

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет Прикладной математики – процессов управления

Кафедра МЭКС

Новикова Валерия Сергеевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Расчет диодной системы с полевым катодом в
сферической системе координат**

Направление 010900

«Прикладные математика и физика»

Руководитель образовательной программы,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Егоров Н. В.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Виноградова Е. М.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Владимирова Л. В.

Санкт-Петербург
2016

Оглавление

Введение	2
1 Метод разделения переменных в сферической системе координат	4
1.1 Сферические координаты	4
1.2 Уравнение Лапласа в сферической системе координат	5
1.3 Построение общего решения уравнения Лапласа	6
2 Моделирование полевого катода в виде сферы на конусе	8
2.1 Физическая постановка задачи моделирования полевого катода	8
2.2 Решение задачи 1	10
2.2.1 Математическая модель задачи 1	10
2.2.2 Распределение потенциала задачи 1	11
2.3 Решение задачи 2	12
2.3.1 Математическая модель задачи 2	12
2.3.2 Распределение потенциала задачи 2	13
2.4 Результаты численных расчетов	14
Заключение	16
Приложение	17

Введение

В современных научных изысканиях и повседневной жизни широкое применение находят, так называемые, вакуумные электронные устройства: электронные микроскопы, световые индикаторы, плоские дисплеи. В основе этих приборов лежит явление автоэлектронной эмиссии полевого катода[1]. Моделированию и всестороннему изучению этого явления и посвящена данная работа.

Автоэлектронной эмиссией называется явление испускания электронов проводящими телами под действием электрического поля напряженностью $F = 10^7 - 10^8$ В/см. Для создания такого электрического поля, к обычным макроскопическим электродам необходимо было бы прикладывать напряжения в десятки миллионов вольт. На практике автоэлектронную эмиссию можно возбудить при меньших напряжениях, если придать катоду форму тонкого острья с радиусом вершины в десятые или сотые доли микрона.

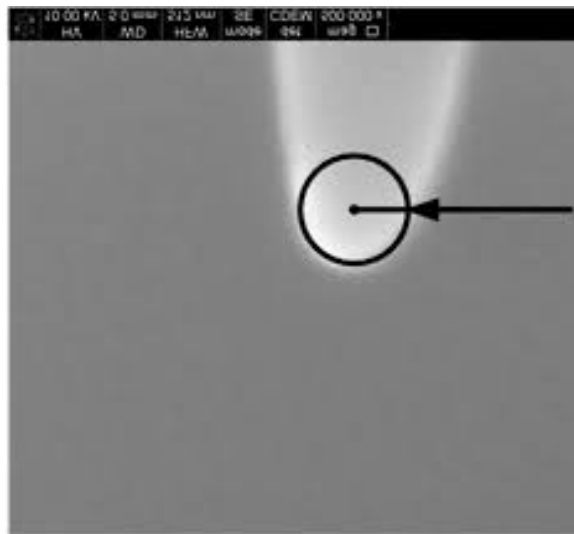


Рис. 1: Одиночное полевое острие

Открытие автоэлектронной эмиссии принадлежит великому экспериментатору Роберту Вуду. В 1897 году, при исследовании вакуумного разряда в сильном электрическом поле, было замечено испускание электронов, вызвавшее свечение стекла.

После появления такого понятия как автоэлектронная эмиссия, возникла совершенно новая область микро- и нанoeлектроники – вакуумная микроэлектроника, что позволило создать новые фундаментальные методы ис-

следования топологии поверхности с атомным разрешением (сканирующая и просвечивающая электронная микроскопия сверхвысокого разрешения, туннельная микроскопия, электронная голография и др.)[2].



Рис. 2: Роберт Вуд

Глава 1

Метод разделения переменных в сферической системе координат

1.1 Сферические координаты

Сферическими координатами называют систему координат для отображения геометрических свойств фигуры в трёх измерениях посредством задания трёх координат (r, θ, φ) , где r — кратчайшее расстояние до начала координат, а θ и φ — зенитный и азимутальный углы соответственно.

