

# Синхронизация колебаний слабосвязанных упругих элементов дифференциального резонансного МЭМС-акселерометра в режиме двухконтурного автогенератора\*

Д. А. Индейцев<sup>1,2</sup>, В. С. Игумнова<sup>1</sup>, А. В. Лукин<sup>1</sup>,  
И. А. Попов<sup>1</sup>, Л. В. Штуккин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

**Для цитирования:** Индейцев Д. А., Игумнова В. С., Лукин А. В., Попов И. А., Штуккин Л. В. Синхронизация колебаний слабосвязанных упругих элементов дифференциального резонансного МЭМС-акселерометра в режиме двухконтурного автогенератора // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 289–304. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.210>

Настоящая работа посвящена изучению условий и сценариев синхронизации колебаний слабосвязанных микробалочных элементов дифференциального резонансного МЭМС-акселерометра, функционирующего в режиме двухконтурного автогенератора. Полученная с применением метода Галёркина модель системы двух автогенераторов Ван дер Поля с нелинейной упругой связью между подвижными элементами исследована с помощью метода многих масштабов. Аналитически и численно найдены режимы биений и синхронизации колебаний двух резонаторов, определена граница между этими режимами в пространстве параметров системы. Наряду с локальным бифуркационным анализом рассматриваемых стационарных режимов проведен также глобальный анализ эволюции и ветвления предельных циклов в пространстве медленных переменных, что позволило обнаружить зоны сосуществования устойчивых режимов синхронизации и биений со своими бассейнами притяжения. Изучено влияние фактора проектируемой или технологически обусловленной неидентичности конструкции двух резонаторов на расположение параметрических зон синхронизации и биений.

*Ключевые слова:* резонансный акселерометр, слабосвязанные системы, синхронизация колебаний, автогенератор Ван дер Поля.

**1. Введение.** Все большее распространение в современной индустрии наномикроэлектромеханических систем (Н/МЭМС) находит использование существенно нелинейных характеристик проектируемых механических архитектур и принципов генерации колебаний, а также коллективных динамических свойств подвижных эле-

---

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

ментов устройств, что позволяет на порядки повысить точность и стабильность измерений для широкого класса датчиков физических величин [1]. Интенсивное развитие получают исследования и прикладные разработки в области применения особенностей модального взаимодействия в нелинейных и слабосвязанных колебательных системах с двумя и более степенями свободы. В частности, значительный научный и практический интерес представляет изучение явления синхронизации колебаний в микросистемах с автоколебательным принципом возбуждения и управления колебаниями.

Одной из приоритетных задач индустрии МЭМС является создание вибрационно и температурно устойчивых высокочувствительных элементов микромеханических систем инерциальной навигации (акселерометров, гравиметров, гироскопов). Известен целый ряд успешных разработок резонансных акселерометров с частотным выходом [2, 3]. В рассматриваемом классе датчиков можно выделить ряд конструкций, представляющих собой слабосвязанные механические колебательные системы с упругой или электростатической связью между подвижными элементами [4]. Принцип частотного съема подразумевает, как правило, использование автоколебательных контуров генерации колебаний чувствительных элементов, что в случае систем с несколькими степенями свободы может приводить к явлению самосинхронизации на некоторой единой частоте колебаний [5]. Данный эффект может быть как нежелательным (нарушающим сам принцип работы датчика, как в случае с системами с дифференциальным частотным выходом), так и полезным (как для устройств, использующих повышенные свойства стабильности по частоте в режиме синхронизации [6]). Таким образом, большое прикладное значение приобретает задача математического исследования условий и сценариев синхронизации в резонансных МЭМС-датчиках с несколькими степенями свободы.

Среди основополагающих работ по бифуркациям режимов движения связанных автогенераторных систем следует назвать статьи [5, 7], в которых качественно исследованы режимы синхронизации и биений в системе двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля. В работе [8] изучена динамика указанной выше системы при учете фактора запаздывания перекрестной обратной связи по скорости. В работе [9] исследуется неклассическая синхронизация и локализация энергии в системе двух слабосвязанных автогенераторов. Показано, что изменение параметров частотной расстройки, нелинейности и диссипации может приводить к структурным изменениям фазовых портретов динамической системы, характеризующей процесс обмена энергии.

Настоящее исследование посвящено изучению условий и сценариев синхронизации колебаний слабосвязанных микробалочных элементов дифференциального резонансного МЭМС-акселерометра, работающего в режиме двухконтурного автогенератора. Основным вкладом данной работы является получение полной бифуркационной картины системы, обнаружение границ между режимами биений и синхронизации, а также оценка чувствительности датчика и сравнение с ранее опубликованными результатами.

**2. Математическая модель системы.** Рассмотрим модель резонансного МЭМС-акселерометра/гравиметра, состоящего из двух микробалочных чувствительных элементов, связанных с инерционной массой посредством линейно-упругих пружин малой жесткости. Принципиальная схема рассматриваемой конструкции соответствует устройству, представленному в работе [4].

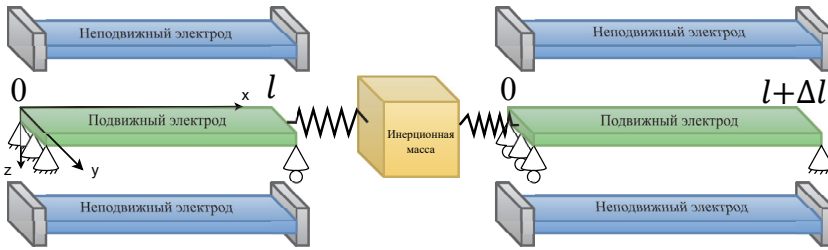


Рис. 1. Модель акселерометра.

