ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.929
MSC 34K20

Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. II. Системы с аддитивной правой частью*

А. В. Екимов, А. П. Жабко, П. В. Яковлев

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В.* Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. II. Системы с аддитивной правой частью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 1. С. 4–9.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.101

Рассматривается неуправляемая система дифференциально-разностных уравнений с однородной аддитивной правой частью и линейно возрастающим запаздыванием. Известны достаточные условия асимптотической устойчивости для ряда частных случаев таких систем. Приведена теорема Разумихина об асимптотической устойчивости однородных систем с пропорциональным запаздыванием. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости на основе асимптотической устойчивости исходной системы без запаздывания при помощи функции Ляпунова.

Ключевые слова: система дифференциально-разностных уравнений, линейно возрастающее запаздывание, асимптотическая устойчивость, однородная система.

1. Введение. В настоящее время не ослабевает актуальность исследования математических моделей, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с линейно возрастающим запаздыванием. К таким моделям относятся, в частности, модель информационного сервера [1], распространение эпидемии [2] и др. В работе [3] рассматривалась стабилизация линейной системы с линейным пропорциональным запаздыванием. В [4–8] получены достаточные условия асимптотической устойчивости систем с запаздываниями, линейно зависящими от времени для ряда частных случаев.

---

* Первую часть статьи см.: *Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В.* Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейно-управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308

В настоящей статье изучается асимптотическая устойчивость неуправляемой системы дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием и однородной аддитивной правой частью. Приведена теорема Разумихина об асимптотической устойчивости данной системы. Доказана теорема об асимптотической устойчивости исследуемой системы на основе асимптотической устойчивости исходной системы без запаздывания. На основе функции Ляпунова системы-прототипа без запаздывания построена функция Ляпунова для изучаемой системы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений с однородными правыми частями

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(\alpha t)), \quad 0 < \alpha < 1, \ x(t) \in R^n, \tag{1}$$

где f и g — однородные векторные функции порядка $\mu > 1$. Начальные условия задаются моментом времени t_0, вектором x_0 и начальной функцией $\phi \in PC([\alpha t_0, t_0]) \to R^n; \ \phi(t_0) = x_0; \ t_0 > 0$.

Приведем без доказательства теорему об асимптотической устойчивости исходной системы уравнений.

Теорема 1 (теорема Разумихина). *Если существуют положительно определенная однородная порядка $\gamma > 2$ функция $V(y) \in C^2(R^n)$ и положительно определенная однородная порядка $k = \gamma + \mu - 1$ функция $W(y) \in C^1(R^n)$ такие, что на множестве кривых*

$$S_t = \{x_t \in PC([\alpha t, t], R^n) \mid V(x(\tau)) \leqslant kV(x(t)), \quad k > 1, \ \tau \leqslant t, \ t \geqslant t_0 \geqslant 0\}$$

справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right)^T (f(x(t)) + g(x(\alpha t))) \leqslant -W(x(t)),$$

тогда нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Следующая теорема дает возможность проанализировать устойчивость системы (1) при помощи аналогичной системы-прототипа без запаздывания.

Теорема 2. *Если вспомогательная система уравнений*

$$\dot{y}(t) = f(y(t) + g(y(t)) \tag{2}$$

асимптотически устойчива по Ляпунову, то нулевое решение системы (1) *также асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку однородная система (2) асимптотически устойчива, то существуют [9] положительно определенная однородная порядка $\gamma > 2$ функция $V(y) \in C^2(R^n)$ и положительно определенная однородная порядка $k = \gamma + \mu - 1$ функция $W(y) \in C^1(R^n)$ такие, что

$$\left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right)^T (f(x(t)) + g(x(t)) = -W(x(t)).$$

Производная функции $V(x(t, t_0, \phi)$ в силу системы (1) равна

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right)^T (f(x(t)) + g(x(\alpha t)) =$$

$$= -W(x(t)) + \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right)^T (g(x(\alpha t)) - g(x(t))) =$$

$$= -W(x(t)) + \frac{dV(x(t))}{dt} = \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right)^T \frac{\partial g(x(\alpha t)) + \theta(x(t) - x(\alpha t))}{\partial x}(x(\alpha t) - x(t)),$$

где $\theta \in [0, 1]$. Если $x(t)$ является решением исходной системы (1), то, еще раз применяя теорему о среднем значении, получим при $t \geqslant \alpha^{-1} t_0$ оценки

$$x(\alpha t) - x(t) = \dot{x}(\alpha t + \psi(1-\alpha)t)(\alpha - 1)t,\ \ \psi \in [0, 1],$$

$$\|\dot{x}(\alpha t + \psi(1-\alpha)t)\| \leqslant \|f(x(\alpha t + \psi(1-\alpha)t))\| + \|g(x(\alpha(\alpha t + \psi(1-\alpha)t)))\|. \qquad (3)$$