Если заданы сферические координаты точки, то переход к декартовым осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \sin(\varphi), \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = r \cos(\theta). \end{cases} \quad (1.1)$$

Обратно, от декартовых к сферическим:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2 Уравнение Лапласа в сферической системе координат

Задача нахождения распределения потенциала будет решаться в сферической системе координат (r, φ, θ) . Для начала рассмотрим уравнение Лапласа в ДПСК:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

В сферической системе координат уравнение Лапласа принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Найдем метрические коэффициенты, или коэффициенты Ламе для данной системы координат, которые определяются формулой:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2},$$

где $i = (1, 2, 3)$. Получили:

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin(\theta).$$

С помощью полученных коэффициентов мы можем найти выражения для grad , div и rot в данной с.к.:

$$\mathbf{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} i_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} i_2 + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} i_3,$$

$$\text{div} A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_1) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_2) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} A = & \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right] i_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right] i_2 + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right] i_3. \end{aligned}$$

1.3 Построение общего решения уравнения Лапласа

Рассмотрим уравнение Лапласа в сферической системе координат (1.1, 1.2). Так как рассматриваемая задача является осесимметричной и исключается зависимость от φ , то уравнение примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Для разрешения уравнения (1.1) используется метод разделения переменных (МРП). Функция ϕ представляется как произведение двух функций: $\phi = R(r)T(\theta)$, тогда (2) примет вид:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} = 0 \quad (1.4)$$

Идея метода соответствует его названию: путем специальных замен исходное уравнение в переменных сводится к решению отдельных уравнений по меньшему числу переменных, в том числе к решению в различных уравнений для каждой переменной.

Для получения решения (1.4) рассматривается 2 случая, в каждом из которых по 2 дифференциальных уравнения.

I случай:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right)}{\partial r} = \lambda^2 \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} = -\lambda^2 \quad (1.6)$$

II случай:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right)}{\partial r} = -\lambda^2 \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \left(\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} = \lambda^2; \quad (1.8)$$

Более подробно остановимся на случае I. Решение уравнения (1.5) ищется в виде: $R = r^n$. Получаем:

$$R = A_n r^n + B_n r^n,$$

где A_n и B_n - const, $\lambda = n$, $\lambda = -n - 1$.

Для получения решения уравнения (1.6) необходимо сделать замену:

$$x = \cos(\theta)$$

Перепишем (1.6):

$$\frac{1}{T} \left((1-x^2) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Получено уравнение Лежандра. Решение данного уравнения представимо в виде:

$$T = C_n P_n(x) + D_n Q_n(x),$$

где P_n и Q_n - полиномы Лежандра 1 - го и 2 - го рода соответственно.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n (x^2 - 1)^n}{\partial x^n},$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Таким образом решением I, будет являться функция:

$$U_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^n) (C_n P_n(x) + D_n Q_n(x));$$

Решение для (1.7) и (1.8) строится аналогично.

Глава 2

Моделирование полевого катода в виде сферы на конусе

2.1 Физическая постановка задачи моделирования полевого катода

В данной работе моделируется диодная эмиссионная система на основе полевого катода [3, 4]. Для возбуждения полевой эмиссии с катода радиус кривизны поверхности на вершине полевого острия должен быть на несколько порядков меньше, чем остальные геометрические параметры системы [5, 6, 7, 8]. Рассмотрим систему, в которой вершина катода имеет сферическую форму радиуса R_1 , «тело» катода — конусовидную поверхность с углом раствора θ_1 , анод представляет собой часть сферической поверхности радиуса R_2 .

Поверхность катода задается $r = R_1$ при $\theta \in (0, \theta_0)$ - сфера на вершине острия, и $\theta = \theta_0$ при $r \in (R_1, R_2)$ - тело острия. Поверхность анода задается $r = R_2$ при $\theta \in (0, \theta_0)$.

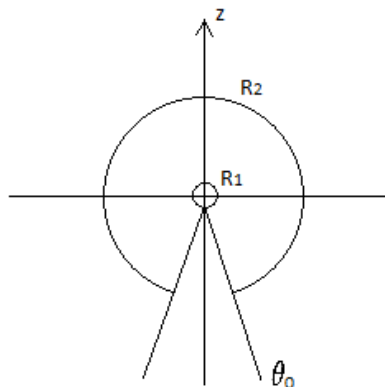


Рис. 2.1: Схематическое изображение эмиссионной системы 1

Для того, чтобы найти распределение потенциала рассмотрим 2 различные задачи:

- Задача 1. Схематическое изображение представлено на рис. (2.1);
- Задача 2. Схематическое изображение представлено на рис. (2.2).