Граничные условия на рис. 1 описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 u_1(0) = 0, \quad \frac{d^2 u_1(0)}{dx^2} = 0, \quad u_1(l) = \frac{N_1 l}{ES} - \frac{1}{2} \int_0^l w_1^2 dx, \quad \frac{d^2 u_1(l)}{dx^2} = 0, \\
 u_2(0) = -\frac{1}{2} \int_0^{l+\Delta l} w_2^2 dx, \quad \frac{d^2 u_2(0)}{dx^2} = 0, \quad u_2(l) = 0, \quad \frac{d^2 u_2(l)}{dx^2} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

При действии переносного ускорения подвижная масса отклоняется и в системе появляется продольная сжимающая сила для одного из резонаторов и растягивающая сила для второго резонатора, что приводит к изменению частот колебаний двух резонаторов по своим нижним изгибным формам. Сигналы с двух емкостных преобразователей с различными частотами суммируются, и на выходе получается сигнал, имеющий вид биений. Ускорение объекта измеряется по огибающей режима биений в выходном сигнале датчика.

Малым изменениям измеряемого ускорения соответствует малое изменение каждой из частот резонаторов, при этом частота огибающей изменяется существенно. Дифференциальный способ измерения позволяет повысить точность измерения. Основным режимом работы такого акселерометра должен быть именно режим биений. Настоящее исследование направлено на выявление возможности получения такого режима и подбор параметров датчика, обеспечивающих его реализацию.

Уравнение движения инерционной массы (ИМ) имеет вид

$$M\ddot{y} + c(y - u_1(l)) + c(y + u_2(0)) - MW = 0,
 \tag{2}$$

где  $y$  — продольное перемещение ИМ;  $M$  — масса;  $c$  — жесткость подвеса, связывающего ИМ с чувствительным элементом;  $W$  — ускорение корпуса;  $u_1(l), u_2(0)$  — смещения концов двух микробалок. Отметим, что балочные элементы имеют различные длины  $l$  и  $l + \Delta l$ .

В целях повышения чувствительности датчика упругий подвес инерционной массы проектируется с целенаправленно малой жесткостью и, как следствие, низкой частотой свободных колебаний по сравнению с резонансными частотами балочных чувствительных элементов. В условиях медленного, близкого к статическому, инерционного нагружения системы (плавного изменения переносного ускорения объекта) можно пренебречь силами инерции подвижной массы. Дополнительная динамика массы, вызванная ее механической связью с резонирующими балочными элементами, также пренебрежимо мала по причине указанной выше несопоставимости собственных частот массы на упругом подвесе и микробалочных резонаторов. С учетом

сказанного получим следующее выражение для квазистатического смещения инерционной массы:

$$y = \frac{1}{2c} \left( c[u_1(l) - u_2(0)] + MW \right). \quad (3)$$

Уравнения продольных колебаний микробалочных чувствительных элементов акселерометра имеют вид

$$\begin{aligned} -N'_{1,2} + \rho S \ddot{u}_{1,2} &= 0, \\ u'_{1,2} + \frac{1}{2}(w'_{1,2})^2 - \frac{N_{1,2}}{ES} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где индексы 1 и 2 относятся к разным чувствительным элементам;  $u_{1,2}$  — продольные перемещения сечений первой и второй балок соответственно;  $w_{1,2}$  — поперечные перемещения первой и второй балок;  $E$  — модуль Юнга;  $S$  — площадь поперечного сечения;  $N_{1,2}$  — соответствующие продольные силы;  $(\cdot)'$  — производная по координате;  $(\dot{\cdot}) = \frac{d}{dt}$  — производная по времени. Полагая, что влиянием сил инерции в продольном направлении можно пренебречь, получаем  $N'_1 = 0$  и  $N'_2 = 0$ , а значит, продольные силы не зависят от координаты  $x$ . Нелинейность балочного элемента объясняется наличием осевой силы, в которой учитывается влияние упругого элемента (пружины). Тогда, интегрируя второе уравнение из (4) с учетом граничных условий, получим

$$u_1(l) = \frac{N_1 l}{ES} - \frac{1}{2} \int_0^l w_1'^2 dx, \quad u_2(0) = -\frac{1}{2} \int_0^{l+\Delta l} w_2'^2 dx. \quad (5)$$

Обозначим для удобства дальнейших вычислений:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^l w_1'^2 dx, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{l+\Delta l} w_2'^2 dx. \quad (6)$$

В уравнении (2) усилия в пружинах имеют вид

$$N_1 = cy - cu_1(l), \quad N_2 = -cy - cu_2(0). \quad (7)$$

Подставим выражения (3) и (5) в уравнения (7), получим выражения для продольных сил  $N_{1,2}$ :

$$N_1 = \frac{1}{2} MW + \frac{1}{2} c(I_1 + I_2), \quad N_2 = -\frac{1}{2} MW + \frac{1}{2} c(I_1 + I_2). \quad (8)$$

Для описания динамики балочных элементов будем использовать упрощенную модель Бернулли — Эйлера. Уравнения поперечных колебаний имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} EI w_1'''' + c_d \dot{w}_1 - \left( \frac{1}{2} MW + \frac{1}{2} c(I_1 + I_2) \right) w_1'' + \rho S \ddot{w}_1 &= \tilde{F}_1(x, w_1, w_2), \\ EI w_2'''' + c_d \dot{w}_2 - \left( -\frac{1}{2} MW + \frac{1}{2} c(I_1 + I_2) \right) w_2'' + \rho S \ddot{w}_2 &= \tilde{F}_2(x, w_1, w_2), \end{aligned} \right. \quad (9)$$

где  $I$  — момент инерции сечения;  $c_d$  — коэффициент демпфирования;  $\rho$  — объемная плотность материала;  $\tilde{F}_{1,2}(x, w_1, w_2)$  — управляющие воздействия двух автогенераторов.

Введем безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} 2\hat{n} &= \frac{12c_d l^4}{ETb_w h^3}, & \hat{p} &= \frac{6MWl^2}{Eb_w h^3}, & \hat{\gamma} &= \frac{3cl}{Eb_w h}, \\ w_1 &= \tilde{w}_1 h, & w_2 &= \tilde{w}_2 h, & x &= \tilde{x} l, & t &= \tilde{t} T, & T &= \sqrt{\frac{\rho S l^4}{EI}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $b_w$  и  $h$  — ширина и толщина подвижного элемента;  $T$  — постоянная времени.