Учитывая однородность функций $V(y), W(y), f(y), g(y)$ и их производных, находим,что справедливы оценки [9]

$$\underline{v}\|y\|^{\gamma} \leqslant V(y) \leqslant \overline{v}\|y\|^{\gamma},$$
$$\underline{w}\|y\|^{\gamma+\mu-1} \leqslant W(y) \leqslant \overline{w}\|y\|^{\gamma+\mu-1},$$
$$\|f(y)\| \leqslant \overline{f}\|y\|^{\mu}, \quad \|g(y)\| \leqslant \overline{g}\|y\|^{\mu},$$
$$\left\|\frac{\partial g(y)}{\partial y}\right\| \leqslant \overline{g}_1\|y\|^{\mu-1}, \quad \left\|\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right\| \leqslant \overline{v}_1\|y\|^{\gamma-1},$$

в которых $\underline{v}, \overline{v}, \underline{w}, \overline{w}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{g}_1, \overline{v}_1$ — некоторые положительные вещественные константы. Следовательно, для функций $x_t \in S_t$ выполняется условие

$$\underline{v}\|x(\tau)\|^{\gamma} \leqslant k\overline{v}\|x(t)\|^{\gamma}.$$

Поэтому, учитывая (3), имеем неравенство

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant -\underline{w}\|x(t)\|^{\gamma+\mu-1} + \overline{v}_1\|x(t)\|^{\gamma-1}\overline{g}_1\left(\frac{k\overline{v}}{\underline{v}}\right)^{\frac{\mu-1}{\gamma}}\|x(t)\|^{\mu-1} \times$$
$$\times\ (\overline{f} + \overline{g})\left(\frac{k\overline{v}}{\underline{v}}\right)^{\frac{\mu}{\gamma}}\|x(t)\|^{\mu}(1-\alpha)t\ \leqslant$$
$$\leqslant\ -(\overline{w} - A\|x(t)\|^{\mu-1}t)\|x(t)\|^{\gamma+\mu-1},$$

где $A = \overline{v}_1(1-\alpha)(\overline{f} + \overline{g})\overline{g}_1\left(\frac{k\overline{v}}{\underline{v}}\right)^{\frac{2\mu-1}{\gamma}}$. Таким образом, производная функции $V(x(t)$ вдоль решений системы (1), принадлежащих множеству S_t, удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{dV(x(t))}{dt}4 \leqslant -\underline{v}^{\frac{1-\gamma-\mu}{\gamma}}\left(\underline{w} - A\underline{v}^{\frac{1-\mu}{\gamma}}V(x(t))^{\frac{\mu-1}{\gamma}}t\right)V(x(t))^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}}.$$

Предположим, что при $\alpha t_0 \leqslant \tau \leqslant \alpha^{-1}t_0$ выполнены условия

$$V(x(\tau)) \leqslant kV(x(\alpha^{-1}t_0)) \qquad (4)$$

и

$$B = \underline{w} - A\underline{v}^{\frac{1-\mu}{\gamma}}V(x(\alpha^{-1}t_0))^{\frac{\mu-1}{\gamma}}\alpha^{-1}t_0 > 0.$$

Тогда при $t \geqslant \alpha^{-1}t_0$ справедливы неравенства

$$V(x(t)) \leqslant kV(x(\alpha^{-1}t_0)),$$

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant -\underline{v}^{\frac{1-\gamma-\mu}{\gamma}} BV(x(t))^{\frac{\gamma+\mu-1}{\gamma}}.$$

Проинтегрировав второе неравенство при $t \geqslant \alpha^{-1}t_0$, получаем оценку

$$V(x(t)) \leqslant V(x(\alpha^{-1}t_0)) \left(1 + \underline{v}^{\frac{1-\gamma-\mu}{\gamma}} B\frac{\mu-1}{\gamma}(t-\alpha^{-1}t_0)\right)^{\frac{\gamma}{1-\mu}}. \tag{5}$$

Для завершения доказательства заметим, что полученная оценка (5) справедлива, если при $t \geqslant \alpha^{-1}t_0$ и $\tau \in [\alpha t, t]$ выполняется условие $V(x(\tau)) \leqslant kV(x(t))$. Поэтому на множестве S_t нет решений уравнения (1), если при $t \geqslant \alpha^{-1}t_0$ выполняется неравенство

$$V(x(\alpha^{-1}t_0)) \left(1 + \underline{v}^{\frac{1-\gamma-\mu}{\gamma}} B\frac{\mu-1}{\gamma}(\alpha t-\alpha^{-1}t_0)\right)^{\frac{\gamma}{1-\mu}} <$$

$$< V(x(t_0)) \left(1 + \underline{v}^{\frac{1-\gamma-\mu}{\gamma}} B\frac{\mu-1}{\gamma}(\alpha^{-1} t-\alpha^{-1}t_0)\right)^{\frac{\gamma}{1-\mu}}.$$

Обеспечить существование решения на множестве S_t можно выбором параметра $k \geqslant \alpha^{-2}$. □

З а м е ч а н и е. Условие (4) дает оценку области асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

3. Заключение. В данной статье рассматривается неуправляемая система дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием с однородной аддитивной правой частью. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости такой системы на основе асимптотической устойчивости аналогичной системы без запаздывания, доказательство основано на построении функции Ляпунова из функции Ляпунова для системы без запаздывания.