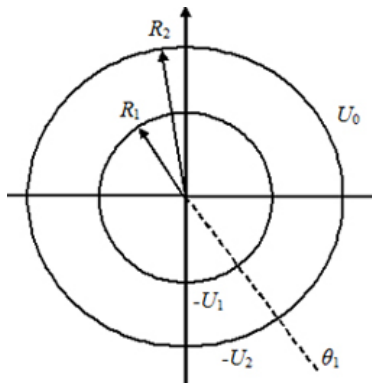


Рис. 2.2: Схематическое изображение эмиссионной системы 2

2.2 Решение задачи 1

2.2.1 Математическая модель задачи 1

На вершине катода задается граничное условие 1 рода - функция $f_1(\theta)$. На теле острия задается граничное условие 1 рода - функция $f_3(r)$. На аноде задается граничное условие 1 рода - функция $f_2(\theta)$.

Требуется найти функцию $U(r, \theta, \varphi)$ методом разделения переменных, удовлетворяющую уравнению Лапласа (2.1) и заданным граничным условиям (2.2). Рассматривается осесимметричная задача, что означает отсутствие зависимости от φ .

Граничная задача:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (2.1)$$

$$U(R_1, \theta) = f_1(\theta),$$

$$U(R_0, \theta) = f_2(\theta), \quad (2.2)$$

$$U(r, \theta_0) = f_3(r).$$

2.2.2 Распределение потенциала задачи 1

Распределение потенциала $U_1(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Зададим граничные условия в виде $f_1(\theta) = 0$, $f_2(\theta) = V(\theta)$ и $f_3(\theta) = 0$:

$$\begin{aligned} U_1(R_1, \theta) &= 0, \\ U_1(R_2, \theta) &= V(\theta), \\ U_1(r, \theta_0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В силу того, что в рассматриваемую область системы входит $\theta = 0$, то коэффициенты $D_n = 0$, т.к. функции (полиномы) Лежандра 2 рода не ограничены при $\theta = 0$ и $\theta = \pi(Q_n(1) \rightarrow \infty)$. Тогда:

$$U_1(r, \theta) = (A_n r^{\nu_n} + B_n r^{-\nu_n-1}) P_{\nu_n}(\cos(\theta)); \tag{2.4}$$

Подставив (2.4) в граничные условия (2.3) получаем:

$$U_1(R_1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n R_1^{\nu_n} + B_n R_1^{-\nu_n-1}) P_{\nu_n}(\cos(\theta)) = 0, \tag{2.5}$$

$$U_1(r, \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{\nu_n} + B_n r^{-\nu_n-1}) P_{\nu_n}(\cos(\theta_0)) = V(\theta), \tag{2.6}$$

$$U_1(R_2, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n R_2^{\nu_n} + B_n R_2^{-\nu_n-1}) P_{\nu_n}(\cos(\theta)) = 0. \tag{2.7}$$

Для разрешения уравнений (2.5), (2.6), (2.7) проинтегрируем их от 0 до θ_0 , а так же домножим обе части равенств на $\sin(\theta)$ и $P_n(\cos(\theta))$.

Отдельно рассмотрим получившийся интеграл, воспользовавшись свойством ортогональности функций Лежандра:

$$\int_0^{\theta_0} \sin(\theta) P_{\nu_n}(\cos(\theta)) P_{\nu_m}(\cos(\theta)) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m; \\ N_m, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Где $N_m = \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) P_{\nu_m}^2(\cos(\theta)) d\theta = \int_{\cos(\theta_0)}^1 P_{\nu_m}^2(x) dx$. Таким образом получаем:

$$(A_n R_2^{\nu_n} + B_n R_2^{-\nu_n-1}) N_m = 0 \tag{2.8}$$

Тогда для уравнения (2.6) получаем, что $\int_0^{\theta_0} V(\theta) P_n(\cos(\theta)) d\theta = a_n N_n$ и $U_1(R_2, \theta) = V(\theta) = \sum a_n P_n(\cos(\theta))$

$$a_n = A_n R_2^{\nu_n} + B_n R_2^{-\nu_n-1} \tag{2.9}$$

Из выражений (2.8) и (2.9) определяем коэффициенты A_n и B_n и подставляем их в выражение (2.4). После упрощения полученного выражения получаем решение уравнения Лапласа в сферической системе координат с поставленными граничными условиями:

$$U_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left(\frac{r}{R_1}\right)^{\nu_n} - \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-\nu_n-1}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\nu_n} - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-\nu_n-1}} P_{\nu_n}(\cos(\theta)) \tag{2.10}$$

