

## Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. II. Анализ спектра\*

Г. А. Нестерчук, А. Л. Смирнов, С. Б. Филиппов

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Нестерчук Г. А., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. II. Анализ спектра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 334–343. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.213>

В статье с помощью численных и асимптотических методов исследуются низшие собственные частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из замкнутой круговой цилиндрической оболочки с присоединенной к ней концевой крышкой, имеющей форму пологого сферического сегмента. Выделены три типа собственных колебаний конструкции. Собственные частоты и формы колебаний первого типа, близкие к частотам и формам колебаний пологой сферической оболочки, исследованы в предыдущей работе. В данной работе изучаются формы и частоты второго (цилиндрическая оболочка) и третьего (консольная балка с грузом) типов колебаний. Решается оптимизационная задача об определении значений параметров конструкции, относительной толщины ее элементов и кривизны концевой крышки, при которых минимальное значение собственной частоты максимально. Сравнение асимптотических и численных результатов, полученных при помощи метода конечных элементов, обнаруживает их хорошее совпадение.

*Ключевые слова:* сопряженные оболочки, собственные колебания, асимптотические методы, оптимизация.

**1. Введение.** В статье продолжен анализ свободных колебаний составной тонкостенной конструкции — тонкой цилиндрической оболочки с торцевой крышкой, начатый в [1]. В указанной работе были выделены три типа собственных колебаний конструкции. Собственные частоты и формы колебаний первого типа близки к частотам и формам колебаний пологой сферической оболочки, формы и частоты второго типа — к частотам и формам цилиндрической оболочки, а третьего типа — к частотам и формам колебаний консольной балки с грузом на конце. Для колебаний первого типа (колебания крышки) путем применения асимптотических методов были получены простые приближенные формулы для низших частот. Замена пологого сферического сегмента круглой пластиной на упругом основании позволила использовать асимптотический метод, который применялся ранее при исследовании

---

\*Первая часть работы опубликована здесь: Филиппов С. Б., Смирнов А. Л., Нестерчук Г. А. Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. I. Асимптотический анализ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 109–120. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.110>

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной. Низшей частоте таких колебаний соответствует осесимметричная форма колебаний. В связи с этим разработан новый асимптотический подход для исследования осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с пологим сферическим сегментом. Подстановка в условия сопряжения решения уравнений цилиндрической оболочки в виде суммы безмоментного состояния и краевого эффекта приводит в первом приближении к краевой задаче для пологой сферической оболочки с граничными условиями скользящей заделки. Решение этой краевой задачи известно. Использование нового асимптотического подхода позволило существенно уменьшить погрешность вычисления первой частоты, возникающую при замене сферического сегмента круглой пластиной на упругом основании.

В данной статье исследуются частоты и формы колебаний второго и третьего типов и решается оптимизационная задача об определении значений параметров конструкции, относительной толщины ее элементов и кривизны концевой крышки, при которых значение фундаментальной собственной частоты максимально.

**2. Постановка задачи.** В работе асимптотическим и численным методами определяются частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из тонкой круговой цилиндрической оболочки радиуса  $R$ , длины  $L$  и толщины  $H_s$  с жестко присоединенной концевой крышкой в форме сферического сегмента толщины  $H_p$  и радиуса кривизны  $R_p$ . Второй край оболочки жестко заделан. Оболочка и крышка изготовлены из изотропного материала с модулем Юнга  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho$ . При  $R_p = \infty$  сферическая оболочка вырождается в пластину, при  $R_p = R$  — в оболочку полусферической формы.

Численное исследование задачи, полученное при помощи метода конечных элементов в пакете COMSOL, описано в [1]. Приведем здесь результаты исследования, которое будет служить ориентиром для асимптотического анализа. Определим параметр безразмерной частоты собственных колебаний по формуле

$$\Omega = (\omega^2 \cdot 12\rho\sigma R^4 / (EH^2))^{1/4},$$

где  $R$  — радиус цилиндрической оболочки;  $H$  — толщина оболочек;  $\sigma = 1 - \nu^2$ ;  $f$  и  $\omega = 2\pi f$  — соответственно частота и циклическая частота колебаний. Для конструкций с крышкой в форме круглой пластины и пологой сферической оболочки безразмерные частоты показаны на рис. 1. При расчетах рассматривалась конструкция, выполненная из стали ( $E = 11 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu = 0.35$ ,  $\rho = 8960$  кг/м<sup>3</sup>), со следующими геометрическими параметрами:  $R = 1$  м,  $L = 4$  м,  $H = 0.01$  м,  $R_p = 10$  м.