Подставляя (10) в (9) и опуская знак  $\sim$ , получим систему уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{cases} w_1'''' + 2\hat{n}\dot{w}_1 - \hat{p}w_1'' - \hat{\gamma}\left(\int_0^1 w_1'^2 dx + \int_0^{1+\Delta l/l} w_2'^2 dx\right)w_1'' + \ddot{w}_1 = \tilde{F}_1(x, w_1, w_2), \\ w_2'''' + 2\hat{n}\dot{w}_2 + \hat{p}w_2'' - \hat{\gamma}\left(\int_0^1 w_1'^2 dx + \int_0^{1+\Delta l/l} w_2'^2 dx\right)w_2'' + \ddot{w}_2 = \tilde{F}_2(x, w_1, w_2). \end{cases} \quad (11)$$

Далее применим метод Галёркина в разложении по собственным формам шарнирно опертой балки:

$$w_1(x, t) = \xi(t)\sin(\pi x), \quad w_2(x, t) = \zeta(t)\sin\left(\frac{\pi x}{1 + \frac{\Delta l}{l}}\right). \quad (12)$$

Редуцированная модель системы с учетом новых параметров системы  $2n = \frac{2\hat{n}}{\pi^2}$ ,  $p = \frac{\hat{p}}{\pi^2}$ ,  $\gamma = \frac{\hat{\gamma}}{4}$ ,  $\tau = t\pi^2$ , а также с учетом разложения в ряд Тейлора по параметру  $\kappa$  приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + (1+p)\xi + \gamma(\xi^2 + (1-\kappa)\zeta^2)\xi = G_1(\xi, \zeta), \\ \ddot{\zeta} + 2n\dot{\zeta} + (1-2\kappa)(1-2\kappa-p)\zeta + \gamma(\xi^2 + (1-\kappa)\zeta^2)\zeta = G_2(\xi, \zeta), \end{cases} \quad (13)$$

где  $\kappa = \frac{\Delta l}{l}$ ;  $G_{1,2}(\xi, \zeta)$  — управляющие воздействия двух автогенераторов после редуцирования модели;  $(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d}{d\tau}$  — производная по новому времени.

Уравнения (13) описывают динамику двух чувствительных элементов с учетом различия в длинах балочных элементов. Как видно из уравнений (13), наличие конструктивных несовершенств в системе приводит к модификации коэффициентов линейной и кубической жесткостей двух осцилляторов. С целью дальнейшего качественного анализа влияния фактора возмущения на сценарии связанных колебаний системы выполним упрощение модели — учтем фактор технологического возмущения лишь в линейной части уравнений, видоизменив форму записи данного фактора и выполнив разложение в ряд Тейлора по малому возмущению:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + (1+p)\xi + \gamma(\xi^2 + \zeta^2)\xi = G_1(\xi, \zeta), \\ \ddot{\zeta} + 2n\dot{\zeta} + (1-a)(1-p)\zeta + \gamma(\xi^2 + \zeta^2)\zeta = G_2(\xi, \zeta), \end{cases} \quad (14)$$

где  $a = 4\kappa$  — фактор технологического возмущения, вызванный различием геометрических или материальных параметров.

С учетом работы автоколебательных контуров, моделируемых слагаемыми Ван дер Поля, уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2n(1-K+3K\beta\xi^2)\dot{\xi} + (1+p)\xi + \gamma\xi(\xi^2 + \zeta^2) = 0, \\ \ddot{\zeta} + 2n(1-K+3K\beta\zeta^2)\dot{\zeta} + (1-a)(1-p)\zeta + \gamma\zeta(\xi^2 + \zeta^2) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где  $K$  — коэффициент усиления;  $\beta$  — коэффициент при кубической нелинейности усилителя. Введем  $\mu = n(1 - K) < 0$ , так как  $K > 1$ ;  $b = \frac{\alpha}{K-1} > 0$ ,  $\alpha = 3K\beta$ .

Итоговые уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + 2\mu(1 - b\xi^2)\dot{\xi} + (1 + p)\xi + \gamma\xi(\xi^2 + \zeta^2) = 0, \\ \ddot{\zeta} + 2\mu(1 - b\zeta^2)\dot{\zeta} + (1 - a)(1 - p)\zeta + \gamma\zeta(\xi^2 + \zeta^2) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Введем универсальную систему обозначений:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \xi = -C_1\dot{\xi} + C_2\xi^2\dot{\xi} - C_3\xi - C_4\xi(\xi^2 + \zeta^2), \\ \ddot{\zeta} + \zeta = -Q_1\dot{\zeta} + Q_2\zeta^2\dot{\zeta} + Q_3\zeta + Q_4\zeta - Q_5\zeta - Q_6\zeta(\xi^2 + \zeta^2), \end{cases} \quad (17)$$

где  $C_1 = 2\mu$ ;  $C_2 = 2\mu b$ ;  $C_3 = p$ ;  $C_4 = \gamma$ ;  $Q_1 = 2\mu$ ;  $Q_2 = 2\mu b$ ;  $Q_3 = a$ ;  $Q_4 = p$ ;  $Q_5 = pa$ ;  $Q_6 = \gamma$ .

