

Алгоритм оптимальной раскраски квадратных (0,1)-матриц*И. В. Олемской, О. С. Фирюлина*Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Олемской И. В., Фирюлина О. С.* Алгоритм оптимальной раскраски квадратных (0,1)-матриц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 1. С. 90–108.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.108>

Предложен алгоритм решения конфигурационно-оптимизационной задачи о раскраске для квадратных (0,1)-матриц, который базируется на способе выделения их структурных особенностей. Алгоритм относится к классу переборных, тем не менее построение оптимального решения осуществляется среди вариантов, которые обеспечивают наличие определенной конфигурации, за счет чего существенно сокращается размер дерева поиска. Приведена подробная схема его работы, а также продемонстрирована эффективность решения на примере вычислений хроматического числа конкретной (0,1)-матрицы.

Ключевые слова: раскраска графа, хроматическое число, (0,1)-матрица.

1. Введение. В работе для квадратной (0,1)-матрицы произвольной размерности (например, матрицы смежности ориентированного графа [1, 2]) решается задача о поиске элементарного преобразования матрицы, обеспечивающего ее приведение к нульдиагональному виду (см. рисунок) с минимальным значением нульдиагональных блоков ν .

Здесь и в дальнейшем OI_n — множество квадратных (0,1)-матриц размерности n ; O_n — квадратная матрица с нулевыми элементами размерности n ; M_n — множество квадратных (0,1)-матриц размерности n с нулевыми диагональными элементами; I_n — множество индексов из n элементов. Очевидно, что M_n является подмножеством множества OI_n . Индекс n при I_n будем опускать и писать просто I , если ясно, о каком n идет речь.

Сама постановка задачи диктует очевидный алгоритм — перебор индексов элементов:

$$\begin{aligned} \{i_1^j, \dots, i_{k(j)}^j\} \subset I_n, \cup_{j=1}^{\nu} \{i_1^j, \dots, i_{k(j)}^j\} \equiv I_n, \{i_1^r, \dots, i_{k(r)}^r\} \cap \{i_1^q, \dots, i_{k(q)}^q\} = \\ = \emptyset, \quad r, q \in I_{\nu}, \quad r \neq q, \end{aligned}$$

выделяющих подматрицы $A(i_1^j, \dots, i_{k(j)}^j) \in M_{k(j)}$ из матрицы $A \in M_n$. Здесь $i_1^j, \dots, i_{k(j)}^j$ — номера строк и столбцов исходной матрицы A .

Надо иметь в виду, что этот перебор неокончательный, поскольку необходимо еще учитывать и свойства элементов исходной матрицы, попадающих в выбранные подматрицы. Для преобразованной матрицы $A \in M_n$ и любого ее нулевого блока $O_{k(j)}$ (подматрицы), $j = 1, \dots, \nu$ (см. рисунок), окаймляющая [3] ее подматрица уже

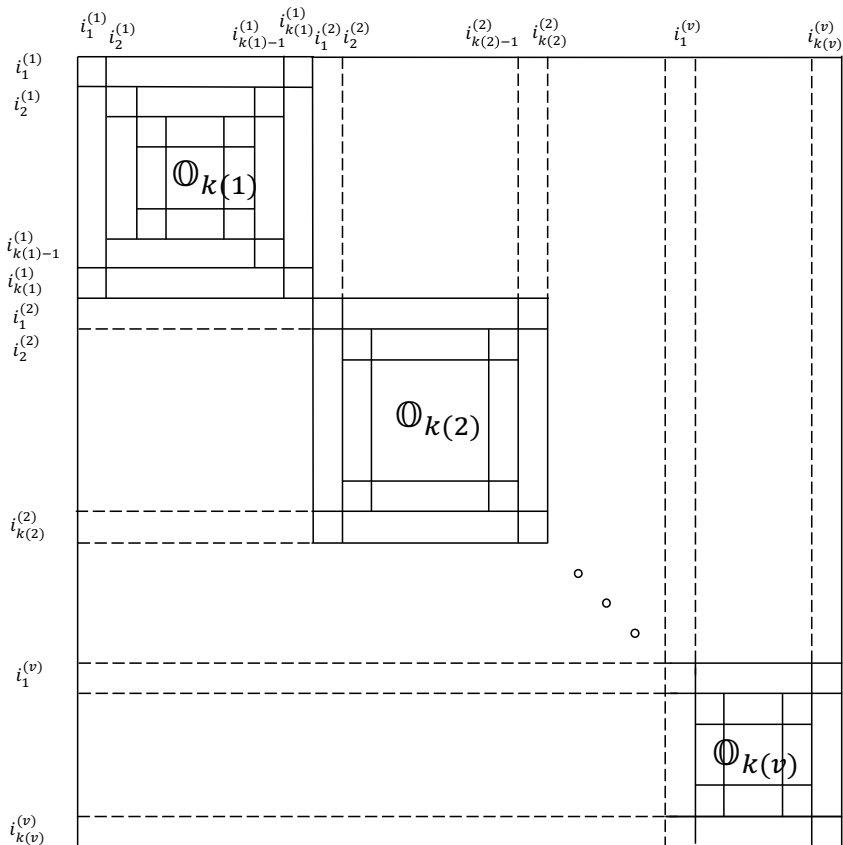


Рисунок. Вариант раскраски с v нулевыми диагональными блоками

не будет подматрицей $O_{k(j)+1}$ в подматрице

$$A(i_1^j, \dots, i_{k(j)}^j, \dots, i_1^\nu, \dots, i_{k(\nu)}^\nu) \in M_{k(j)+\dots+k(\nu)}.$$

Именно поэтому целесообразно сразу перейти к активному (алгоритмическому) использованию свойств элементов исходной матрицы (0 или 1) — их взаимному расположению и проводить выбор индексов элементов, сразу формирующих нульдиагональные блоки.

2. Основные понятия. Рассматриваемый в работе алгоритм вычисления минимального числа нульдиагональных блоков ν_0 (хроматического числа) базируется на способе выделения структурных особенностей [4, 5] и по сути является его модификацией, учитывающей некоторую специфику решаемой задачи и конечной формы приведения (симметричность подматриц $O_{k(j)}$). Введем две группы множеств: q -е горизонтальное структурное множество матрицы $A \in OI_n$

$$h_q(A) = \{r | a_{qr} = 0, r \in I\}, \quad q \in I,$$

и r -е вертикальное структурное множество матрицы $A \in OI_n$

$$v_r(A) = \{q | a_{qr} = 0, q \in I\}, \quad r \in I.$$

Причем с учетом специфики задачи (симметричность матрицы $O_{k(j)}$) определенное и активно используемое в алгоритме [6] множество $d_{q,r}(A) = h_q(A) \cap v_r(A)$, $q, r \in I$, служит для формирования множеств

$$D_{(q,r)}(A) = d_{q,r}(A) \cap d_{r,q}(A), \quad q, r \in I, \quad q < r. \quad (1)$$

Множества (1) характеризуют структурные особенности исходной матрицы A : симметричность расположения нулей относительно главной диагонали.

Будем предполагать, что каким-либо образом удалось выделить ν подмножеств (нульдиагональные блоки):

$$J^j = \{i_1^j, i_2^j, \dots, i_{k(j)}^j\} \subset I_n, \quad j = 1, \dots, \nu; \quad \cup_{j=1}^{\nu} J^j = I_n, \quad J^p \cap J^q = \emptyset, \quad p \neq q, \quad p, q \in I_{\nu}.$$

Их элементы задают номера строк и столбцов исходной матрицы A , на пересечении которых расположены нулевые матрицы $O_{k(j)}$. Это позволяет построить как подстановку строк и столбцов

$$\pi = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & k(1) & k(1)+1 & \dots & \sum_{r=1}^2 k(r) & \dots & \sum_{r=1}^{\nu-1} k(r)+1 & \dots & \sum_{r=1}^{\nu} k(r) \\ i_1^1 & i_2^1 & \dots & i_{k(1)}^1 & i_1^2 & \dots & i_{k(2)}^2 & \dots & i_1^{\nu} & \dots & i_{k(\nu)}^{\nu} \end{array} \right),$$

так и перестановочную матрицу $P = \{b_{\xi\mu}\}$:

$$b_{\xi\mu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \pi(\xi), \\ 0, & \text{если } \mu \neq \pi(\xi), \end{cases}$$

такую, что матрица PAP' и будет матрицей с числом нульдиагональных блоков ν . Причем здесь для наглядности изложения алгоритма равенство $\pi(\xi) = \mu$ в перестановке $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ означает, что μ -й столбец (строка) исходной матрицы будет ξ -м столбцом (строкой) в преобразованной.