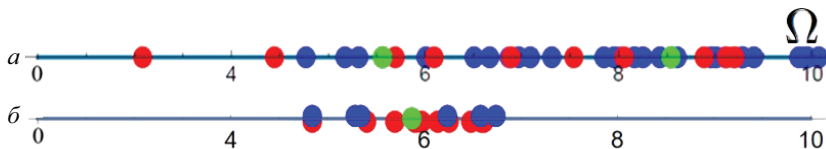


Рис. 1. Низшие собственные частоты конструкции с крышкой в форме пластины (а) и в форме сферического сегмента (б). «Оболочечные» частоты отмечены синим, частоты крышки — красным, «балочные» частоты — зеленым.

В статье рассматриваются малые свободные низкочастотные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, сопряженной по краю с пологой сферической

оболочкой. Далее используются безразмерные параметры, связанные с размерными следующим образом:  $l = L/R$ ,  $r_p = R_p/R$ ,  $h_s = H_s/R$ ,  $h_p = H_p/R$ .

**3. Частоты колебаний второго типа (оболочечные).** Рассмотрим малые свободные низкочастотные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки безразмерной длины  $l$ , сопряженной по краю с пологой сферической оболочкой, имеющей безразмерный радиус кривизны  $r_p$ .

После разделения переменных безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие свободные колебания цилиндрической оболочки, принимают вид [2]

$$\begin{aligned} T_1' + mS + \lambda u &= 0, & S' - mT_2 + Q_2 + 2H' + \lambda v &= 0, \\ Q_1' + mQ_2 - T_2 + \lambda w &= 0, & Q_1 &= M_1' + mH, & Q_2 &= -mM_2 + H', \\ T_1 &= u' + \nu(w + mv), & T_2 &= w + mv + \nu u', & 2S &= (1 - \nu)(v' - tu), \\ M_1 &= \mu^4(\vartheta_1' + \nu m\vartheta_2), & M_2 &= \mu^4(m\vartheta_2 + \nu\vartheta_1'), & H &= \mu^4(1 - \nu)\vartheta_2', \\ & & \vartheta_1 &= -w', & \vartheta_2 &= mw + v, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $(\prime)$  обозначает производную по безразмерной продольной координате  $s \in [0, l]$ ;  $m$  — число волн по параллели;  $u$ ,  $v$  и  $w$  — компоненты перемещения;  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $S$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  — усилия;  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H$  — моменты;  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — углы поворота;  $\lambda = \omega^2 \sigma \rho R^2 E^{-1}$  — параметр частоты;  $\mu^4 = h_s^2/12$  — малый параметр,  $h_s$  — безразмерная толщина цилиндрической оболочки.

Предположим, что цилиндрическая и сферическая оболочки изготовлены из одного материала. В этом случае на параллели сопряжения  $s = l$ ,  $r = 1$  должны быть выполнены следующие восемь условий непрерывности [2]:

$$\begin{aligned} u_p &= -u \sin \beta + w \cos \beta, & w_p &= -w \sin \beta - u \cos \beta, \\ h_p T_{1p} &= h_s(T_1 \sin \beta - Q_1 \cos \beta), & h_p Q_{1p} &= h_s(Q_1 \sin \beta + T_1 \cos \beta), \\ v_p &= v, & \vartheta_{1p} &= \vartheta_1, & h_p S_p &= h_s S, & h_p M_{1p} &= -h_s M_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sin \beta = 1/r_p$ . Здесь  $u_p$ ,  $v_p$  и  $w_p$  — компоненты перемещения;  $T_{1p}$ ,  $S$ ,  $Q_{1p}$  — усилия;  $M_{1p}$  — момент;  $\vartheta_{1p}$  — угол поворота сферической оболочки.