Нахождение медленной эволюции нелинейных колебаний системы (17) методом многих масштабов с представлением решения в классических амплитудно-фазовых медленных переменных приводит к автономной динамической системе, для которой установившийся режим характеризуется постоянством амплитуд двух модальных координат и линейным возрастанием их фаз. Такой характер решения с позиций теории динамических систем не является положением равновесия или предельным циклом, что не позволяет применить численный аппарат теории продолжения решений нелинейных уравнений. Для преодоления этого затруднения был выполнен переход к новым переменным [10]:

$$u = \xi + \zeta, \quad v = \xi - \zeta, \quad (18)$$

где  $u$  является полезным выходным сигналом как сумма сигналов с двух емкостных преобразователей. Перемещения  $\xi$  и  $\zeta$  запишем следующим образом:

$$\xi = \frac{u + v}{2}, \quad \zeta = \frac{u - v}{2}. \quad (19)$$

Разрешив систему относительно старших производных, получаем систему уравнений движения в новых координатах:

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + C_1 \frac{\dot{u} + \dot{v}}{2} + Q_1 \frac{\dot{u} - \dot{v}}{2} + C_3 \frac{u + v}{2} + (Q_5 - Q_3 - Q_4) \frac{u - v}{2} - C_2 \left(\frac{u + v}{2}\right)^2 \frac{\dot{u} + \dot{v}}{2} - \\ - Q_2 \left(\frac{u - v}{2}\right)^2 \frac{\dot{u} - \dot{v}}{2} + C_4 \frac{u + v}{2} \left(\left(\frac{u - v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u + v}{2}\right)^2\right) + Q_6 \frac{u - v}{2} \left(\left(\frac{u - v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u + v}{2}\right)^2\right) = 0, \\ \ddot{v} + v + C_1 \frac{\dot{u} + \dot{v}}{2} - Q_1 \frac{\dot{u} - \dot{v}}{2} + C_3 \frac{u + v}{2} - (Q_5 - Q_3 - Q_4) \frac{u - v}{2} - C_2 \left(\frac{u + v}{2}\right)^2 \frac{\dot{u} + \dot{v}}{2} + \\ + Q_2 \left(\frac{u - v}{2}\right)^2 \frac{\dot{u} - \dot{v}}{2} + C_4 \frac{u + v}{2} \left(\left(\frac{u - v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u + v}{2}\right)^2\right) - Q_6 \frac{u - v}{2} \left(\left(\frac{u - v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u + v}{2}\right)^2\right) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Введем в уравнения (20) малый параметр  $\varepsilon$  следующим образом:  $C_1 = \varepsilon C_1$ ,  $C_3 = \varepsilon C_3$ ,  $Q_1 = \varepsilon Q_1$ ,  $Q_3 = \varepsilon Q_3$ ,  $Q_4 = \varepsilon Q_4$ ,  $Q_5 = \varepsilon Q_5$ . Решение системы нелинейных ОДУ будем находить с помощью асимптотического метода многих масштабов.

Следуя методу многих масштабов, решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u_1(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^2 u_2(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau_0, \tau_1, \tau_2), \\ v &= \varepsilon v_1(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^2 v_2(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^3 v_3(\tau_0, \tau_1, \tau_2), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\tau_k = \varepsilon^k \tau$  — различные масштабы времени.

Производные по безразмерному времени  $\tau$  выразим через производные по  $\tau_k$ :

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2), \quad (22)$$

где  $D_k = \partial/\partial\tau_k$ . Подставляя (21) и (22) в уравнения (20) и группируя члены по степеням параметра  $\varepsilon$ , получим итерационную последовательность систем уравнений.

Уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + u_1 &= 0, \\ D_0^2 v_1 + v_1 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_2 + u_2 &= 2D_0 D_1 u_1 + C_1 \left( \frac{D_0 u_1}{2} + \frac{D_0 v_1}{2} \right) + Q_1 \left( \frac{D_0 u_1}{2} - \frac{D_0 v_1}{2} \right) + \\ &+ C_3 \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right) + (Q_5 - Q_3 - Q_4) \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right), \\ D_0^2 v_2 + v_2 &= 2D_0 D_1 v_1 + C_1 \left( \frac{D_0 u_1}{2} + \frac{D_0 v_1}{2} \right) - Q_1 \left( \frac{D_0 u_1}{2} - \frac{D_0 v_1}{2} \right) + \\ &+ C_3 \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right) - (Q_5 - Q_3 - Q_4) \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения третьего приближения:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_3 + u_3 &= 2D_0 D_1 u_2 + 2D_0 D_2 u_1 + D_1^2 u_1 + C_3 \left( \frac{u_2}{2} + \frac{v_2}{2} \right) + (Q_5 - Q_5 - Q_3) \left( \frac{u_2}{2} - \frac{v_2}{2} \right) + \\ &+ C_1 \left( \frac{D_0 u_2}{2} + \frac{D_1 u_1}{2} + \frac{D_0 v_2}{2} + \frac{D_1 v_1}{2} \right) + Q_1 \left( \frac{D_0 u_2}{2} + \frac{D_1 u_1}{2} - \frac{D_0 v_2}{2} - \frac{D_1 v_1}{2} \right) + \\ &+ C_4 \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right) \left( \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right)^2 \right) + Q_6 \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right) \left( \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right)^2 \right) - \\ &- C_2 \left( \frac{D_0 u_1}{2} + \frac{D_0 v_1}{2} \right) \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right)^2 - Q_2 \left( \frac{D_0 u_1}{2} - \frac{D_0 v_1}{2} \right) \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right)^2, \\ D_0^2 v_3 + v_3 &= 2D_0 D_1 u_2 + 2D_0 D_2 u_1 + D_1^2 u_1 + C_3 \left( \frac{u_2}{2} + \frac{v_2}{2} \right) - (Q_5 - Q_5 - Q_3) \left( \frac{u_2}{2} - \frac{v_2}{2} \right) + \\ &+ C_1 \left( \frac{D_0 u_2}{2} + \frac{D_1 u_1}{2} + \frac{D_0 v_2}{2} + \frac{D_1 v_1}{2} \right) - Q_1 \left( \frac{D_0 u_2}{2} + \frac{D_1 u_1}{2} - \frac{D_0 v_2}{2} - \frac{D_1 v_1}{2} \right) + \\ &+ C_4 \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right) \left( \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right)^2 \right) - Q_6 \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right) \left( \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right)^2 \right) - \\ &- C_2 \left( \frac{D_0 u_1}{2} + \frac{D_0 v_1}{2} \right) \left( \frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} \right)^2 + Q_2 \left( \frac{D_0 u_1}{2} - \frac{D_0 v_1}{2} \right) \left( \frac{u_1}{2} - \frac{v_1}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Решение порождающей системы уравнений (23) имеет вид  $u_1 = A_1(\tau_1, \tau_2) e^{i\tau_0} + \bar{A}_1(\tau_1, \tau_2) e^{-i\tau_0}$ ,  $v_1 = A_2(\tau_1, \tau_2) e^{i\tau_0} + \bar{A}_2(\tau_1, \tau_2) e^{-i\tau_0}$ , где комплексные амплитуды колебаний могут быть записаны как  $A_{1,2}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} a_{1,2}(\tau_1, \tau_2) e^{i\beta_{1,2}(\tau_1, \tau_2)}$ . Здесь  $a_i$  и  $\beta_i$  — подлежащие определению амплитуды и фазы колебаний как функции медленных переменных  $\tau_1, \tau_2$ .