Литература

1. *Жабко А. П., Чижова О. Н.* Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 105–115.

2. *Екимов А. В., Чижова О. Н., Зараник У. П.* Устойчивость однородных нестационарных систем дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 415–424. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.401

3. *Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В.* Устойчивость дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308

4. *Alexandrova I. V., Zhabko A. P.* At the junction of Lyapunov — Krasovskii and Razumikhin approaches // IFACPapersOnLine. 2018. Vol. 51. N 14. P. 147–152.

5. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems Control Letters. 1992. Vol. 19. P. 467–473.

6. *Александров А. Ю., Жабко А. П., Печерский Б. С.* Функционалы полного типа для некоторых классов однородных дифференциально-разностных систем // Труды 8-й Междунар. конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». Воронеж: Научная книга, 2015. С. 5–8.

7. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53. № 3. С. 393–403.

8. *Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U.* Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. N 2. P. 67–72.

9. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2022 г.
Статья принята к печати 19 января 2023 г.

Контактная информация:

Екимов Александр Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.ekimov@spbu.ru

Жабко Алексей Петрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Яковлев Павел Валентинович — канд. физ.-мат. наук; w330433@gmail.com

The stability of differential-difference systems with linearly increasing delay. II. Systems with additive right side*

A. V. Ekimov, A. P. Zhabko, P. V. Yakovlev

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Ekimov A. V., Zhabko A. P., Yakovlev P. V. The stability of differential-difference systems with linearly increasing delay. II. Systems with additive right side. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 1, pp. 4–9. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.101 (In Russian)

The article considers an uncontrolled system of differential-difference equations with a homogeneous additive right side and linearly increasing delay. Sufficient conditions for asymptotic stability are known for a number of special cases of such systems. Razumikhin's theorem on the asymptotic stability of homogeneous systems with proportional delay is formulated. Sufficient conditions for asymptotic stability are obtained basing on the asymptotic stability of the initial system without delay and constructing the Lyapunov function.

Keywords: system of linear differential-differencel equations, linearly increasing, time delay, asymptotic stability, homogeneous system.

References

1. Zhabko A. P., Chizhova O. N. Analiz ustojchivosti odnorodnogo differencial'no-raznostnogo uravnenija s linejnym zapazdyvaniem [Stability analysis of homogeneous differential-difference equation with linear delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2015, iss. 3, pp. 105–115. (In Russian)

2. Ekimov A. V., Chizhova O. N., Zaranik U. P. Ustoichivost odnorodnykh nestatsionarnykh system differentsial'no-raznostnykh uravnenij s linejno vozrastajushim zapazdyvaniem [Stability of homogeneous nonstationary systems of differential-difference equations with linearly time delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 415–424. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.401 (In Russian)

3. Ekimov A. V., Zhabko A. P., Yakovlev P. V. Ustoichivost' differencial'no-raznostnykh system s lineyno vozrastayushim zapazdyvaniem. I. Lineynye upravlyaemye systemy [The stability of differential-difference equations with proportional time delay. I. Linear controlling systems]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308 (In Russian)

4. Alexandrova I. V., Zhabko A. P. At the junction of Lyapunov — Krasovskii and Razumikhin approaches. *IFACPapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 14, pp. 147–152.

5. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems Control Letters*, 1992, vol. 19, pp. 467–473.

* First part see: Ekimov A. V., Zhabko A. P., Yakovlev P. V. The stability of differential-difference systems with linearly increasing delay. I. Linear controlling systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 316–325. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.308 (In Russian)

6. Alexandrov A. Y., Zhabko A. P., Pechersky B. S. Funktsionaly polnogo typa dlya nekotorykh classov odnorodnykh differentsialno-raznostnykh system [Functionals of full type for several classes of homogeneous differential-defference systems]. *Proceedings of 8^{th} International conference "Modern Methods in Applied Mathematics, Control Theory and Computer Technology"*. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2015, pp. 5–8. (In Russian)

7. Alexandrov A. Y., Zhabko A. P. Ob asimptoticheskoy ustoichivosty resheniy nelineynykh system s zapazdyvaniem [On asymptotic stability of solution of non linear systems with time delay]. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 393–403. (In Russian)

8. Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U. Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay. *Cybernetics and Physics*, 2016, vol. 5, no. 2, pp. 67–72.

9. Zubov V. I. *Ustoichivost dvizheniya* [*Stability of motion*]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1984, 232 p. (In Russian)

Received: December 26, 2022.
Accepted: January 19, 2023.

Authors' information:

Alexander V. Ekimov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; a.ekimov@spbu.ru

Aleksei P. Zhabko — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Pavel V. Yakovlev — PhD in Physics and Mathematics; w330433@gmail.com