Для пологой сферической оболочки  $r_p \gg 1$ . Следовательно,  $\sin \beta \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$  и условия сопряжения (2) можно заменить приближенными условиями

$$\begin{aligned} u_p &= w, & w_p &= -u, & h_p T_{1p} &= -h_s Q_1, & h_p Q_{1p} &= h_s T_1, \\ v_p &= v, & \vartheta_{1p} &= \vartheta_1, & h_p S_p &= h_s S, & h_p M_{1p} &= -h_s M_1. \end{aligned} \quad (3)$$

На краю оболочки  $s = 0$  должны быть заданы четыре однородных граничных условия. В качестве примера рассмотрим условия жесткой заделки:

$$u = w = v = \vartheta_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \quad (4)$$

Если при  $\lambda = \lambda_k$  уравнение (1) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям (3), (4), то  $\lambda_k$  является собственным значением соответствующей краевой задачи. Наименьшее положительное собственное значение  $\lambda_1$  соответствует первой частоте колебаний.

Для низкочастотных колебаний второго типа формы колебаний цилиндрической оболочки с крышкой подобны формам колебаний неподкрепленной оболочки.

Обе формы имеют большое число волн по параллели  $m \sim \mu^{-1/2}$ . Следуя [3], решение системы (1) будем искать в виде суммы полубезмоментного решения и краевого эффекта

$$y = \mu^{I_0(y)} y_0 + \mu^{I_1(y)} (y_1 + y_2).$$

Значения показателей интенсивности  $I_0$  и  $I_1$  приведены в табл. 1.

Таблица 1. Показатели интенсивности

Показатели	Функции							
	$u$	$v$	$w$	$\vartheta$	$T_1$	$S$	$M_1$	$Q_1$
$I_0$	1	1/2	0	0	1	3/2	3	3
$I_1$	2	5/2	1	0	2	3/2	3	2

Функция  $v_0$  удовлетворяет полубезмоментному уравнению

$$\frac{d^4 v_0}{ds^4} - \alpha_s^4 v_0 = 0, \quad (5)$$

где

$$\alpha_s^4 = \frac{\lambda m^4 - \mu^4 m^8}{\sigma},$$

$$w_0 = -v_0, \quad u_0 = \frac{dv_0}{ds}, \quad T_{10} = \frac{d^2 v_0}{ds^2}, \quad S_0 = -\sigma \frac{d^3 v_0}{ds^3}.$$

Функции краевого эффекта  $y_1$  и  $y_2$  имеют вид

$$y_1 = \sum_{j=1}^2 D_j \hat{y}_j \exp(r_j s / \mu), \quad y_2 = \sum_{j=3}^4 D_j \hat{y}_j \exp[r_j (s - l) / \mu],$$

где  $D_j \sim 1$  — произвольные постоянные,

$$r_{1,2} = g(-1 \pm i), \quad r_{3,4} = g(1 \pm i), \quad g = \sigma^{1/4} / \sqrt{2}, \quad i^2 = -1.$$

В частности,  $\hat{w}_j = 1$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Предположим, что

$$h \sim h_p, \quad \frac{1}{r_p} \sim \mu^2, \quad v_p \sim \mu^5, \quad u_p \sim \mu^2, \quad M_{1p} \sim Q_{1p} \sim \mu^4.$$

Учитывая соотношения

$$v \sim \mu^{1/2}, \quad w \sim 1, \quad T_1 \sim \mu, \quad M_1 \sim \mu^3$$

и отбрасывая второстепенные члены в первом, четвертом, пятом и восьмом условиях сопряжения (3), получаем приближенные граничные условия для уравнений (1) колебаний цилиндрической оболочки на краю  $s = l$ :

$$v = w = T_1 = M_1 = 0. \quad (6)$$

Эти условия соответствуют шарнирному опиранию края оболочки.

Таким образом, в первом приближении для цилиндрической оболочки с крышкой мы имеем краевую задачу на собственные значения для системы уравнений (1) с граничными условиями жесткой заделки (4) и шарнирного опирания (6). В монографии [3] показано, что граничным условиям (4) и (6) соответствуют граничные условия

$$v_0(0) = \frac{dv_0}{ds}(0) = 0, \quad v_0(l) = \frac{d^2v_0}{ds^2}(l) = 0 \quad (7)$$

для уравнения (5).

Краевая задача (5), (7) описывает колебания балки с зашпеченным краем  $s = 0$  и шарнирно опертым краем  $s = l$ . Решение этой проблемы хорошо известно (см. [4]).