2.3 Решение задачи 2

2.3.1 Математическая модель задачи 2

Задача нахождения распределения осесимметричного электростатического потенциала будет решаться в сферической системе координат (r, φ, θ) . В данной случае рассматривается осесимметричная задача, что означает отсутствие зависимости от φ . Для моделирования поверхности острия на сферах $r = R_1$ и $r = R_2$ зададим кусочно-постоянные функции $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ так, чтобы нулевая эквипотенциаль представляла собой «виртуальный» катод с вершиной сферической формы на конусовидном «теле» острия. Для нахождения распределения потенциала используется метод разделения переменных. Требуется найти функцию $U(r, \theta)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа (2.11) и заданным граничным условиям (2.12):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} U(R_1, \theta) &= f_1(\theta), \\ U(R_2, \theta) &= f_2(\theta), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta \leq \theta_1, \\ -U_1, & \theta_1 \leq \theta \leq \pi; \end{cases} \\ f_2(\theta) &= \begin{cases} U_0, & 0 \leq \theta \leq \theta_1, \\ -U_2, & \theta_1 \leq \theta \leq \pi; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3.2 Распределение потенциала задачи 2

При решении задачи (2.12) для уравнения Лапласа (2.11) с помощью метода разделения переменных получаем выражение для распределения электростатического потенциала в виде: [9, 10, 11]

$$U_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\left(\frac{r}{R_1}\right)^n - \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-n-1}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-n-1}} + b_n \frac{\left(\frac{r}{R_2}\right)^n - \left(\frac{r}{R_2}\right)^{-n-1}}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-n-1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad (2.14)$$

где a_n и b_n являются коэффициентами разложений граничных функций $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ (2) по полиномам Лежандра [12, 13, 14]:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \left(U_0 \int_{\cos \theta_1}^1 P_n(x) dx - U_2 \int_{-1}^{\cos \theta_1} P_n(x) dx \right), \quad (2.15)$$

$$b_n = \frac{2n+1}{2} (-U_1) \int_{-1}^{\cos \theta_1} P_n(x) dx. \quad (2.16)$$

2.4 Результаты численных расчетов

Распределение потенциала $U_1(r, \theta)$ имеет вид (см. глава 2, формулы 2.14, 2.15, 2.16):

$$U_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\left(\frac{r}{R_1}\right)^n - \left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-1}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n-1}} + b_n \frac{\left(\frac{r}{R_2}\right)^n - \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n-1}} \right) \times \\ \times P_n(\cos(\theta)). \quad (2.17)$$

Требуется найти численное значение электростатического потенциала в рассматриваемой области: $r \in [R_1, R_2]$, $\theta \in (0, \pi)$.

Для решения поставленной задачи была реализована программа на языке C++ в среде программирования Microsoft Visual Studio.

Параметры системы имеют значения:

$R1 = 1;$
 $R2 = 2;$
 $U0 = 100;$
 $U1 = 0;$
 $U2 = 100$

Описание классов и методов, используемых в программе:

1) Класс Legendre:

- build(int n) - строит из данного экземпляра класса полином Лежандра порядка n;
- value(double point) - возвращает значение полинома в точке point;
- integral(double A, double B) - возвращает значение интеграла данного полинома на промежутке [from, to];
- multiplyByX() - возвращает полином, почленно домноженный на x;
- order() - возвращает порядок полинома.