Условия отсутствия секулярных слагаемых в решениях уравнений для старших приближений позволяют записать систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно величин  $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$  вида  $\frac{da_1}{d\tau} = J_1(a_1, a_2, \delta)$ ,  $\frac{da_2}{d\tau} =$

$J_2(a_1, a_2, \delta), \frac{d\delta}{d\tau} = J_3(a_1, a_2, \delta)$ , где введена разность фаз  $\delta = \beta_1 - \beta_2$ . Качественный параметрический анализ структуры фазового пространства этой системы позволяет исследовать возможные нелинейные динамические режимы чувствительных элементов датчика.

**3. Результаты моделирования. 3.1. Верификация построенной модели в медленных переменных.** Выполним верификацию построенной модели в медленных переменных путем сопоставления полученного асимптотического решения уравнений с прямым численным интегрированием системы (17) в программном комплексе Matlab встроенным методом ode45 для некоторых фиксированных значений параметров. На рис. 2, а, б представлены соответствующие результаты для двух возможных режимов работы датчика.

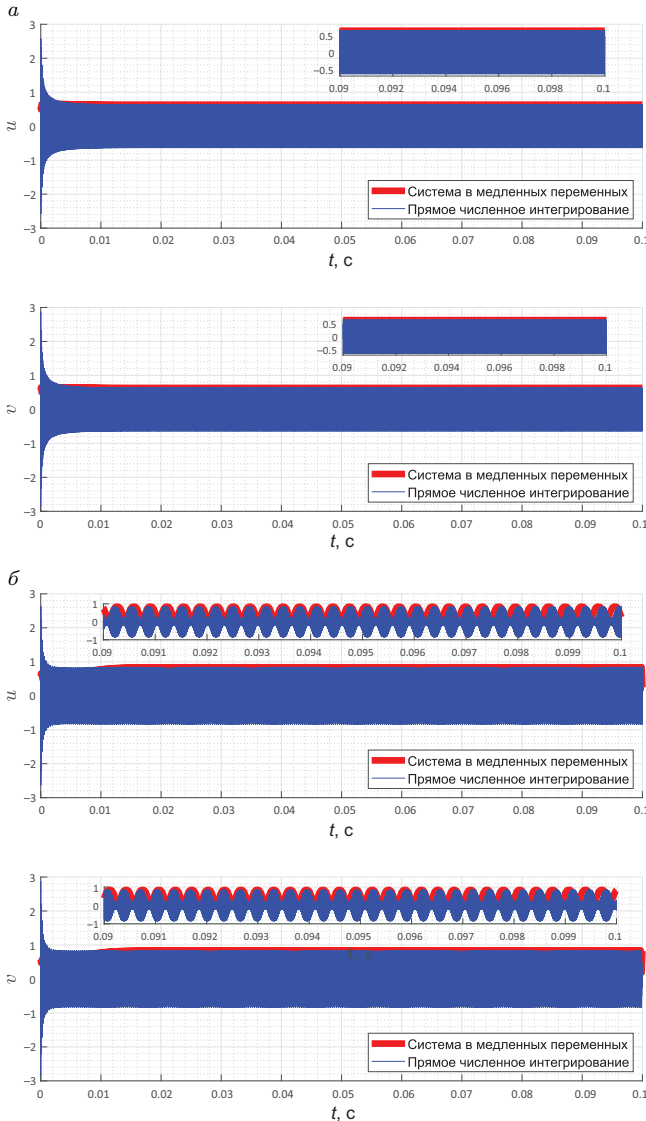


Рис. 2. Сравнение прямого численного ( $a = -0.04$ ) и асимптотического ( $a = -0.03$ ) решений. При  $p = 0.02$ ,  $b = 20$ ,  $\gamma = 0.1$ .



Как видно из рис. 2, при определенном выборе параметров в системе возможны два режима колебаний: одночастотный режим или синхронизация колебаний двух резонаторов (рис. 2, а) и двухчастотный режим или режим биений (рис. 2, б).

Совпадение прямого численного интегрирования с асимптотическим решением позволяет использовать асимптотическое разложение для дальнейшего качественного исследования возможных стационарных режимов, их эволюции и ветвления. Отметим, что полученные результаты свидетельствуют о возможности разрушения рабочего режима биений датчика по сценарию затягивания системы в режим самосинхронизации. Дальнейшее исследование состоит в изучении этого явления — определении параметрических областей синхронизации и биений, а также характера глобальной динамики системы в рассматриваемых случаях.

**3.2. Параметрическое исследование возможных режимов колебаний.** В первую очередь покажем наличие в системе особых точек, которые являются границей двух режимов работы датчика. Для этого исследуем характер стационарного режима синхронизации, пример которого приведен на рис. 2, а. Применим с этой целью численные алгоритмы теории бифуркаций [11]. На рис. 3 показана эволюция режима самосинхронизации двух резонаторов при изменении параметра неидентичности конструкции двух резонаторов.