Собственные значения для проблемы (5), (7) даются формулой  $\alpha_{sn} = \varkappa_n/l$ , где  $\varkappa_n$  — корни уравнения,

$$\operatorname{tg} \varkappa = \operatorname{th} \varkappa,$$

причем  $\varkappa_1 = 3.927$ ,  $\varkappa_2 = 7.069$ .

Параметр частоты

$$\lambda(m, n) = \frac{\sigma \varkappa_n^4}{m^4 l^4} + \mu^4 m^4$$

принимает минимальное значение, соответствующее фундаментальной частоте, если  $n = 1$  и  $m$  близко к  $m_0$ , где

$$m_0^4 = \frac{\sqrt{\sigma} \varkappa_1^2}{\mu^2 l^2}.$$

Рассмотрим цилиндрическую оболочку толщины  $h = 0.01$ , к которой присоединяется плоская крышка той же толщины.

Значения параметра

$$\Omega = (12\lambda)^{1/4} / \sqrt{h}$$

приведены в табл. 2 для  $\nu = 0.35$  и трех значений длины оболочки.

Таблица 2. Параметр частоты  $\Omega$  колебаний второго типа (оболочечные) для оболочек разной длины

$l = 4$				$l = 6$				$l = 8$			
$n$	$m$	Числ.	Асимпт.	$n$	$m$	Числ.	Асимпт.	$n$	$m$	Числ.	Асимпт.
1	4	4.770	5.026	1	3	3.933	4.228	1	3	3.315	3.537
1	5	5.173	5.287	1	4	4.106	4.267	1	4	3.926	4.090
1	3	5.315	5.991	1	5	4.940	5.061	1	2	3.962	4.466
1	6	6.010	6.086	1	2	5.044	5.914	2	4	4.561	4.744
2	5	6.508	6.901	2	4	5.353	5.690	1	5	4.888	5.019
2	6	6.669	6.760	2	5	5.434	5.551	2	3	4.978	5.436
1	2	6.872	8.848	1	6	5.917	6.017	2	5	5.095	5.194
2	4	7.089	8.082	2	6	6.124	6.173	3	5	5.599	5.722
1	7	6.968	7.030	2	3	6.249	7.061	3	4	5.676	6.058
2	7	7.311	7.293	3	5	6.408	6.719	1	6	5.898	6.005
1	8	7.956	8.012	3	6	6.610	6.668	2	6	5.985	6.057

**4. Частоты колебаний третьего типа (балочные).** Среди нижних собственных частот оболочки могут быть и частоты балочных колебаний, при которых конструкция совершает колебания подобно консольной балке с нагрузкой на конце.

Уравнение поперечных колебаний балки с одним защемленным концом и нагруженной на другом конце концентрированной массой имеет вид

$$w^{(iv)}(s/l) - \alpha^4 w(s/l) = 0, \quad \alpha^4 = \frac{\rho S l^4 R^4}{EJ} \omega^2, \quad 0 \leq s \leq l. \quad (8)$$

Его решение удовлетворяет граничным условиям

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(1) = 0, \quad EJw'''(1)/l^3 = -m\omega^2 w(1).$$

Здесь  $J$  — момент инерции сечения оболочки вокруг ее диаметра;  $m$  — масса крышки. Подставляя решение уравнения (8)

$$w(s/l) = C_1 \sin(\alpha s/l) + C_2 \cos(\alpha s/l) + C_3 \sinh(\alpha s/l) + C_4 \cosh(\alpha s/l)$$

в граничные условия и приравнявая определитель однородной линейной системы к нулю, получаем уравнение для нахождения величины  $\alpha$ :

$$\gamma \alpha (\cos(\alpha) \sinh(\alpha) - \cosh(\alpha) \sin(\alpha)) + \cosh(\alpha) \cos(\alpha) + 1 = 0, \quad (9)$$

где  $\gamma = \frac{M}{m}$ ,  $M$  — масса оболочки.

