i(k+1) - k\right) \geqslant 0,$$

что, очевидно, выполнено. Следовательно, V^{ζ} супераддитивна.

3.9. Приложение 4. Вычисления и программный код для практической задачи

3.9..1 Вычисление штрафов

Для вычисления коэффициентов d_i по данным загрязнения рассчитаем, какая часть (объем) выбросов приходится на i–ую компанию. К вредным веществам, которые выбрасывают все три компании относятся: жидкие и газообразные вещества, углеводород и прочее. Объем выбросов каждой компании рассчитывается из соотношения суммарного объема выбросов, а именно, для Иркутскэнерго это 182,5 т, для Братского алюмин. завода — 54,3 т и для Ангарского нефтехим. комбината — 33,6 т. Жидкие и газообразные вещества выбрасывают все три компании, следовательно штраф рассчитывается как произведение объема выбросов данного вещества i–ой компанией и платы за загрязнение этим веществом. Т. е. штрафы компании Иркутскэнерго, Братского алюминиевого завода и Ангарского нефтехимического комбината будут равны соответственно:

$$241423 \cdot 5 = 1207170;$$

$$71893,7 \cdot 5 = 359468,5;$$

$$44352,3 \cdot 5 = 221761,5.$$

Аналогично рассчитываются штрафы за загрязнение углеводородом:

$$769,5 \cdot 5 = 3847,5;$$

$$229,14 \cdot 5 = 1145,7;$$

$$141,36 \cdot 5 = 706,8;$$

и прочими веществами:

$$3246,75 \cdot 10 = 32467,5;$$

$$966,81 \cdot 10 = 9668,1;$$

$$596,44 \cdot 10 = 5964,4.$$

Что касается загрязняющих веществ: диоксид серы, оксид углерода и оксид азота, то их образованию соответствуют выбросы компании Иркутскэнерго и Ангарского нефтехимического завода. С учетом вышесказанного, штрафы соответствующим компаниям за выбросы диоксида серы в атмосферу равны:

$$112538,07 \cdot 21 = 2363299,47;$$

$$20721,93 \cdot 21 = 435160,53;$$

за выбросы оксида углерода:

$$96585 \cdot 0,6 = 57951;$$

$$17784,5 \cdot 0,6 = 10670,7;$$

и оксида азота:

$$56066 \cdot 35 = 1962310;$$

$$10323,6 \cdot 35 = 361326.$$

Помимо загрязняющих веществ, перечисленных выше, Братский алюминиевый завод также выбрасывает различные твердые вещества. Плата за загрязнение будет составлять:

$$130040 \cdot 13,7 = 1781548.$$

Суммируя получившиеся значения, общие штрафы рассмотренных компаний буду равны: для Иркутскэнерго — 5595225,47 руб., для Братского алюминиевого завода — 2119126,6 руб. и для Ангарского нефтехимического комбината — 1031945,93 руб., с учетом погрешностей. Тогда d_i, рассчитываемые как отношение штрафа и суммарного загрязнения, равны соответственно: $d_1 = 20,69$, $d_2 = 7,84$, $d_3 = 3,82$.