2) Класс PotentialDistribution:

- A(double n) - возвращает значение коэффициента A;
- B(double n) - возвращает значение коэффициента B;
- calculate(double r, double theta) - возвращает значение потенциала;

Формулы для нахождения значений P_n [14]:

$$(2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \\ \text{тогда } P_{n+1}(x) = \frac{(2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)}{n + 1}, \quad (2.18) \\ P_0(x) = 1, P_1(x) = x.$$

Формулы для нахождения значений коэффициентов a_n и b_n :

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \left(U_0 \int_{\cos(\theta_1)}^1 P_n(x) dx - U_2 \int_{-1}^{\cos(\theta_1)} P_n(x) dx \right), \quad (2.19)$$

$$b_n = \frac{2n+1}{2} (-U_1) \int_{-1}^{\cos(\theta_1)} P_n(x) dx. \quad (2.20)$$

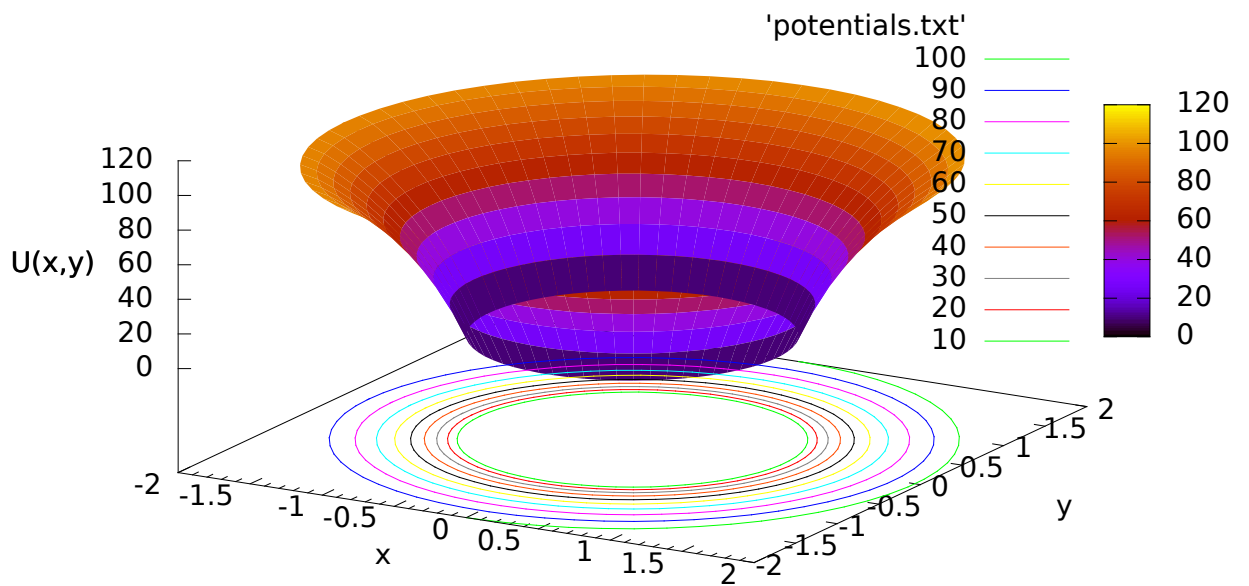


Рис. 2.3: Распределение электростатического потенциала без учета «тела» остря в сферической системе координат.

Заключение

В данной работе были построены модели двух диодных эмиссионных систем в виде сферы на конусовидной поверхности (Рис. 2.1, 2.2).

Первая — представляет собой систему, в которой вершина катода имеет сферическую форму, «тело» катода — конусовидную поверхность с некоторым углом раствора, анод представляет собой часть сферической поверхности. Для расчета потенциала использовался метод разделения переменных в сферической системе координат для уравнения Лапласа с граничными условиями 1 рода (2.1). Распределение потенциала найдено в аналитическом во всей области диодной системы (2.9).

Вторая — осесимметричная система, представляющая собой острие на сферах. Граничные условия заданы как кусочно постоянные функции так, чтобы нулевая эквипотенциаль представляла собой «виртуальный» катод с вершинной сферической формы на конусовидном «теле» острия (2.10, 2.11). Для нахождения распределения потенциала так же используется метод разделения переменных. Распределение потенциала найдено в аналитическом во всей области диодной системы (2.12, 2.13, 2.14), а так же представлен численный расчет данной системы.