В случае, когда крышка является круглой пластиной, параметр  $\gamma = 1/(2l)$ . Для таких конструкций результаты аналитического и конечно-элементного анализа при различных длинах оболочек приведены в табл. 3, где частотный параметр  $\Omega$  связан с  $\alpha$  соотношением

$$\Omega = \alpha/l(3\sigma(4/h^2 + 1))^{1/4}.$$

Таблица 3. Зависимость параметра частоты  $\Omega$  от длины оболочки  $l$  для балочных колебаний

$l$	(9)	МКЭ	Ошибка, %
4	6.411	5.561	15.3
6	4.403	4.078	8.0
8	3.357	3.203	4.8
12	2.277	2.223	2.4
16	1.723	1.701	1.3
20	1.387	1.375	0.9

Для оболочек небольшой относительной длины решение уравнения (9) дает сильно завышенные частоты, но точность аналитической формулы увеличивается с длиной оболочки. Следует отметить, что по мере увеличения длины оболочки частоты балочных колебаний быстро уменьшаются и для оболочек при  $l > 8$  фундаментальной частотой конструкции является первая частота балочных колебаний.

### 5. Двухпараметрическая оптимизация спектра собственных частот.

Условие сохранения массы конструкции имеет вид

$$2\pi hLR + \pi hR^2 = 2\pi h_s LR + \pi h_p R_p \left( R_p - \sqrt{R_p^2 - R^2} \right),$$

откуда при  $h_s = \delta h_p$  следует формула для безразмерных параметров

$$h_p = h \cdot \frac{2l + 1}{2l\delta + 2r_p^2 - 2r_p\sqrt{r_p^2 - 1}}.$$

Найдем численно значения первых частот при  $1 < \delta < 5$  и  $0.01 < k < 0.15$  ( $k = 1/r_p$  — кривизна крышки).

Рассмотрим задачу о колебаниях конструкции, состоящей из цилиндрической оболочки длины  $l$ , единичного радиуса и толщины  $h_s$ , сопряженной со сферической оболочкой радиуса  $r_p$  толщины  $h_p = h_s/\delta$ . При  $r_p \rightarrow \infty$  сферическая оболочка превращается в плоскую круглую пластину.

Уменьшение радиуса кривизны сферического сегмента приводит к быстрому росту его собственных частот, в то время как уменьшение толщины сферического сегмента — к не столь значительному снижению его собственных частот. При этом для сохранения массы конструкции «лишний» материал может быть использован для увеличения толщины цилиндрической оболочки, что приводит к повышению ее собственных частот.

Первая оптимизационная задача формулируется так: при заданной массе конструкции найти кривизну крышки  $k$  и отношение толщин цилиндрической оболочки и крышки  $\delta$ , при котором фундаментальная частота конструкции является наибольшей.

Для конструкции фиксированной массы на рис. 2 построены полученные аналитически зависимости от параметров  $\delta$  и  $k$  низших собственных частот «пластиночного» (зеленый) и «оболочечного» (желтый) типов, а также низшей собственной частоты цилиндрической оболочки (красный) в предельном случае, когда толщина крышки стремится к нулю. Заметим, что при увеличении кривизны крышки низшая собственная частота колебаний «оболочечного» типа быстро приближается к предельному значению.

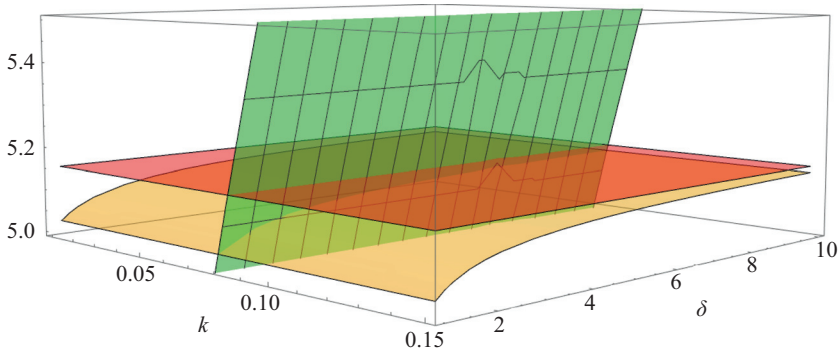


Рис. 2. Аналитические зависимости от параметров  $\delta$  и  $k$  низших собственных частот «пластиночного» (зеленый) и «оболочечного» (желтый) типов, а также низшей собственной частоты цилиндрической оболочки (красный) в предельном случае.

Рис. 3 демонстрирует хорошее совпадение значений низших собственных частот колебаний, полученных аналитически (зеленая, желтая и красная поверхности) и численно (точки) в пакете COMSOL для разных значений параметров  $\delta$  и  $k$ .