3.9..2 Программный код

```
di = [5595225/270400 2119127/270400 1031946/270400];
```

```
Ki = [900000000/182500 872400000/54300 1290700000/33600];

Vz=zeros(1,7);
Vd=zeros(1,7);

syms e1 e2 e3;
Vz123 = (Ki(1)*e1+Ki(2)*e2+Ki(3)*e3)-1/2*(e1^2+e2^2+e3^2)-
-(di(1)+di(2)+di(3))*(e1+e2+e3);
dVz123 = [diff(Vz123,e1) diff(Vz123,e2) diff(Vz123,e3)];
C1 = inline(dVz123(1));
C2 = inline(dVz123(2));
C3 = inline(dVz123(3));
E123  = [C1(0) C2(0) C3(0)]
C=inline(Vz123);
Vz(7)=C(E123(1), E123(2),E123(3));

Vz(1) = Ki(1)*E123(1)-1/2*(E123(1)^2)-(di(1))*(E123(1)+Ki(2)+
+Ki(3));
Vz(2) = Ki(2)*E123(2)-1/2*(E123(2)^2)-(di(2))*(E123(2)+Ki(1)+
+Ki(3));
Vz(3) = Ki(3)*E123(3)-1/2*(E123(3)^2)-(di(3))*(E123(3)+Ki(1)+
+Ki(2));

Vz(6) = Ki(2)*E123(2)+Ki(3)*E123(3)-1/2*(E123(2)^2+E123(3)^2)-
-(di(2)+di(3))*(Ki(1)+E123(2)+E123(3));
Vz(5) = Ki(1)*E123(1)+Ki(3)*E123(3)-1/2*(E123(1)^2+E123(3)^2)-
-(di(1)+di(3))*(Ki(2)+E123(1)+E123(3));
Vz(4) = Ki(1)*E123(1)+Ki(2)*E123(2)-1/2*(E123(1)^2+E123(2)^2)-
-(di(1)+di(2))*(Ki(3)+E123(1)+E123(2));
Shz =[Vz(1)/3+(Vz(4)-Vz(2))/6+(Vz(5)-Vz(3))/6+(Vz(7)-Vz(6))/3,
Vz(2)/3+(Vz(4)-Vz(1))/6+(Vz(6)-Vz(3))/6+(Vz(7)-Vz(5))/3,
Vz(3)/3+(Vz(5)-Vz(1))/6+(Vz(6)-Vz(2))/6+(Vz(7)-Vz(4))/3];

Vd(7) = Vz(7);
```

```
E123d=zeros(1,3);

U1 = Ki(1)*e1-1/2*e1^2-di(1)*(e1+e2+e3);
C1 = inline(diff(U1,e1));
E123d(1)  = C1(0);

U2 = Ki(2)*e2-1/2*e2^2-di(2)*(e1+e2+e3);
C2 = inline(diff(U2,e2));
E123d(2)  = C2(0);

U3 = Ki(3)*e3-1/2*e3^2-di(3)*(e1+e2+e3);
C3 = inline(diff(U3,e3));
E123d(3)  = C3(0)

Vd1F=inline(U1);
Vd(1)=Vd1F(E123d(1),E123d(2),E123d(3));

Vd2F=inline(U2);
Vd(2)=Vd2F(E123d(1),E123d(2),E123d(3));

Vd3F=inline(U3);
Vd(3)=Vd3F(E123d(1),E123d(2),E123d(3));

Vd23 = Ki(2)*e2+Ki(3)*e3-1/2*(e2^2+e3^2)-(di(2)+di(3))*
*(E123d(1)+e2+e3);
C2 = inline(diff(Vd23,e2));
C3 = inline(diff(Vd23,e3));
Vd23 = inline(Vd23);
Vd(6) = Vd23(C2(0),C3(0));

Vd12 = Ki(1)*e1+Ki(2)*e2-1/2*(e1^2+e2^2)-(di(1)+di(2))*
*(E123d(3)+e1+e2);
C1 = inline(diff(Vd12,e1));
```

```
C2 = inline(diff(Vd12,e2));
Vd12 = inline(Vd12);
Vd(4) = Vd12(C1(0),C2(0));

Vd13 = Ki(1)*e1+Ki(3)*e3-1/2*(e1^2+e3^2)-(di(1)+di(3))*
*(E123d(2)+e1+e3);
C1 = inline(diff(Vd13,e1));
C3 = inline(diff(Vd13,e3));
Vd13 = inline(Vd13);
Vd(5) = Vd13(C1(0),C3(0));

Shd =[Vd(1)/3+(Vd(4)-Vd(2))/6+(Vd(5)-Vz(3))/6+(Vd(7)-Vd(6))/3,
Vd(2)/3+(Vd(4)-Vd(1))/6+(Vd(6)-Vd(3))/6+(Vd(7)-Vd(5))/3,
Vd(3)/3+(Vd(5)-Vd(1))/6+(Vd(6)-Vd(2))/6+(Vd(7)-Vd(4))/3];

Va(7) = Vz(7);
E123a=zeros(1,3);

U1 = Ki(1)*e1-1/2*e1^2-di(1)*(e1+Ki(2)+Ki(3));
C1 = inline(diff(U1,e1));
E123a(1)  = C1(0);

U2 = Ki(2)*e2-1/2*e2^2-di(2)*(Ki(1)+e2+Ki(3));
C2 = inline(diff(U2,e2));
E123a(2)  = C2(0);

U3 = Ki(3)*e3-1/2*e3^2-di(3)*(Ki(1)+Ki(2)+e3);
C3 = inline(diff(U3,e3));
E123a(3)  = C3(0)

Va23 = Ki(2)*e2+Ki(3)*e3-1/2*(e2^2+e3^2)-(di(2)+di(3))*
*(Ki(1)+e2+e3);
C2 = inline(diff(Va23,e2));
C3 = inline(diff(Va23,e3));
```

```
Va23 = inline(Va23);
Va(6) = Va23(C2(0),C3(0));

Va12 = Ki(1)*e1+Ki(2)*e2-1/2*(e1^2+e2^2)-(di(1)+di(2))*
*(e1+e2+Ki(3));
C1 = inline(diff(Va12,e1));
C2 = inline(diff(Va12,e2));
Va12 = inline(Va12);
Va(4) = Va12(C1(0),C2(0));

Va13 = Ki(1)*e1+Ki(3)*e3-1/2*(e1^2+e3^2)-(di(1)+di(3))*
*(e1+Ki(2)+e3);
C1 = inline(diff(Va13,e1));
C3 = inline(diff(Va13,e3));
Va13 = inline(Va13);
Va(5) = Va13(C1(0),C3(0));
Sha =[Va(1)/3+(Va(4)-Va(2))/6+(Va(5)-Va(3))/6+(Va(7)-Va(6))/3,
Va(2)/3+(Va(4)-Va(1))/6+(Va(6)-Va(3))/6+(Va(7)-Va(5))/3,
Va(3)/3+(Va(5)-Va(1))/6+(Va(6)-Va(2))/6+(Va(7)-Va(4))/3];

format long
LastName={'Coalition';'alphaFuction';'zetaFunction';
'deltaFunction';'Sha';'Shz';'Shd'};
T = table(categorical([1,2,3,12,13,23,123]'),Va',Vz',Vd',
Sha',Shz',Shd','VariableNames',LastName)
```