Приложение

Листинг программы.

```
#include "Legendre.h"
#include "stdafx.h"
/*
 * Полином Лежандра, представленный в виде массива коэффициентов coefficient
 * (где coefficient[n] - коэффициент, стоящий при n-й степени). Умеет:
 *
 * Строить себя - build(int n)
 * Считать свое значение в точке - value(double X)
 * Интегрировать себя на промежутке - integral(double from, double to)
 */

Legendre::Legendre()
{
}

/*
 * Строит из данного экземпляра класса полином Лежандра порядка n
 * (по рекуррентной формуле)
 */
void Legendre::build(int n)
{
    Legendre result;

    if (n == 0)
    {
        coefficient.push_front(1.0);
        return;
    }

    if (n == 1)
    {
        coefficient.push_front(1.0);
        coefficient.push_front(0.0);
    }

    return;
}
```

```

Legendre _A;
_A.build(n - 1);

Legendre _B;
_B.build(n - 2);

Legendre yada;
yada = _B * (-(n - 1) / (double)n);
result = _A.multiplyByX();
result = result * ((2.0 * n - 1) / (double)n);
result = result + yada;
coefficient = result.coefficient;
return;
}

/*
 * Возвращает значение полинома в точке point
 */
double Legendre::value(double point)
{
double result = 0;
for (int i = 0; i <= this->order() ; i++)
{
result += pow(point, i) * coefficient[i];
}
return result;
}

/*
 * Возвращает значение интеграла данного полинома на промежутке [from, to]
 * (вычисляется аналитически по формуле Ньютона-Лейбница)
 */
double Legendre::integral(double A, double B)
{
double result = 0;
for (int i = 0; i <= this->order(); i++)
{
result += pow(B, i + 1) * coefficient[i] / (double)(i + 1);
result -= pow(A, i + 1) * coefficient[i] / (double)(i + 1);
}
return result;
}

/*
 * Возвращает полином, почленно домноженный на x
 * (нужно для реализации рекуррентной формулы)

```

```

*/
Legendre Legendre::multiplyByX()
{
Legendre result;
result.coefficient = coefficient;
result.coefficient.push_front(0.0);
return result;
}

/*
* Возвращает порядок полинома
*/
int Legendre::order()
{
return coefficient.size() - 1;
}

/*
* Перегрузка оператора + для сложения двух полиномов
*/
Legendre Legendre::operator+(const Legendre& value)
{
/*
* Смотрим, какое из двух слагаемых имеет больший порядок
*/
if (value.coefficient.size() - 1 <= this->order()) //если больше то, что справа
{
Legendre sum;

sum.coefficient = coefficient;

for (int i = 0; i < value.coefficient.size(); i++)
{
sum.coefficient[i] += value.coefficient[i];
}

return sum;
}
//если больше то, что слева
Legendre sum;

sum.coefficient = value.coefficient;

for (int i = 0; i <= this->order(); i++)
{
sum.coefficient[i] += coefficient[i];
}
}

```

```

return sum;
}

/*
 * Перегрузка оператора * для домножения полинома на вещественное число value СПР
 * (нужно для реализации рекуррентной формулы)
 */
Legendre Legendre::operator*(const double value)
{
Legendre result;
result.coefficient = coefficient;

for (int i = 0; i <= this->order(); i++)
{
result.coefficient[i] *= value;
}
return result;
}

Legendre::~Legendre()
{
}

```

```

#include "PotentialDistribution.h"$
#include "stdafx.h"

/*
* Ищем тут распределение потенциала
* Конструктор принимает значение n - длину частичной суммы из формулы
* Вслед за этим в конструкторе же вычисляются полиномы Лежандра порядков 0 - n в
* а также все коэффициенты A и B от 0 до n
*/
PotentialDistribution::PotentialDistribution(int _order)
{
order = _order;
THETA_1 = 5.0*PI / 6.0;
R1 = 1.0;
R2 = 2.0;
for (int i = 0; i <= _order; i++)
{
Legendre pol;
pol.build(i);

legendre.push_back(pol);
}
_A = new double [_order];
_B = new double [_order];

for (int i = 0; i <= _order; i++)
{
_A[i] = this->A(i);
_B[i] = this->B(i);
}
}

double PotentialDistribution::A(double n)
{
return (n + 0.5) * ((-1*U2-1*U0) * legendre[n].integral(-1, cos(THETA_1)));
}

double PotentialDistribution::B(double n)
{
return (n + 0.5) * (U1 * legendre[n].integral(-1, cos(THETA_1)));
}

/*
* Возвращает значение потенциала
*/
double PotentialDistribution::calculate(double r, double theta)
{