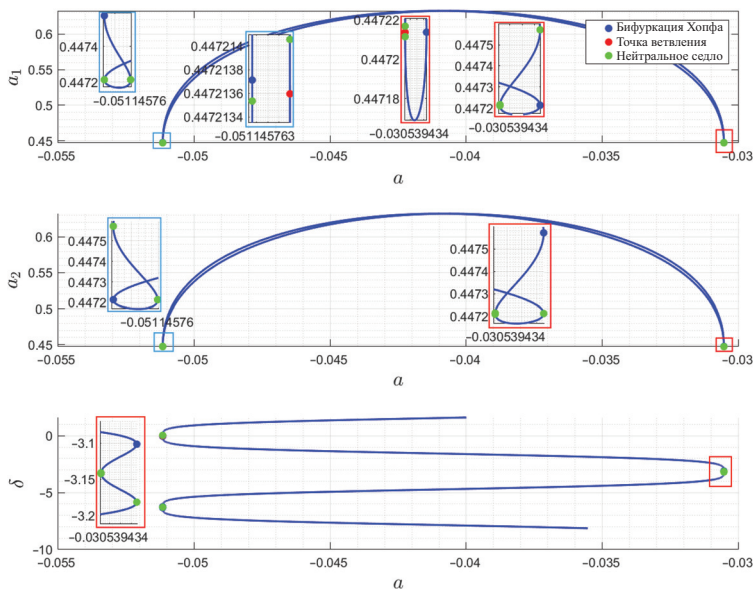
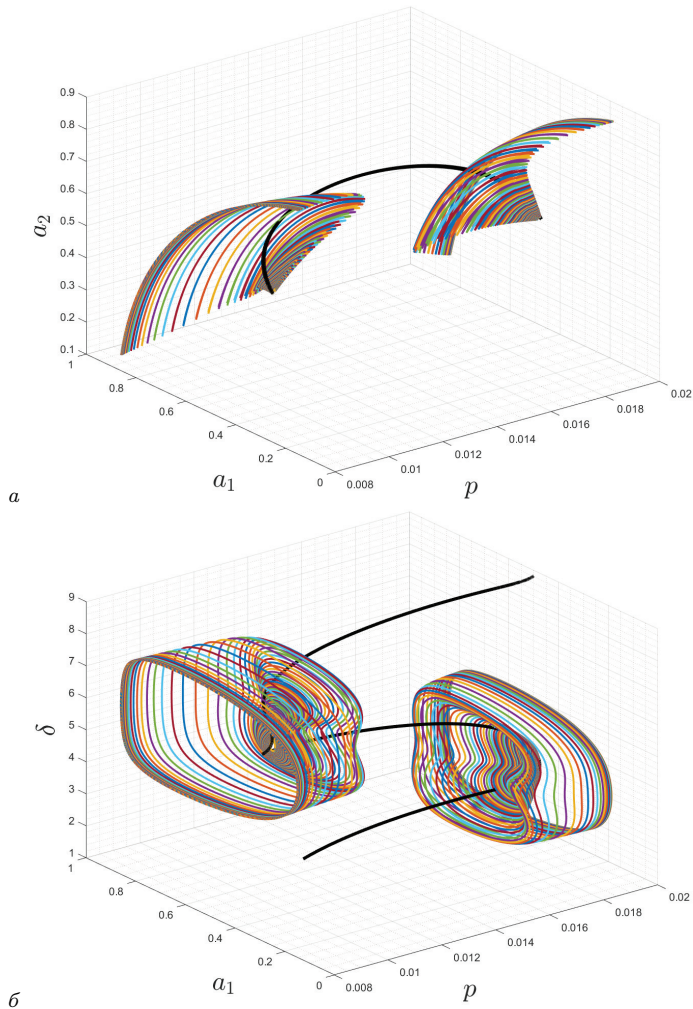


Рис. 3. Эволюция стационарного синхронизированного режима системы от параметра неидентичности конструкции двух резонаторов.

Из рис. 3 видно, что для принятых значений параметров синхронизация в системе возможна в определенном интервале значений параметра  $a$  в интервале  $[-0.051; -0.031]$ , на границах которого расположены точки бифуркации Хопфа, соответствующие рождению предельного цикла (режима биений) из особой точки типа «фокус» при прохождении собственных значений через мнимую ось.

Значительный интерес представляет зависимость рабочего режима биений от параметра  $p$ , характеризующего величину подлежащей измерению осевой силы

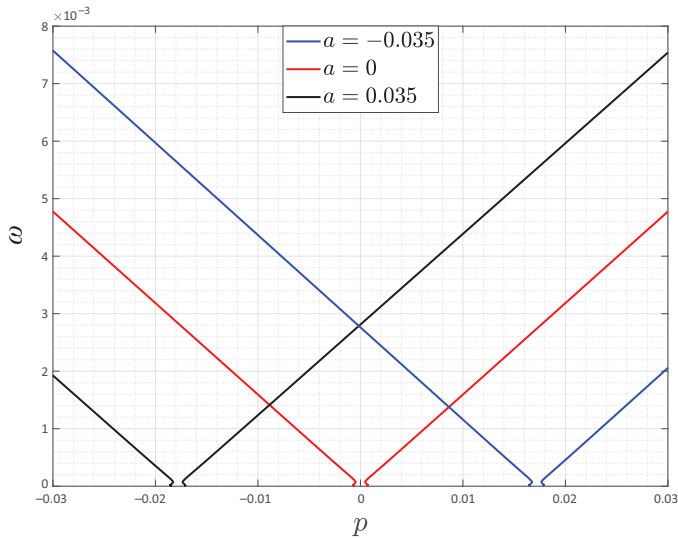


*Рис. 4.* Зависимость медленно изменяющихся амплитудно-фазовых переменных: *а* — зависимость медленно изменяющихся амплитуд  $a_1$ ,  $a_2$  от величины осевой силы; *б* — зависимость медленно изменяющихся амплитуды  $a_1$  и разности фаз  $\delta$  от величины осевой силы. Черная линия показывает возможные режимы синхронизации колебаний двух резонаторов, цветные кривые соответствуют предельным циклам.  $\gamma = 0.1$ ,  $a = -0.03$ .