Очевидное свойство множеств $D_{(q,r)}$ для элементов подматрицы $O_{k(j)}$ (j -го нульдиагонального блока, $j = 1, \dots, \nu$) в этом случае

$$\bar{D}_{(i_s, i_{k(j)+1-s})}^{j,s} \equiv D_{(i_s, i_{k(j)+1-s})} \cap \{i_s, \dots, i_{k(j)+1-s}\} = \{i_s, \dots, i_{k(j)+1-s}\}, \quad s = 1, \dots, \left\lfloor \frac{k(j)}{2} \right\rfloor, \quad (2)$$

является конструктивным. Здесь и в дальнейшем $[a]$ — целая часть от деления, верхние индексы j и s будут обозначать: j — номер нульдиагонального блока; s — номер пары, удовлетворяющей свойству (2), именуемый s -м уровнем j -й ветви дерева перебора. Именно опираясь на приведенное свойство, в рассматриваемом ниже алгоритме происходит отбор элементов $i_r^j \in I_n$, $r = 1, \dots, k(j)$, которые должны войти в подмножество $J^j = \{i_1^j, i_2^j, \dots, i_{k(j)}^j\}$.

Причем следует обратить внимание на то, что алгоритм является переборным, однако, во-первых, перебор (построение) ведется лишь среди вариантов, которые обеспечивают наличие определенной конфигурации (см. рисунок) — с числом нульдиагональных блоков, не превосходящим некоторого фиксированного значения; во-вторых, каждый построенный вариант такого разбиения множества I_n на ν подмножеств J^j (раскраски):

$$J^j = \{i_1^j, i_2^j, \dots, i_{k(j)}^j\} \subset I_n \quad : \quad \cup_{j=1}^{\nu} J^j = I_n, \quad J^p \cap J^q = \emptyset, \quad p \neq q, \quad p, q \in I_{\nu},$$

предполагает исключение из рассмотрения некоторого числа вариантов, имеющих аналогичные характеристики раскраски (конфигурационно тождественны по свойству (2)).

Действительно, в силу симметричности подматриц $O_{k(j)}$ и свойств вертикальных и горизонтальных структурных множеств, для построенных множеств J^j порядок следования элементов в них является несущественным (при практической реализации будем располагать их в порядке возрастания), так как эти элементы структурно тождественны с точностью до перестановки в пределах множеств J^j .

В-третьих, из всего множества вариантов раскраски используемые критерии отсечения позволяют существенно сократить число подлежащих рассмотрению вариантов. Это связано с тем, что исключаются варианты, обеспечивающие построение раскраски с заведомо большим числом нульдиагональных блоков, чем в лучшей из уже рассмотренных.

Ниже обсудим ключевые моменты работы алгоритма. Прежде всего отметим, что на каждом s -м уровне j -й ветви дерева перебора алгоритма при построении j -го нульдиагонального блока формируются и в дальнейшем активно используются несколько множеств.

Шаг 1. *Опорное* множество $\omega^{j,s}$ строится для каждого первого ($s = 1$) уровня j -й ветви дерева перебора по правилу

$$\omega^{j,s} := I_n \setminus \left(\bigcup_{p=1}^{j-1} J^p \right). \quad (3)$$

Естественно, что для первой ветви множество $\omega^{1,1} = I_n$. Здесь же вводится изначально пустое множество $F^{j,1}$, выполняющее функцию памяти об уже рассмотренных элементах множества $\omega^{j,1}$ при переборе на этом уровне для j -й ветви.

Шаг 2. Если опорное множество $\omega^{j,s} = \emptyset$, то при $s = 1$ переходим на шаг 8, а при $s > 1$ — на шаг 5, иначе выполняем следующий пункт алгоритма — шаг 3.

Шаг 3. При непустом опорном множестве ($\omega^{j,s} \neq \emptyset$) формируются еще два множества этого уровня:

— множество $G^{j,s}$, состоящее из элементов (q, r) , удовлетворяющих свойству (2):

$$G^{j,s} = \{(q, r) \mid \{q, r\} \subset D_{(q,r)}^{j,s} \equiv D_{(q,r)} \cap \omega^{j,s}, \quad q, r \in \omega^{j,s}, \quad q < r\}, \quad (4)$$

— множество $Q^{j,s}$, изначально пустое, выполняющее функцию памяти об использовании на s -м уровне j -й ветви элементов множества $G^{j,s}$.

Шаг 4. Теперь рассмотрим множество $G^{j,s} \setminus Q^{j,s}$ — множество *возможных продолжений*. Причем следует выделить следующие случаи.

1. Если множество возможных продолжений не пусто ($G^{j,s} \setminus Q^{j,s} \neq \emptyset$), то выбирается *узловой элемент* $\alpha^{j,s} = (\alpha_1^{j,s}, \alpha_2^{j,s}) \in G^{j,s} \setminus Q^{j,s}$, для которого

$$|D_{\alpha^{j,s}}^{j,s}| = \max_{\alpha} |D_{\alpha}^{j,s}|, \quad \alpha^{j,s}, \alpha \in G^{j,s} \setminus Q^{j,s}.$$

И на базе выбранного узлового элемента $\alpha^{j,s}$ и множества $D_{\alpha^{j,s}}^{j,s}$ строятся: опорное множество

$$\omega^{j,s+1} = \left(\omega^{j,s} \cap D_{(\alpha_1^{j,s}, \alpha_2^{j,s})}^{j,s} \right) \setminus \{\alpha_1^{j,s}, \alpha_2^{j,s}\}$$

и $F^{j,s+1} := \emptyset$ следующего уровня. Множество $F^{j,s+1}$ (так же, как и введенные выше множества $F^{j,1}$ и $Q^{j,s}$) будет нести информацию об элементах опорного множества $\omega^{j,s+1}$, использованных уже на данном уровне.

Узловой элемент запоминается как использованный на s -м уровне: $Q^{j,s} := Q^{j,s} \cup \alpha^{j,s}$. Причем завершается рассмотрение этого случая увеличением номера уровня на единицу ($s := s + 1$) и переходом на шаг 2.

2. Если же множество возможных продолжений пусто ($G^{j,s} \setminus Q^{j,s} = \emptyset$), то из элементов опорного множества $\omega^{j,s} \setminus F^{j,s}$ выбирается *концевой элемент* $\beta \in \omega^{j,s} \setminus F^{j,s}$. После этого он запоминается как использованный в таком качестве, т. е. становится элементом множества $F^{j,s} := F^{j,s} \cup \beta$. Дальнейшее продвижение по этой ветви регламентируется следующим пунктом (см. шаг 5) алгоритма.

При пустом же множестве $\omega^{j,s} \setminus F^{j,s} = \emptyset$ реализуется возврат на предыдущий ($s := s - 1$) уровень j -й ветви дерева перебора с переходом на шаг 4.

Шаг 5. Проход по j -й ветви дерева перебора при построении j -го нульдиагонального блока J^j заканчивается при выполнении одного из таких условий:

1) либо, когда опорное множество s -го уровня пусто ($\omega^{j,s} = \emptyset$) (здесь число элементов, образующих j -й нульдиагональный блок, четно и содержит $2(s-1)$ элементов:

$$J^j := \{\alpha_1^{j,1}, \alpha_2^{j,1}, \dots, \alpha_1^{j,s-1}, \alpha_2^{j,s-1}\};$$

2) либо, когда все элементы множества $G^{j,s}$ были уже приняты в качестве *узловых*, т. е. в случае $G^{j,s} \setminus Q^{j,s} = \emptyset$ при непустом опорном множестве ($\omega^{j,s} \neq \emptyset$), причем не все элементы опорного множества были рассмотрены на тот момент как *концевые* ($\omega^{j,s} \setminus F^{j,s} \neq \emptyset$, $\beta \in \omega^{j,s} \setminus F^{j,s}$).

Во втором случае число элементов, образующих j -й нульдиагональный блок, нечетно. Оно состоит из $2s - 1$ элементов: $J^j := \{\alpha_1^{j,1}, \alpha_2^{j,1}, \dots, \alpha_1^{j,s-1}, \alpha_2^{j,s-1}, \beta\}$. В r^j запоминаем количество уровней, пройденных при построении j -го нульдиагонального блока. Причем для четного числа элементов множества J^j количество уровней $r^j := s - 1$, для нечетного $r^j := s$.