```

```

double sum = 0;
double sum2 = 0;

for (int i = 0; i <= this->order; i++)
{
double frac1 = (pow(r / R1, i) - pow(r / R1, -1 * i - 1));
frac1 /= (pow(R2 / R1, i) - pow(R2 / R1, -1 * i - 1));

double frac2 = (pow(r / R2, i) - pow(r / R2, -1 * i - 1));
frac2 /= (pow(R1 / R2, i) - pow(R1 / R2, -1 * i - 1));

sum += (_A[i] * frac1 + _B[i] * frac2) * cos(theta);
}
sum2 = U0*R2/(R2 - R1) * ( -1.0 * R1/r + 1.0);

return sum + sum2;
}

PotentialDistribution::~PotentialDistribution()
{
}

```

```

// potential.cpp : Defines the entry point for the console application.
#include "stdafx.h"
#include "Legendre.h"
#include "PotentialDistribution.h"
#include <fstream>
using namespace std;

int main()
{
    ofstream fout("legendres.txt");
    vector<Legendre> legendres;

    for (int i = 0; i < 10; i++)
    {
        Legendre pol;
        pol.build(i);
        legendres.push_back(pol);
    }

    vector<double> integrals;

    for (int i = 0; i < 10; i++)
    {
        integrals.push_back(legendres[i].integral(0, 1));
    }

    for (int i = 0; i < 10; i++)
    {
        for (double X = -1; X < 1; X += 0.01)
        {
            fout << X << "\t" << legendres[i].value(X) << "\r\n";
        }
    }

    ofstream log("potentials.txt");
    PotentialDistribution p(24);
    for (double r = p.R1; r < p.R2 + 0.001; r += 0.1)
    {
        for (double theta = -PI; theta < PI + 0.1; theta += 0.1)
        {
            log << r*cos(theta) << "\t" << r*sin(theta) << "\t";
            log << p.calculate(r, theta) << "\n"; //считаем потенциал для данных r и theta и
        }
        log << "\n";
    }
    return 0;}

```


Литература

- [1] Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Климаков А.А. Математическое моделирование диодной системы с полевым острием цилиндрической формы // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. № 2. С. 20 – 24.
- [2] Фурсей Г.Н. Автоэлектронная эмиссия // Физика. 2000. Т. 6. № 11. С. 96–97.
- [3] Климаков А.А., Виноградова Е.М. Оптимизация фокусирующей системы полевой пушки с острым катодом // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 184–189.
- [4] Листрукова А.В., Виноградова Е.М. Математическое моделирование эмиссионной системы // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 185–190.
- [5] Amir Ahmad V.K., Tripathi Model calculation of the scanned field enhancement factor of CNTs // Nanotechnology 17. 2006. P. 3798–3801.
- [6] Соминский Г. Г., Тарадаев Е. П., Тумарева Т. А., Мишин М. В., Корнишин С. Ю. Простой в изготовлении многоострый полевой эмиттер // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 7. С. 3.
- [7] Vinogradova E. M., Egorov E. N., Televnyy D. S. Mathematical modeling of field emitter array // Vacuum. 2016. Vol. 127. P. 45–50.
- [8] Vinogradova E. M., Egorov N. V. The Diode Emission System with the Spherical Field Emitter Mathematical Modeling // IEEE 10th International Vacuum Electron Sources Conference, IVESC 2014, 2014. No 6892096. P. 262–263.
- [9] Vinogradova E. M., Egorov N.V. Mathematical modeling of electron beam formatting systems on basis of field emission cathodes with various shapes // Vacuum. 2004. Vol. 72. P. 103–111.

- [10] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
- [11] Куруч О.С., Виноградова Е.М. Моделирование полевого катода в виде сферы на конусе // Процессы управления и устойчивость. 2012. С. 148–153.
- [12] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [13] Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
- [14] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Москва, 1963. 1108 с.