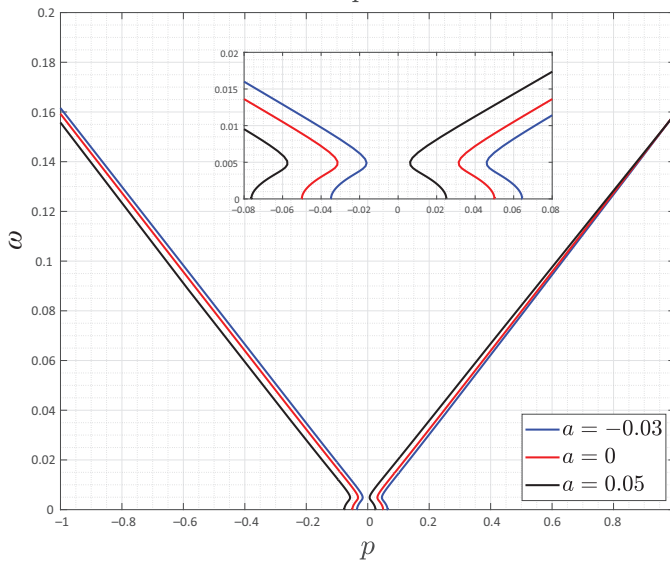
инерции подвижной массы акселерометра. Соответствующие результаты приведены на рис. 4.

Полученные рисунки позволяют оценить характер биений чувствительных элементов при заданном значении параметра  $p$ .

Напомним, что выходным сигналом датчика является частота медленной огибающей режима биений, поэтому на рис. 5, *а, б* показана зависимость частоты предельных циклов при изменении осевой силы  $p$  для различных значений параметра неидентичности конструкции двух резонаторов  $a$ .



а



б

Рис. 5. Зависимость частоты предельных циклов при изменении осевой силы  $p$  для различных значений параметра неидентичности конструкции двух резонаторов  $a$ :  $a - \gamma = 0.0150$ ;  $b - \gamma = 1$ .

Из рис. 5 видно, что при увеличении параметра нелинейной связи между двумя чувствительными элементами область синхронизации увеличивается (это область между двумя кривыми графика). Предлагаемый датчик может измерять малые ускорения, поэтому рабочим диапазоном будет область вблизи  $p = 0$ .

Определим границу между синхронизацией и биениями в пространстве основных параметров системы  $a, p, \gamma$ . Данные границы найдены посредством обнаружения точек бифуркации Хопфа и дальнейшего применения численной процедуры их продолжения по параметрам в программном комплексе Matcont [11].

Из рис. 6 видно, что увеличение связи  $\gamma$  между двумя резонаторами приводит к увеличению области самосинхронизации. В пространстве параметров можно вы-

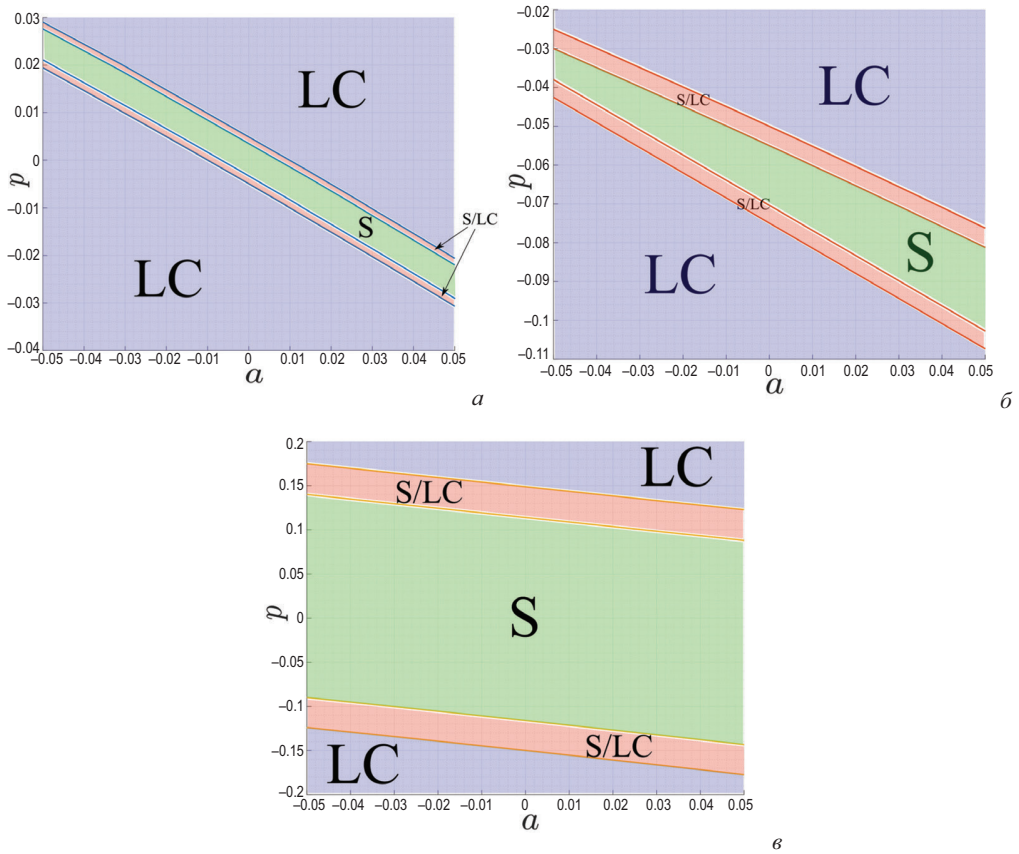


Рис. 6. Зависимость осевой силы  $p$  от параметра неидентичности конструкции двух резонаторов  $a$ . LC — limit cycle, S — synchronization: а —  $\gamma = 0.1$ ; б —  $\gamma = 1$ ; в —  $\gamma = 3$ .