Шаг 6. Использование свойств сформированного множества J^j позволяет существенно сократить количество ветвей дерева перебора. Для этого после построения каждого множества J^j необходимо проводить *прореживание* — исключать элементы, выбор которых в качестве узловых на s -м уровне j -й ветви не может изменить ни элементный состав множества J^j , ни число нульдиагональных блоков.

Формализация такой операции требует введения трех вспомогательных множеств.

1. Множество элементов, удовлетворяющих свойству (2) и использованных начиная с s -го уровня в качестве узловых при построении j -го нульдиагонального множества

$$\Psi^{j,s} := J^j \setminus \left(\bigcup_{\mu=1}^{s-1} \{\alpha_1^{j,\mu}, \alpha_2^{j,\mu}\} \right).$$

2. Множество неперспективных элементов

$$Z^{j,s} := \{\alpha \in (G^{j,s} \setminus Q^{j,s}) \cap (\Psi^{j,s} \times \Psi^{j,s}) \mid D_{\alpha}^{j,s} \equiv \Psi^{j,s}\},$$

содержащее элементы, использование которых в качестве узловых, даст возможность построить уже сформированное множество J^j . Здесь

$$s = \begin{cases} r^j - 1, r^j - 2, \dots, 1, & \text{если } k(j) \text{ нечетно,} \\ r^j, r^j - 1, \dots, 1, & \text{если } k(j) \text{ четно.} \end{cases}$$

Заключительная операция прореживания — пересылка неперспективных элементов в множество уже использованных этого уровня при построении j -го нульдиагонального блока:

$$Q^{j,s} := Q^{j,s} \cup Z^{j,s}.$$

3. Множество B формируется из рассмотренных в процессе перебора множеств J^1 . Это значит, что множество $\Psi^{1,1}$ становится элементом множества $B := B \cup \{\Psi^{1,1}\}$, если $\{\Psi^{1,1}\} \notin B$. В начале работы алгоритма $B := \emptyset$. Причем, если $\{J^1\} \in B$, то прямой ход прекращаем и начинаем реализовывать возврат с последнего уровня первого блока ($s := r^1$) с переходом на шаг 3 алгоритма.

Шаг 7. Построение очередного нульдиагонального блока начинаем с увеличения их общего числа (текущего номера) на единицу ($j := j + 1$) и установки в начальное положение счетчика уровня ($s := 1$) и множеств уже использованных на этом уровне элементов в качестве *узловых* ($Q^{j,1} := \emptyset$) и *концевых* ($F^{j,1} := \emptyset$). После чего переходим на шаг 1 алгоритма.

Шаг 8. Когда $\omega^{j,1} = \emptyset$ (т. е. сформирована полная ветвь дерева перебора и $I_n \equiv \left(\bigcup_{p=1}^{j-1} J^p\right)$, причем число нульдиагональных блоков раскраски равно $\nu = j - 1$), то проводится сравнение ν с *рекордным* ν_0 — минимальным числом нульдиагональных блоков из всех уже построенных раскрасок на полных ветвях дерева перебора алгоритма.

Если число нульдиагональных блоков ν вновь построенной раскраски меньше, чем ν_0 , то сама новая раскраска и число ее нульдиагональных блоков $\nu_0 := \nu$ становятся *рекордными*.

Причем при выполнении равенства

$$\left\lfloor \frac{|\omega^{1,1}|}{\rho^{1,1}} \right\rfloor = \begin{cases} \nu_0 - 1, & \text{если } \left\lfloor \frac{|\omega^{1,1}|}{\rho^{1,1}} \right\rfloor \neq \frac{|\omega^{1,1}|}{\rho^{1,1}}, \\ \nu_0, & \text{если } \left\lfloor \frac{|\omega^{1,1}|}{\rho^{1,1}} \right\rfloor = \frac{|\omega^{1,1}|}{\rho^{1,1}}, \end{cases}$$

алгоритм заканчивает работу, так как дальнейший перебор не позволит построить разбиение с меньшим числом нульдиагональных блоков. Полученное разбиение и является решением поставленной задачи, а число нульдиагональных блоков ν_0 — хроматическим числом.

Стартовое *рекордное* значение ν_0 равно размерности матрицы n . Причем после сравнения и проверки на рекордность начинаем процедуру возврата, вернувшись на последний уровень ($s := r^j$) ν -й ветви дерева перебора с переходом на шаг 4 алгоритма.

Отметим, что при движении по дереву перебора как вверх ($j := j + 1$ или $s := s + 1$) — прямой ход, так и вниз — обратный ($j := j - 1$ или $s := s - 1$) осуществляются *блочные проверки* на перспективность дальнейшего продвижения по текущей ветви дерева перебора. Блочные проверки работы данного алгоритма (возврат с ограничением) имеют три типа отсечения.

Тип **A**: для блочной его проверки характерно, что на каждом первом уровне при построении очередного j -го нульдиагонального блока будет приниматься решение о перспективности дальнейшего продвижения по текущей ветви перебора. Очевидно, что при выполнении неравенства

$$j - 1 + \frac{|\omega^{j,1}|}{\rho^{j,1}} \geq \nu_0 \tag{5}$$

дальнейшее продвижение по данной ветви нецелесообразно, так как приведет к построению раскраски с числом нульдиагональных блоков ν из интервала

$$j - 1 + \frac{|\omega^{j,1}|}{\rho^{j,1}} \leq \nu \leq j - 1 + |\omega^{j,1}|. \tag{6}$$

Это значит, что количество нульдиагональных блоков будет не меньше, чем рекордное. В таком случае необходимо вернуться на последний уровень предыдущего блока ($j := j - 1, s := r^j$) с переходом на шаг 4 алгоритма.

Здесь и в дальнейшем

$$\rho^{j,s} = \begin{cases} |D_{\alpha^{j,s}}^{j,s}|, & \text{если } G^{j,s} \setminus Q^{j,s} \neq \emptyset, \\ 1, & \text{если } G^{j,s} \setminus Q^{j,s} = \emptyset \text{ и } \omega^{j,s} \setminus F^{j,s} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Тип В: проверка его проводится только при построении первого нульдиагонального блока. Возврат по дереву перебора с понижением уровня ($s := s - 1$ при $s > 1$) производится на шаг 4 алгоритма, если при рассмотрении очередного элемента $\alpha^{1,s} \in G^{1,s} \setminus Q^{1,s}$ на s -м уровне на роль узлового при построении первого нульдиагонального блока выполняется неравенство

$$2(s - 1) + \rho^{1,s} < \left\lceil \frac{n}{\nu_0} \right\rceil.$$

Тип С: этот тип блочной проверки используется только при выполнении равенства $j = \nu_0 - 1$. Если при рассмотрении очередного элемента $\alpha^{j,s} \in G^{j,s} \setminus Q^{j,s}$ на s -м уровне на роль узлового при построении j -го нульдиагонального блока не выполняется равенство

$$2(s - 1) + \rho^{j,s} = |\omega^{j,1}|,$$

то осуществляется возврат по дереву перебора ($j := j - 1, s := r^j$) с переходом на шаг 4 алгоритма.

Отметим, что проверки всех трех типов проводятся в алгоритме при выборе очередного элемента на роль узлового или конечного (см. шаг 4).

Окончание работы алгоритма, если ранее его работа не была прервана по приведенным выше ограничениям, происходит при выполнении неравенства

$$\frac{|\omega_{1,1}|}{\rho^{1,1}} \geq \nu_0.$$

3. Пример практического использования алгоритма. Продемонстрируем работу алгоритма для произвольной $(0, 1)$ -матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем горизонтальные и вертикальные структурные множества исходной матрицы A (табл. 1 и 2). В качестве начального разбиения множества I_{10} полагаем, что $J^j = \{j\}$, $j = 1, \dots, n$.