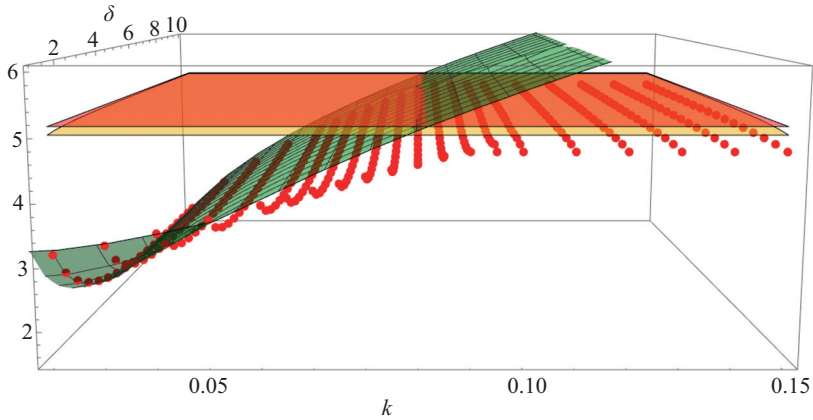


Рис. 3. Низшие собственные частоты колебаний, найденные аналитически (зеленая, желтая и красная поверхности) и численно (точки).

В табл. 4 приведены значения первых частот конструкций для разных значений  $\delta$  и  $r_p$ . Оптимальное решение достигается при значении параметров  $r_p = 9.851$  м и  $\delta = 30$ . Такая постановка задачи не является оправданной, так как крышка при таких  $r_p$  и  $\delta$  имеет толщину  $H_p = 0.3$  мм, что недопустимо для реальных конструкций. В частности, в большинстве инженерных нормативов, например для проектирования железнодорожных цистерн, указывается минимальная толщина торцевой крышки 3 мм.

Таблица 4. Зависимость параметра фундаментальной частоты конструкции  $\Omega$  от параметров  $\delta$  и  $k$

$k$	$\delta$	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.11	0.13
1	1	3.162	3.500	3.940	4.386	4.768	4.768	4.767
2	2	2.446	3.032	3.640	4.171	4.633	4.823	4.823
3	3	2.122	2.892	3.564	4.118	4.594	4.843	4.842
4	4	1.957	2.850	3.554	4.127	4.619	4.852	4.852
5	5	1.869	2.845	3.573	4.164	4.673	4.858	4.857

Поэтому рассмотрим вторую оптимизационную задачу: при заданных массе конструкции и минимальной толщине крышки  $H_p = 3$  мм найти радиус кривизны крышки, при котором фундаментальная частота конструкции является наибольшей.

Максимум фундаментальной частоты 40.36 Гц достигается при  $R_p = 9.851$  м, что существенно превышает фундаментальную частоту конструкции с плоской крышкой 16.318 Гц.

**6. Заключение.** Собственные частоты и формы колебаний конструкции, состоящей из круговой цилиндрической оболочки с крышкой в виде полого сферического сегмента, были найдены аналитически и с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Выделены и исследованы свободные колебания трех типов. Для частот собственно цилиндрической оболочки (колебания второго типа) с присоединенной на конце крышкой получены простые асимптотические формулы. Для балочных колебаний конструкции с присоединенным грузом (колебания третьего типа) получена аналитическая формула.



Асимптотически и численно решена оптимизационная задача об определении значений параметров конструкции, относительной толщины ее элементов и кривизны концевой крышки, при которых минимальное значение собственной частоты максимально. Сравнение асимптотических и численных результатов обнаруживает их хорошее совпадение.

## Литература

1. Нестерчук Г. А., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Собственные колебания цилиндрической оболочки с крышкой. I. Асимптотический анализ. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10**(68), вып. 1, 109–120 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.110>
2. Филиппов С. Б. *Теория сопряженных и подкрепленных оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петербург. ун-та (1999).
3. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. *Свободные колебания тонких упругих оболочек*. Москва, Наука (1979).
4. Timoshenko S. *Vibration problems in engineering*. New York, Van Nostrand (1955).

Статья поступила в редакцию 21 января 2023 г.;  
доработана 21 января 2023 г.;  
рекомендована к печати 25 января 2023 г.