Таблица 1. Горизонтальные структурные множества

| i | $h_i(A)$ | i | $h_i(A)$ |
|-----|----------------------|-----|----------------------|
| 1 | {1,2,3,4,5,7,8,9,10} | 6 | {2,4,5,6,7,10} |
| 2 | {1,2,4,5,6,8,9,10} | 7 | {1,3,4,7,8,9} |
| 3 | {1,3,7,8,9,10} | 8 | {1,2,3,5,7,8,9,10} |
| 4 | {2,4,5,6,9,10} | 9 | {1,2,3,5,6,7,8,9,10} |
| 5 | {1,2,4,5,6,8,9,10} | 10 | {1,2,3,4,5,6,8,9,10} |

Таблица 2. Вертикальные структурные множества

| i | $v_i(A)$ | i | $v_i(A)$ |
|-----|--------------------|-----|----------------------|
| 1 | {1,2,3,5,7,8,9,10} | 6 | {1,2,4,5,6,9,10} |
| 2 | {1,2,4,5,6,8,9,10} | 7 | {1,3,6,7,8,9} |
| 3 | {1,3,7,8,9,10} | 8 | {1,2,3,5,7,8,9,10} |
| 4 | {1,2,4,5,6,7,10} | 9 | {1,2,3,4,5,7,8,9,10} |
| 5 | {1,2,5,6,8,9,10} | 10 | {1,2,3,4,5,6,8,9,10} |

Далее строим множества $d_{q,r} = h_q \cap v_r$, $q, r \in I_{10}$, $q \neq r$. Затем, используя множества $d_{q,r}$, формируем множества $D_{(q,r)}^{j,s}$, удовлетворяющие свойству (2). Причем явно $d_{q,r}$ используются один раз: при построении первого нулевого блока ($j := 1$) для первого уровня ($s := 1$)

$$D_{(q,r)} = d_{q,r} \cap d_{r,q}, \quad q, r \in \omega_{1,1} \equiv I_n, \quad q < r, \{q, r\} \subset d_{q,r}, \{q, r\} \subset d_{r,q},$$

опорное множество $\omega_{1,1}$ тождественно I_n . Далее формируем множество *возможных продолжений*

$$G^{j,s} = \{(q, r) | \{q, r\} \subset D_{(q,r)}^{j,s}, D_{(q,r)}^{j,s} = D_{(q,r)} \cap \omega^{j,s}, \quad q, r \in \omega^{j,s}, \quad q < r\}.$$

Таблица 3. Характеристики узловых элементов первого уровня первого блока

| | α | $D\alpha^{1,1}$ | $ D\alpha^{1,1} $ | | α | $D\alpha^{1,1}$ | $ D\alpha^{1,1} $ |
|----|----------|--------------------|-------------------|----|----------|--------------------|-------------------|
| 1 | (1,2) | {1,2,5,8,9,10} | 6 | 16 | (3,9) | {1,3,7,8,9,10} | 6 |
| 2 | (1,3) | {1,3,7,8,9,10} | 6 | 17 | (3,10) | {1,3,8,9,10} | 5 |
| 3 | (1,5) | {1,2,5,8,9,10} | 6 | 18 | (4,5) | {2,4,5,6,10} | 5 |
| 4 | (1,7) | {1,3,7,8,9} | 5 | 19 | (4,6) | {2,4,5,6,10} | 5 |
| 5 | (1,8) | {1,2,3,5,7,8,9,10} | 8 | 20 | (4,10) | {2,4,5,6,10} | 5 |
| 6 | (1,9) | {1,2,3,5,7,8,9,10} | 8 | 21 | (5,6) | {2,4,5,6,10} | 5 |
| 7 | (1,10) | {1,2,3,5,8,9,10} | 7 | 22 | (5,8) | {1,2,5,8,9,10} | 6 |
| 8 | (2,4) | {2,4,5,6,10} | 5 | 23 | (5,9) | {1,2,5,8,9,10} | 6 |
| 9 | (2,5) | {1,2,4,5,6,8,9,10} | 8 | 24 | (5,10) | {1,2,4,5,6,8,9,10} | 8 |
| 10 | (2,6) | {2,4,5,6,10} | 5 | 25 | (6,10) | {2,4,5,6,10} | 5 |
| 11 | (2,8) | {1,2,5,8,9,10} | 6 | 26 | (7,8) | {1,3,7,8,9} | 5 |
| 12 | (2,9) | {1,2,5,8,9,10} | 6 | 27 | (7,9) | {1,3,7,8,9} | 5 |
| 13 | (2,10) | {1,2,4,5,6,8,9,10} | 8 | 28 | (8,9) | {1,2,3,5,7,8,9,10} | 8 |
| 14 | (3,7) | {1,3,7,8,9} | 5 | 29 | (8,10) | {1,2,3,5,8,9,10} | 7 |
| 15 | (3,8) | {1,3,7,8,9,10} | 6 | 30 | (9,10) | {1,2,3,5,8,9,10} | 7 |

При построении любого j -го блока на s -м уровне элементы $(q, r) \in G^{j,s}$ множества *возможных продолжений* $G^{j,s}$ будем располагать в порядке убывания мощностей $|D_{(q,r)}^{j,s}|$ (табл. 3). В соответствии с этим упорядоченное множество первого уровня ($s = 1$) при построении первого нульдиагонального блока ($j = 1$) имеет вид

$$G^{1,1} = \{(1, 8), (1, 9), (2, 5), (2, 10), (5, 10), (8, 9), (1, 10), (8, 10), (9, 10), (1, 2), (1, 3), (1, 5),$$

(2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9), (5, 8), (5, 9), (1, 7), (2, 4), (2, 6), (3, 7), (3, 10), (4, 5), (4, 6),
(4, 10), (5, 6), (6, 10), (7, 8), (7, 9)}.

В качестве *узлового элемента* на первом уровне выбираем среди еще не рассмотренных на этом уровне $G^{1,1} \setminus Q^{1,1}$ элемент $\alpha^{1,1} = (\alpha_1^{1,1}, \alpha_2^{1,1}) = (1, 8)$, для которого множество $D_{(q,p)}^{1,1}$ имеет максимальную мощность: $|D_{(1,8)}^{1,1}| = 8$, и делаем блочную проверку типа **B**

$$2(s-1) + \rho^{1,s} > \left\lfloor \frac{n}{\nu_0} \right\rfloor.$$

В соответствии с ее результатом ($0 + 8 > 1$) продолжаем дальнейшее продвижение по данной ветви дерева перебора. Выбранный элемент помещаем в множество $Q^{1,1} = \{(1, 8)\}$ как использованный в качестве *узлового*.

Здесь же можно оценить, согласно (6), число нульдиагональных блоков

$$\frac{10}{8} = \frac{n}{|D_{(1,8)}^{1,1}|} \leq \nu \leq n = 10$$

раскраски, которая может быть сформирована на базе выбранного узлового элемента. Причем из этой оценки следует, во-первых, что для данной $(0, 1)$ -матрицы не существует раскраски с хроматическим числом $\gamma = 1$; во-вторых, что формируемая раскраска с учетом соотношения (5) должна иметь число нульдиагональных блоков меньше, чем ν_0 .

При выбранном *узловом* элементе $\alpha^{1,1} = (1, 8)$ опорное множество второго уровня

$$\omega^{1,2} = \left(\omega^{1,1} \cap D_{(1,8)}^{1,1} \right) \setminus \{1, 8\} = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

содержит 6 элементов. Введем рабочие множества $Q^{1,2} := \emptyset$, $F^{1,2} := \emptyset$.

Если на первом уровне множество возможных продолжений $G^{1,1}$, состоящее из элементов, удовлетворяющих свойству (2), на опорном множестве $\omega^{1,1}$ имело 30 элементов, то на множестве $\omega^{1,2}$ в соответствии с (4) множество $G^{1,2} = \{(9, 10), (2, 5), (2, 9), (2, 10), (3, 9), (5, 9), (5, 10), (3, 7), (7, 9)\}$ содержит 10 элементов, так как только для них выполняется свойство (2).

В качестве узлового элемента на втором уровне первой ветви дерева перебора выбираем пару $\alpha^{1,2} = (\alpha_1^{1,2}, \alpha_2^{1,2}) = (9, 10)$. Затем делаем блочную проверку типа **B**:

$$2(s-1) + \rho^{1,s} > \left\lfloor \frac{n}{\nu_0} \right\rfloor.$$

Ее результат ($2 + 5 > 1$) убеждает в необходимости дальнейшего продвижения по этой ветви дерева перебора.

Элемент $(9, 10)$ запоминаем в множестве $Q^{1,2} := Q^{1,2} \cup \{(9, 10)\}$ как использованный в качестве узлового. Далее формируем опорное множество третьего уровня ($s := s + 1$):

$$\omega^{1,3} = \left(\omega^{1,2} \cap D_{(9,10)}^{1,2} \right) \setminus \{9, 10\} = \{2, 3, 5\}$$

и вводим рабочие множества $Q^{1,3} := \emptyset$, $F^{1,3} := \emptyset$.

Множество возможных продолжений $G^{1,3}$ содержит только один элемент ($G^{1,3} = \{(2, 5)\}$), так как только для него выполняется свойство (2). Выбираем его в качестве

узлового $\alpha^{1,3} = (\alpha_1^{1,3}, \alpha_2^{1,3}) = (2, 5)$ и делаем блочную проверку

$$2(s-1) + \rho^{1,s} > \left\lfloor \frac{n}{\nu_0} \right\rfloor.$$

Ее результат ($4 + 2 > 1$) убеждает в необходимости дальнейшего продвижения по этой ветви дерева перебора. Запоминаем пару $(2, 5)$ как использованную в качестве узлового элемента во множестве $Q^{1,3} := Q^{1,3} \cup \{(2, 5)\}$. Затем формируем опорное множество следующего уровня ($s := s + 1$):

$$\omega^{1,4} = \left(\omega^{1,3} \cap D_{(2,5)}^{1,3} \right) \setminus \{2, 5\} = \emptyset,$$

при этом $r^1 := s - 1 = 3$.

Ветвь дерева перебора построена для первого нулевого блока и содержит четное число элементов. Множество элементов $\{\alpha_1^{1,1}, \alpha_2^{1,1}, \alpha_1^{1,2}, \alpha_2^{1,2}, \alpha_1^{1,3}, \alpha_2^{1,3}\} = \{1, 2, 5, 8, 9, 10\}$, удовлетворяющих свойству (2), имеет мощность, равную 6, — меньшую размерности матрицы, т. е. процесс построения подстановки не закончен. Произведем обновление множества $J^1 := \{1, 2, 5, 8, 9, 10\}$, $k(1) := 6$.

После этого необходимо сделать прореживание для первого дерева перебора, для чего строим соответствующие каждому уровню вспомогательные множества ($k(1)$ — четно)

$$\Psi^{1,3} = J^1 \setminus \{1, 8, 9, 10\} = \{2, 5\}, \quad Z^{1,3} = \emptyset.$$

Причем отметим, что $G^{1,3} \setminus Q^{1,3} = \emptyset$.

Вспомогательные множества второго уровня

$$\Psi^{1,2} = J^1 \setminus \{1, 8\} = \{2, 5, 9, 10\}, \quad Z^{1,2} = \{(2, 5), (2, 9), (2, 10), (5, 9), (5, 10)\}.$$

И так как $Z^{1,2} \neq \emptyset$, то удастся убрать из списка рассматриваемых на этом уровне на роль узловых часть элементов:

$$Q^{1,2} := Q^{1,2} \cup Z^{1,2} = \{(9, 10), (2, 5), (2, 9), (2, 10), (5, 9), (5, 10)\}.$$

Результатом прореживания на данном уровне является исключение на роль узловых 5 элементов. Множество возможных продолжений будет состоять только из 4 элементов:

$$G^{1,2} \setminus Q^{1,2} = \{(3, 9), (3, 7), (3, 10), (7, 9)\}.$$

Вспомогательные множества первого уровня

$$\Psi^{1,1} = J^1 = \{1, 2, 5, 8, 9, 10\}, \quad Z^{1,1} = \{(1, 2), (1, 5), (2, 8), (2, 9), (5, 8), (5, 9)\}.$$

Анализ множества $G^{1,1}$ позволяет исключить из рассмотрения на первом уровне первого блока 6 элементов:

$$Q^{1,1} := Q^{1,1} \cup Z^{1,1}, \quad Q^{1,1} = \{(1, 8), (1, 2), (1, 5), (2, 8), (2, 9), (5, 8), (5, 9)\}.$$

Причем множество элементов, которые могут использоваться на первом уровне в качестве узловых: $G^{1,1} \setminus Q^{1,1} = \{(1, 9), (2, 5), (2, 10), (5, 10), (8, 9), (1, 10), (8, 10), (9, 10), (1, 3), (3, 8), (3, 9), (1, 7), (2, 4), (3, 7), (2, 6), (3, 10), (4, 5), (4, 6), (4, 10), (5, 6), (6, 10), (7, 8), (7, 9)\}$ — состоит уже из 23 элементов.

Проверяем на принадлежность множества $\Psi^{1,1}$ как элемента множеству B . Так как $\{\Psi^{1,1}\} \notin B$, то оно становится элементом базового множества $B := B \cup \{\Psi^{1,1}\}$.

Затем переходим к построению второго нульдиагонального блока на дополнении $I_n \setminus J^1$. Увеличивая параметр номера блока на единицу $j := j + 1$ и полагая $s = 1$, строим опорное множество в соответствии с (3):

$$\omega^{2,1} := I_n \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{j-1} J^r \right) = \{3, 4, 6, 7\}.$$

Причем каждый раз при изменении номера блока проверяем соотношение между номером очередного строящегося блока j и рекордным числом нульдиагональных блоков ν_0 . Выполняется ли равенство $j = \nu_0 - 1$? (В этот момент $j = 2$, а $\nu_0 = 10$.) Далее на $\omega^{2,1}$ формируем с использованием табл. 3 множество $G^{2,1} = \{(q, r) : \{q, r\} \subset D_{(q,r)}^{2,1}, D_{(q,r)}^{2,1} = D_{(q,r)}^{1,1} \cap \omega^{2,1}, q, r \in \omega^{2,1}, q < r\}$. Оно состоит из двух равномошных элементов $G^{2,1} = \{(3, 7), (4, 6)\}$. В качестве *узловой элемента* (претендента на роль искомой пары) на первом уровне построения второго нулевого блока выбираем первый элемент $\alpha^{2,1} = (\alpha_1^{2,1}, \alpha_2^{2,1}) = (3, 7)$, для которого множество $D_{(q,p)}^{2,1}$ имеет мощность $|D_{(3,7)}^{2,1}| = 2$.

Затем необходимо выполнить блочную проверку типа **A** на целесообразность дальнейшего продвижения по этой ветви дерева перебора:

$$j - 1 + \frac{|\omega^{j,1}|}{\rho^{j,1}} = 1 + \frac{|\omega^{2,1}|}{|D_{(3,7)}^{2,1}|} = 1 + \frac{4}{2} < \nu_0 = 10.$$

Успешно пройденная проверка – надежда на построение раскраски с меньшим числом блоков, чем рекордная. Потому продолжаем движение по этой ветви дерева перебора: вносим узловой элемент в множество $Q^{2,1} = \{(3, 7)\}$.

Используя (6), можно выписать оценку числа нульдиагональных блоков ν (текущую, отвечающую этой ветви перебора), которая складывается из числа уже сформированных блоков и оценок сверху и снизу числа блоков, которые могут быть построены при движении по данной ветви перебора:

$$1 + \frac{|\omega^{2,1}|}{|D_{(3,7)}^{2,1}|} = 1 + \frac{4}{2} = 3 \leq \nu \leq 1 + |\omega^{2,1}| = 5.$$

Таким образом, даже при самом неблагоприятном исходе, двигаясь по дереву перебора вверх, получим раскраску с меньшим числом нульдиагональных блоков, чем у рекордной.

Затем, увеличивая счетчик уровня ($s := s + 1$), формируем опорное множество второго уровня $\omega^{2,2} = \emptyset$.

Значит, проход по этой ветви закончен. Множество $J^2 = \{3, 7\}$ обеспечивает нульдиагональный блок размера 2×2 , так как $|J^2| = 2$ и $r^2 := 1$. Необходимо выполнить прореживание. Построенные вспомогательные множества первого уровня

$$\Psi^{2,1} = J^2 = \{3, 7\}, \quad Z^{2,1} = \emptyset,$$

не изменяют множества возможных продолжений $G^{2,1} \setminus Q^{2,1} = \{(4, 6)\}$.

Переходим к построению третьего нульдиагонального блока на дополнении $I_n \setminus (J^1 \cup J^2)$. Увеличивая параметр номера блока на единицу $j := j + 1$ и полагая $s := 1$, строим опорное множество в соответствии с (3):

$$\omega^{3,1} := I_n \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{j-1} J^r \right) = \{4, 6\}$$

и полагаем $Q^{3,1} := \emptyset$, $F^{3,1} := \emptyset$.

На $\omega^{3,1}$ формируем множество $G^{3,1}$. Оно содержит только один элемент ($G^{3,1} = \{(4, 6)\}$), его и выбираем в качестве узлового $\alpha^{3,1} = (4, 6)$. После этого должны выполнить блочную проверку типа **A** на целесообразность дальнейшего продвижения по этой ветви дерева перебора:

$$j - 1 + \frac{|\omega^{3,1}|}{\rho^{3,1}} = 1 + \frac{|\omega^{3,1}|}{|D_{(4,6)}^{3,1}|} = 2 + \frac{2}{2} < \nu_0 = 10.$$

Проверка убеждает в необходимости дальнейшего прохождения по данной ветви. Выбранный в качестве узлового элемент помещаем в множество использованных $Q^{3,1} := \{(4, 6)\}$. Затем, увеличивая счетчик уровня ($s := s + 1$), формируем опорное множество второго уровня $\omega^{3,2} = \emptyset$.