### Контактная информация:

*Нестерчук Григорий Анатольевич* — ассистент; [g.nesterchuk@spbu.ru](mailto:g.nesterchuk@spbu.ru)

*Смирнов Андрей Леонидович* — канд. физ.-мат. наук, доц.; [a.l.smirnov@spbu.ru](mailto:a.l.smirnov@spbu.ru)

*Филиппов Сергей Борисович* — д-р физ.-мат. наук, проф.; [s.filippov@spbu.ru](mailto:s.filippov@spbu.ru)

## Natural vibrations of a cylindrical shell with the end cap.

### II. Analysis of the spectrum\*

*G. A. Nesterchuk, A. L. Smirnov, S. B. Filippov*

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Nesterchuk G. A., Smirnov A. L., Filippov S. B. Natural vibrations of a cylindrical shell with the end cap. II. Analysis of the spectrum. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 334–343. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.213> (In Russian)

Using numerical and asymptotic methods, the lowest natural frequencies and vibration modes of a structure consisting of a closed circular cylindrical shell with an end cap attached to it, having the shape of a shallow spherical segment, are studied in the paper. Three types of natural vibrations of the structure are described. Eigenfrequencies and modes of vibrations of the first type, close to the frequencies and modes of vibrations of a shallow spherical shell, were studied in previous works. In this paper, we study the forms and frequencies of the second type of vibrations (cylindrical shell) and the third type (cantilever beam with the load). An optimization problem is solved to determine the values of the structure parameters, the relative thickness of its elements and the curvature of the end cap, at which the minimum value of the natural frequency is maximum. A comparison of the asymptotic and numerical results reveals their good agreement.

*Keywords:* joint thin shells, free vibrations, asymptotic methods, optimization.

---

\*See Part I: Filippov S. B., Smirnov A. L., Nesterchuk G. A. Natural vibrations of a cylindrical shell with the end cap. I. Asymptotic analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 109–120. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.110> (In Russian)

The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00111).

## References

1. Nesterchuk G. A., Smirnov A. L., Filippov S. B. Natural vibrations of a cylindrical shell with the end cap. I. Asymptotic analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 1, 109–120 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.110> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 1, (2023) (in print)]
2. Filippov S. B. *The theory of conjugated and reinforced shells*. St Petersburg, St Petersburg University Press (1999). (In Russian)
3. Goldenveizer A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E. *Free Vibrations of Thin Elastic Shells*. Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)
4. Timoshenko S. *Vibration problems in engineering*. Van Nostrand, New York (1955).

Received: January 21, 2023

Revised: January 21, 2023

Accepted: January 25, 2023

### Authors' information:

Grigory A. Nesterchuk — g.nesterchuk@spbu.ru

Andrei L. Smirnov — a.l.smirnov@spbu.ru

Sergei B. Filippov — s.filippov@spbu.ru

## ХРОНИКА

2 ноября 2022 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступили канд. физ.-мат. наук, доцент Е. Н. Поляхова и д-р физ.-мат. наук, профессор А. А. Тихонов (СПбГУ) с докладом на тему «Лауреаты премии им. Ф. А. Цандера РАН о некоторых проблемах космодинамики (к 135-летию со дня рождения Ф. А. Цандера)».

### Краткое содержание доклада:

Академические премии имени знаменитого ученого — пионера отечественной космонавтики Ф. А. Цандера (1887–1933) — были учреждены АН СССР в 1992 г. Присуждаются «за выдающиеся теоретические работы в области ракетно-космической науки». За истекшие 30 лет этой премии были удостоены трое ученых Санкт-Петербургского университета: С. С. Лавров (1996), Е. Н. Поляхова (2005) и А. А. Тихонов (2020). В докладе рассказывается о планируемой к изданию книге «Цандер-астродинамика в России за 50 лет». Рассматриваются также актуальные проблемы орбитальной и угловой динамики космических аппаратов (КА) и способы их решения в свете достижений, полученных авторами. Анализируется проблема межпланетных перелетов КА с помощью малой тяги солнечного паруса, обусловленной световым давлением. Обсуждаются проблемы магнито-электромеханических связей для реализации некеплеровых орбит КА, для синтеза параметрических управлений угловым движением КА, а также для реализации новых подходов к удалению объектов космического мусора из околоземного пространства.