Значит, проход по ветви закончен. Множество $J^3 = \{4, 6\}$ обеспечивает нульдиагональный блок размера 2×2 , так как $|J^3| = 2$ и $r^3 := 1$. Необходимо выполнить прореживание. Построенные вспомогательные множества первого уровня

$$\Psi^{3,1} = J^3 = \{4, 6\}, \quad Z^{3,1} = \emptyset,$$

не изменяют множества возможных продолжений $G^{3,1} \setminus Q^{3,1} = \emptyset$.

Далее строим опорное множество следующего блока:

$$\omega^{4,1} = I_n \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{j-1} J^r \right) = \emptyset.$$

Оно пусто. А это значит, что раскраска построена. Число нульдиагональных блоков равно $\nu = 3$. И оно становится рекордным $\nu_0 := 3$. В этот момент $j = 4$. Подстановка π , обеспечивающая приведение исходной матрицы A к виду (см. рисунок), содержащему три нульдиагональных блока ($\nu = 3$), имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что здесь равенство $\pi(\xi) = \mu$ означает, что μ -й ряд (строка или столбец) исходной матрицы A занимает ξ -й ряд (строка или столбец) в преобразованной PAP' (табл. 4).

Таблица 4. Перестановочная матрица P и преобразованная матрица PAP'

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PAP' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Затем начинаем процедуру возврата: $j := j - 1 = 3$. В силу того, что

$$G^{3,1} \setminus Q^{3,1} = \emptyset, \quad \omega^{3,1} \setminus F^{3,1} = \{4, 6\} \neq \emptyset,$$

в качестве концевго элемента β выбираем любой, например, $\beta = 4$, $F^{3,1} := F^{3,1} \cup \{4\}$. А так как уровень $s = 1$, то необходимо сделать блочную проверку типа **A**:

$$j - 1 + \frac{|\omega^{j,1}|}{\rho^{j,1}} = 2 + \frac{2}{1} = 4 > \nu_0.$$

Она не выполняется, потому необходимо опуститься на последний уровень предыдущего блока ($j := j - 1 = 2$, $s := 1$). Множество $G^{2,1} \setminus Q^{2,1} = \{(4, 6)\}$ перспективных элементов, еще не рассмотренных в качестве узловых, содержит только один элемент. Его и выбираем в качестве узлового $\alpha^{2,1} = (4, 6)$. В силу того, что $j = \nu_0 - 1 = 2$, проводим блочную проверку типа **C**:

$$2(s - 1) + \rho^{j,s} = |D_{(4,6)}^{2,1}| = |\omega^{j,1}|$$

и убеждаемся ($0 + 2 = |D_{(4,6)}^{2,1}| \neq |\omega^{2,1}| = 4$) в том, что использование элементов этого уровня в качестве узловых и концевых не позволит построить раскраску с меньшим числом нульдиагональных блоков, чем рекордное. Тогда опускаемся на последний уровень предыдущего первого блока:

$$j := j - 1 = 1, \quad s := r^1 = 3.$$

Делаем проверку на целесообразность дальнейшего продвижения по данной ветви. Так как все элементы множества возможных продолжений уже были использованы в качестве узловых (т. е. в случае $G^{1,3} \setminus Q^{1,3} = \emptyset$), то с учетом того, что $\omega^{1,3} \setminus F^{1,3} = \{2, 3, 5\} \neq \emptyset$, на роль концевго элемента на третьем уровне

$$2(s - 1) + \rho^{1,s} = 4 + 1 = 5 > \left\lceil \frac{n}{\nu_0} \right\rceil = 3$$

должен быть рассмотрен (в соответствии с результатами сделанной проверки типа **A**) каждый из элементов множества $\omega^{1,3} \setminus F^{1,3} = \{2, 3, 5\}$.

Поэтому на третьем уровне сначала полагаем $\beta = 2$, $F^{1,3} := F^{1,3} \cup \{2\}$ и формируем множество $J^1 := \{1, 2, 8, 9, 10\}$, $k(1) := 5$.

Затем выполним прореживание, для чего необходимо построить соответствующие каждому уровню вспомогательные множества (при нечетном $-s = r^1 - 1, \dots, 1$). Вспомогательные множества второго уровня

$$\Psi^{1,2} = J^1 \setminus \{1, 8\} = \{2, 9, 10\}, \quad Z^{1,2} = \emptyset.$$

В силу того, что $Z^{1,2} = \emptyset$, множество возможных продолжений на втором уровне

$$G^{1,2} \setminus Q^{1,2} = \{(3, 9), (3, 7), (3, 10), (7, 9)\}$$

остаётся неизменным.

Рассмотрев вспомогательные множества первого уровня

$$\Psi^{1,1} = J^1 = \{1, 2, 8, 9, 10\}, \quad Z^{1,1} = \emptyset,$$

убеждаемся, что по той же причине, что и на предыдущем уровне, множество возможных продолжений остается неизменным.

И так как $\{\Psi^{1,1}\} \notin B$, то оно становится элементом базового множества $B := B \cup \{\Psi^{1,1}\}$. После этого переходим к построению второго нулядиагонального блока на дополнении $I_n \setminus J^1$. Увеличивая параметр номера блока на единицу $j := j + 1$ и полагая $s := r^j = 1$, строим опорное множество в соответствии с (3):

$$\omega^{2,1} := I_n \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{j-1} J^r \right) = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Далее на $\omega^{2,1}$ формируем множество $G^{2,1}$. Оно состоит из 4 равномошных элементов:

$$G^{2,1} = \{(4, 5), (4, 6), (5, 6), (3, 7)\}.$$

В качестве *узловой элемента* (претендента на роль искомой пары) на первом уровне построения второго нулядиагонального блока выбираем первый элемент $\alpha^{2,1} = (\alpha_1^{2,1}, \alpha_2^{2,1}) = (4, 5)$, для которого множество $D_{(q,p)}^{2,1}$ имеет мощность $|D_{(4,5)}^{2,1}| = 3$.

Причем каждый раз при изменении номера блока проверяем соотношение между номером очередного блока j и рекордным числом нулядиагональных блоков ν_0 . Выполняется ли равенство $j = \nu_0 - 1$? На таком этапе выполнения алгоритма $j = \nu_0 - 1 = 2$. А это значит, что необходимо сделать блочную проверку типа **C** на целесообразность дальнейшего продвижения по данной ветви дерева перебора:

$$2(s - 1) + \rho^{j,s} = |D_{(4,5)}^{2,1}| = 3 \neq |\omega^{2,1}| = 5.$$

Результат проверки отрицательный, что приводит к возврату на последний уровень предыдущего первого блока: $j := j - 1 = 1$, $s := r^1 = 3$.

Так как множество $\omega^{1,3} \setminus F^{1,3} = \{3, 5\}$, то на третьем уровне полагаем $\beta = 3$, $F^{1,3} := F^{1,3} \cup \{3\} = \{2, 3\}$ и формируем множество $J^1 := \{1, 3, 8, 9, 10\}$, $k(1) := 5$.

Затем проводим прореживание. Последовательно строим соответствующие каждому уровню вспомогательные множества (при нечетном числе элементов J^1 уровень $s = r^1 - 1, \dots, 1$). Из рассмотрения вспомогательных множеств второго уровня

$$\Psi^{1,2} = J^1 \setminus \{1, 8\} = \{3, 9, 10\}, \quad Z^{1,2} = \{(3, 10)\}, \quad Q^{1,2} := Q^{1,2} \cup Z^{1,2}$$

следует, что

$$Q^{1,2} = \{(9, 10), (2, 5), (2, 9), (2, 10), (5, 9), (5, 10), (3, 10)\}$$

и множество возможных продолжений

$$G^{1,2} \setminus Q^{1,2} = \{(3, 9), (3, 7), (7, 9)\}$$

уменьшится на один элемент. Строим вспомогательные множества первого уровня

$$\Psi^{1,1} = J^1 = \{1, 3, 8, 9, 10\}, \quad Z^{1,1} = \{(3, 10)\}, \quad Q^{1,1} := Q^{1,1} \cup Z^{1,1}.$$

Прореживание на первом уровне исключило из множества возможных продолжений один элемент $G^{1,1} \setminus Q^{1,1} = \{(1, 9), (2, 5), (2, 10), (5, 10), (8, 9), (1, 10), (8, 10), (9, 10), (1, 3), (3, 8), (3, 9), (1, 7), (2, 6), (2, 4), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 10), (5, 6), (6, 10), (7, 8), (7, 9)\}$.

Так как $\{\Psi^{1,1}\} \notin B$, то оно становится элементом базового множества $B := B \cup \{\Psi^{1,1}\} = \{\{1, 2, 5, 8, 9, 10\}, \{1, 2, 8, 9, 10\}, \{1, 3, 8, 9, 10\}\}$. Далее переходим к построению

второго нулядиагонального блока на дополнении $I_n \setminus J^1$. Увеличивая параметр номера блока на единицу $j := j + 1$ и полагая $s := r^j = 1$, строим опорное множество в соответствии с (3):

$$\omega^{2,1} := I_n \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{j-1} J^r \right) = \{2, 4, 5, 6, 7\}.$$

И на опорном множестве $\omega^{2,1}$ формируем множество $G^{2,1}$. Оно состоит из 6 равномоощных элементов $G^{2,1} = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$. В качестве *узлового элемента* (претендента на роль искомой пары) на первом уровне построения второго нулевого блока выбираем первый элемент $\alpha^{2,1} = (\alpha_1^{2,1}, \alpha_2^{2,1}) = (2, 4)$, для которого множество $D_{(q,p)}^{2,1}$ имеет мощность $|D_{(4,5)}^{2,1}| = 4$.

Проверяем соотношение между номером очередного блока j и рекордным числом нулядиагональных блоков ν_0 . Выполняется ли равенство $j = \nu_0 - 1$? На таком этапе выполнения алгоритма $j = \nu_0 - 1 = 2$. А это значит, что должны выполнить блочную проверку типа С на целесообразность дальнейшего продвижения по ветви дерева перебора:

$$2(s - 1) + \rho^{j,s} = |D_{(2,4)}^{2,1}| = 4 \neq |\omega^{2,1}| = 5.$$

Результат проверки отрицательный. Необходимо возвратиться на последний уровень предыдущего блока: $j := j - 1 = 1$, $s := r^1 = 3$.

И так как $\omega^{1,3} \setminus F^{1,3} = \{5\}$, то на третьем уровне полагаем $\beta = 5$, $F^{1,3} := F^{1,3} \cup \{5\} = \{2, 3, 5\}$. Затем формируем множество $J^1 := \{1, 5, 8, 9, 10\}$, $k(1) := 5$ и проводим прореживание, для чего необходимо построить соответствующие каждому уровню вспомогательные множества (нечетное число $k(1)$ элементов J^1 , $s = r^1 - 1, \dots, 1$).

Рассмотрение вспомогательных множеств второго уровня

$$\Psi^{1,2} = J^1 \setminus \{1, 8\} = \{5, 9, 10\}, \quad Z^{1,2} = \emptyset$$

убеждает в том, что операция прореживания на втором уровне не позволит исключить из рассмотрения дополнительные элементы:

$$Q^{1,2} = \{(9, 10), (2, 5), (2, 9), (2, 10), (5, 9), (5, 10), (3, 10)\}.$$

И множество возможных продолжений состоит из 3 элементов:

$$G^{1,2} \setminus Q^{1,2} = \{(3, 9), (3, 7), (7, 9)\}.$$

Для вспомогательных множеств первого уровня

$$\Psi^{1,1} = J^1 = \{1, 5, 8, 9, 10\}, \quad Z^{1,1} = \emptyset$$

характерно, что $Z^{1,1} = \emptyset$, т. е. на этом уровне прореживание не изменяет множество возможных продолжений.

В силу того, что $\{\Psi^{1,1}\} \notin B$, оно становится элементом базового множества

$$B := B \cup \{\Psi^{1,1}\} = \{\{1, 2, 5, 8, 9, 10\}, \{1, 2, 8, 9, 10\}, \{1, 3, 8, 9, 10\}, \{1, 5, 8, 9, 10\}\}.$$

После этого переходим к построению второго нулядиагонального блока на дополнении $I_n \setminus J^1$. Увеличивая параметр номера блока на единицу $j := j + 1$ и полагая $s := r^j = 1$, строим опорное множество в соответствии с (3):

$$\omega^{2,1} := I_n \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{j-1} J^r \right) = \{2, 3, 4, 6, 7\}.$$

Далее на $\omega^{2,1}$ формируем множество $G^{2,1}$, которое состоит из 4 элементов: $G^{2,1} = \{(2, 4), (2, 6), (4, 6), (3, 7)\}$. В качестве *узловой элемента* (претендента на роль искомой пары) на первом уровне построения второго нулевого блока выбираем первый элемент $\alpha^{2,1} = (\alpha_1^{2,1}, \alpha_2^{2,1}) = (2, 4)$, для которого множество $D_{(q,p)}^{2,1}$ имеет мощность $|D_{(2,4)}^{2,1}| = 3$.

Проверяем соотношение между номером очередного блока j и рекордным числом нулядиагональных блоков ν_0 . Выполняется ли равенство $j = \nu_0 - 1$? На таком этапе выполнения алгоритма $j = \nu_0 - 1 = 2$. А это значит, что должны выполнить блочную проверку типа **С** на целесообразность дальнейшего продвижения по данной ветви дерева перебора:

$$2(s - 1) + \rho^{j,s} = |D_{(2,4)}^{2,1}| = 3 \neq |\omega^{2,1}| = 5.$$

Результатом проверки является возврат на последний уровень предыдущего блока:

$$j := j - 1 = 1, s := r^1 = 3.$$

И так как $\omega^{1,3} \setminus F^{1,3} = \emptyset$, то опускаемся на уровень ниже $s := s - 1 = 2$.

Множество $G^{1,2} \setminus Q^{1,2} = \{(3, 9), (3, 7), (7, 9)\}$ не пусто. В качестве узловой элемента выбираем $\alpha^{1,2} = (3, 9)$. В силу того, что $j = 1$, делаем проверку типа **В**:

$$2(s - 1) + \rho^{1,s} = 4 > \left\lceil \frac{n}{\nu_0} \right\rceil = 3.$$

Она показывает, что такой вариант (с использованием элемента $\alpha^{1,2} = (3, 9)$ в качестве узловой на втором уровне) необходимо рассматривать как перспективный, при этом $Q^{1,2} := Q^{1,2} \setminus \{(3, 9)\}$. Затем формируем опорное множество следующего уровня: $s := s + 1$, $\omega^{1,3} = (\omega^{1,2} \cup D_{(3,9)}^{1,2}) = \{7, 10\}$. Вводим рабочие множества $Q^{1,3} := \emptyset$, $F^{1,3} := \emptyset$. С учетом того, что

$$G^{1,3} := \emptyset, \omega^{1,3} \setminus F^{1,3} = \{7, 10\} \neq \emptyset,$$

в качестве конечного выбираем $\beta = \{7\}$ и тут же $F^{1,3} := F^{1,3} \cup \{7\}$. Затем формируем множество $J^1 := \{1, 3, 7, 8, 9\}$, $k(1) := 5$. Выполняем прореживание, для чего необходимо построить соответствующие каждому уровню вспомогательные множества (нечетное число $k(1)$ элементов J^1). Рассматриваем вспомогательные множества второго уровня

$$\Psi^{1,2} = J^1 \setminus \{1, 8\} = \{3, 7, 9\}, \quad Z^{1,2} = \{(3, 7), (7, 9)\}, \quad Q^{1,2} := Q^{1,2} \cup Z^{1,2}.$$

Операция прореживания позволила исключить из рассмотрения элементы $\{(3, 7), (7, 9)\}$. Множество возможных продолжений будет состоять из одного элемента ($G^{1,2} \setminus Q^{1,2} = \{(3, 10)\}$). Для вспомогательных множеств первого уровня

$$\Psi^{1,1} = J^1 = \{1, 3, 7, 8, 9\}, \quad Z^{1,1} = \{(1, 7), (3, 7), (7, 8), (7, 9)\}, \quad Q^{1,1} := Q^{1,1} \cup Z^{1,1}$$

прореживание позволило исключить на первом уровне 4 элемента, принадлежащие множеству возможных продолжений первого уровня. В силу того, что множество $\Psi^{1,1}$ не является элементом множества B ($\{\Psi^{1,1}\} \notin B$), оно становится элементом базового множества $B := B \cup \{\Psi^{1,1}\} = \{\{1, 2, 5, 8, 9, 10\}, \{1, 2, 8, 9, 10\}, \{1, 3, 8, 9, 10\}, \{1, 5, 8, 9, 10\}, \{1, 3, 7, 8, 9\}\}$. Затем переходим к построению второго нулядиагонального блока на дополнении $I_n \setminus J^1$. Увеличивая параметр номера блока на

единицу $j := j + 1$ и полагая $s := r^j = 1$, строим опорное множество в соответствии с (3):

$$\omega^{2,1} := I_n \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{j-1} J^r \right) = \{2, 4, 5, 6, 10\}, \quad Q^{2,1} := \emptyset.$$

Далее на $\omega^{2,1}$ формируем множество $G^{2,1} = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 10), (4, 5), (4, 6), (4, 10), (5, 6), (5, 10), (6, 10)\}$. Оно состоит из 10 элементов. В качестве *узлового* (претендента на роль искомой пары) на первом уровне построения второго нулевого блока выбираем первый элемент $\alpha^{2,1} = (\alpha_1^{2,1}, \alpha_2^{2,1}) = (2, 4)$, для которого множество $D_{(q,p)}^{2,1}$ имеет мощность $|D_{(2,4)}^{2,1}| = 5$. С учетом выполнения равенства $j = \nu_0 - 1 = 2$ делаем блочную проверку типа **C**: $2(s - 1) + \rho^{j,s} = 5 = |\omega^{j,1}| = 5$.

При *узловом* элементе $\alpha^{2,1} = (2, 4)$ опорное множество второго уровня

$$\omega^{2,2} = \left(\omega^{2,1} \cap D_{(2,4)}^{1,1} \right) \setminus \{2, 4\} = \{5, 6, 10\}$$

содержит 3 элемента. Вводим рабочие множества $Q^{2,2} := \emptyset$, $F^{2,2} := \emptyset$. На $\omega^{2,2}$ формируем множество $G^{2,2}$. Оно содержит только 3 элемента: $G^{2,2} = \{(5, 6), (5, 10), (6, 10)\}$. В качестве узлового выбираем $\alpha^{2,2} = (5, 6)$ и делаем блочную проверку типа **C**:

$$2(s - 1) + \rho^{j,s} = 3 = |\omega^{j,1}| = 3.$$

Проверка показывает, что можно продолжать движение по этой ветви. Потому строим опорное множество третьего уровня ($s := s + 1$): $\omega^{2,3} = \left(\omega^{2,2} \cap D_{(5,6)}^{1,1} \right) \setminus \{5, 6\} = \{10\}$. Оно содержит один элемент. Вводим рабочие множества $Q^{2,3} := \emptyset$, $F^{2,3} := \emptyset$. На $\omega^{2,3}$ формируем множество $G^{2,3} = \emptyset$, а $\omega^{2,3} \setminus F^{2,3} = \{10\} \neq \emptyset$, потому выбираем в качестве конечного $\beta = 10$ и строим множество $J^2 := \{2, 4, 5, 6, 10\}$, $k(1) := 5$. Объединение $J^1 \cup J^2 \equiv I_n$, а это значит, что раскраска построена. Причем число нульдиагональных блоков $\nu = 2 < \nu_0$ рекордно. Перестановка, которая обеспечивает такую конфигурацию (табл. 5), имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 7 & 8 & 9 & 2 & 4 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Таблица 5. Перестановочная матрица P и преобразованная матрица PAP'

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PAP' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти раскраску с меньшим числом нульдиагональных блоков не удастся, а значит, построенная раскраска решает исходную задачу (хроматическое число $\gamma = \nu_0 = 2$).

4. Заключение. В основе предложенного метода лежит идея построения оптимальной раскраски [7] путем перебора различных комбинаций максимальных независимых множеств графа [8] на подмножестве вершин. Тем не менее разработанный метод выделения нульдиагональных блоков, активно использующий структурные особенности бинарных матриц, позволяет использовать специфичные критерии отсечения ветвей дерева поиска, что обеспечивает существенное сокращение количества рассматриваемых вариантов.

Литература

1. Олемской И. В., Хитров Г. М., Виташевская И. С. О некоторых инвариантах квадратных $(0,1)$ -матриц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. Вып. 1. С. 38–45.
2. Фирюлина О. С. Вычисление неплотности квадратных $(0,1)$ -матриц // Сб. трудов XLIII Международной науч. конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость». СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. С. 55–60.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры: учебник для вузов. СПб.: Лань, 2021. 432 с.
4. Олемской И. В. Алгоритм выделения структурных особенностей // Николай Ефимович Кирин: сб. ст.; под ред. В. В. Жука, В. Ф. Кузютина. СПб.: АССПИН, 2003. С. 234–251.
5. Олемской И. В. Методы интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 180 с.
6. Олемской И. В., Фирюлина О. С. Алгоритм поиска наибольшего независимого множества // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 1. С. 79–89.
7. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: учебник для вузов. СПб.: Питер, 2009. 384 с.
8. Фирюлина О. С. Нахождение всех максимальных независимых множеств неориентированного графа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 1. С. 63–69.

Статья поступила в редакцию 1 декабря 2022 г.

Статья принята к печати 19 января 2023 г.

Контактная информация:

Олемской Игорь Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; i.olemskoj@spbu.ru

Фирюлина Оксана Сергеевна — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.; o.firyulina@spbu.ru

Algorithm for optimal coloring of square $(0,1)$ -matrices

I. V. Olemskoy, O. S. Firyulina

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Olemskoy I. V., Firyulina O. S. Algorithm for optimal coloring of square $(0,1)$ -matrices. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 1, pp. 90–108. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.108> (In Russian)

The paper proposes an algorithm for solving the configuration-optimization coloring problem for square $(0,1)$ -matrices, which is based on the method of selection their structural features. The algorithm belongs to the method's of backtracking, however, the construction of the optimal solution is carried out among the options that provide a certain configuration, due to which the size of the search tree is significantly reduced. A detailed scheme of its operation

is given, and the effectiveness of the solution is demonstrated by the example of calculating the chromatic number of a specific $(0,1)$ -matrix.

Keywords: graph coloring, chromatic number, $(0,1)$ -matrix.

References

1. Olemskoy I. V., Hitrov G. M., Vitashevskaya I. S. O nekotorykh invariantakh kvadratnykh $(0,1)$ -matrits [On some invariants of square $(0,1)$ -matrices]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2007, iss. 1, pp. 38–45. (In Russian)
2. Firyulina O. S. Vychislenie neplotnosti kvadratnykh $(0,1)$ -matric [Calculation of the nondensity of square $(0,1)$ -matrices]. *Proceedings of the XLIII International Scientific Conference of postgraduates and students "Control processes and stability"*. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2012, pp. 55–60. (In Russian)
3. Kurosh A. G. *Kurs vysshey algebrы*. Uchebnik dlya vuzov [*Higher algebra course*. A textbook for universities]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2021, 432 p. (In Russian)
4. Olemskoy I. V. Algoritm vydeleniya strukturnykh osobennostey [Algorithm for the identification of structural features]. *Nikolay Efimovich Kirin*. Collection of articles. St. Petersburg, ASSPIN Publ., 2003, pp. 234–251. (In Russian)
5. Olemskoy I. V. *Metody integrirvaniya sistem strukturno razdelennykh differentsial'nykh uravneniy* [Methods of integration of systems of structurally separated differential equations]. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2009, 180 p. (In Russian)
6. Olemskoy I. V., Firyulina O. S. Algoritm poiska naibol'shego nezavisimogo mnozhestva [Algorithm for finding the maximum independent set]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2014, iss. 1, pp. 79–89. (In Russian)
7. Novikov F. A. *Diskretnaya matematika dlya programmistov*. Uchebnik dlya vuzov [*Discrete mathematics for programmers*. A textbook for universities]. St. Petersburg, Piter Publ., 2009, 384 p. (In Russian)
8. Firyulina O. S. Nakhozhdenie vsekh maksimal'nykh nezavisimykh mnozhestv neorientirovannogo grafa [Finding all maximal independent sets of an undirected graph]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2013, iss. 1, pp. 63–69. (In Russian)

Received: December 1, 2022.

Accepted: January 19, 2023.

Authors' information:

Igor V. Olemskoy — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; i.olemskoj@spbu.ru

Oxana S. Firyulina — PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer; o.firyulina@spbu.ru