делить три типа областей, в которых возможны разные сценарии колебательного процесса: только синхронизация, только биения, синхронизация или биения в зависимости от выбора начальных условий.

Приведем несколько числовых примеров для оценки чувствительности датчика, результаты моделирования которых приведены в табл. 1. Величина инерционной массы относится к массе балок  $M_{inertial\ mass} = 1000M_{beam}$ , толщина балочного элемента  $h = 10\mu m$ , различие в длинах балочных элементов  $\Delta l = 5\mu m$ , добротность системы  $Q = 2500$ . Результаты табл. 1 приведены в графическом виде на рис. 7.

Как видно из рис. 7, для предложенных конфигураций датчика зона подлежащих измерению относительно малых ускорений соответствует рабочему режиму биений. Видна также зависимость степени чувствительности устройства (наклона линии  $f(W)$ ) от принятой геометрии резонаторов.

Из табл. 1 можно сделать вывод, что при заданной толщине балки более длинный чувствительный элемент будет иметь большую чувствительность датчика. Относительная чувствительность рассчитывается как отношение чувствительности к частоте рабочего режима.

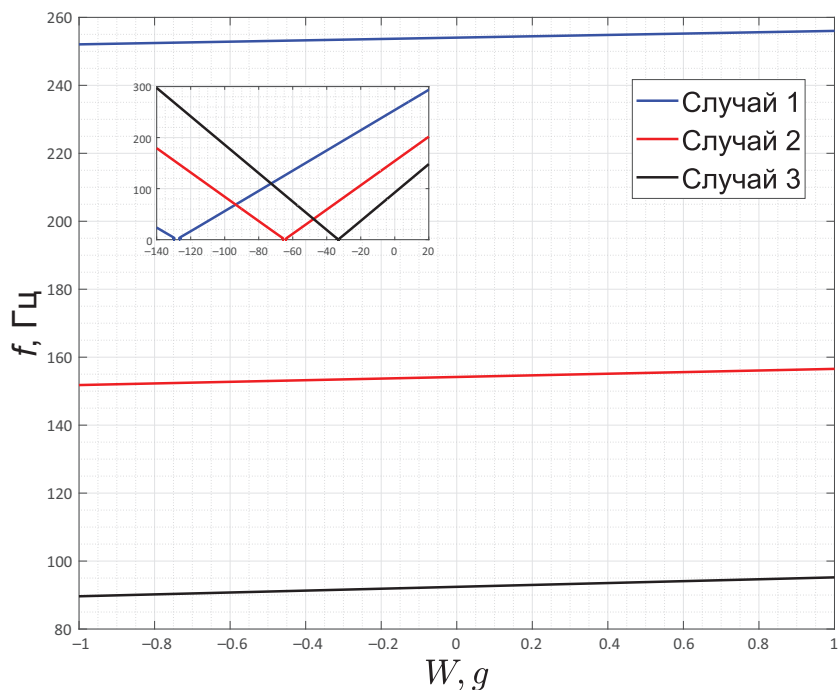


Рис. 7. Зависимость частоты предельных циклов от продольной компоненты ускорения.

Таблица 1. Геометрические размеры чувствительных элементов и чувствительность акселерометра

Параметры	Случай 1	Случай 2	Случай 3
$c/\frac{ES}{l}$	1/100	1/100	1/100
$\gamma$	0.0075	0.0075	0.0075
$a$	0.04	0.035	0.028
$l$ , мкм	500	600	700
Частота ПЦ $f$ , Гц при $p = 0$	254	154	92.4
Чувствительность $\Delta f$ , Гц/g	2	2.5	2.8
Относительная чувствительность $\Delta f/f$ , ppm/g	7874.01	12987.01	21645.02

Таблица 2. Сравнение относительных чувствительностей датчика

Источник	Относительная чувствительность при частотном выходе, ppm/g
Представленная работа	Случай 1: 7874.01    Случай 2: 12987.01    Случай 3: 21645.02
J. Yang [12]	1768.7
H. Kang [13]	500
H. Zhang [14]	1035

Приведем сравнение по относительной чувствительности датчика, представленного в данной работе, с известными опубликованными результатами.

Данные, приведенные в табл. 2, показывают, что предложенные в настоящей работе проекты конструкции датчика могут на порядок увеличить чувствительность системы по сравнению с известными акселерометрами с частотным выходом.

**4. Заключение.** В представленной работе предложена модель резонансного дифференциального МЭМС-акселерометра, состоящего из двух резонаторов и инерционной массы, которые связаны друг с другом посредством мягких пружин. Возбуждение и поддержание колебаний резонаторов осуществляются с помощью автогенераторов. Полученная с применением метода Галёркина система двух автогенераторов Ван дер Поля с нелинейной упругой связью между модальными координатами рабочих собственных форм исследована с помощью асимптотического метода многих масштабов. Аналитически и численно найдены режимы биений и синхронизации колебаний двух резонаторов, определена граница между этими режимами в пространстве параметров системы. Наряду с локальным бифуркационным анализом рассматриваемых стационарных режимов проведен также глобальный анализ эволюции и ветвления предельных циклов в пространстве медленных переменных, что позволило обнаружить зоны сосуществования устойчивых режимов синхронизации и биений со своими бассейнами притяжения. Изучено влияние фактора проектируемой или технологически обусловленной неидентичности конструкции двух резонаторов на расположение параметрических зон синхронизации и биений. Показано, что относительная чувствительность предлагаемой конструкции датчика может быть на порядок больше, чем у известных аналогов.

## Литература/References

1. Hajjaj A. Z., Jaber N., Pyas S., Alfosail F., Aramco S., Younis M. I. Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **119**, 103328 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103328>
2. Fang Z., Yin Y., Chen C., Zhang S., Liu Y., Han F. T. A sensitive micromachined resonant accelerometer for moving-base gravimetry. *Sensors and Actuators A: Physical* **325**, 112694 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.sna.2021.112694>
3. Endo D., Yabuno H., Yamamoto Y., Matsumoto S. Mass sensing in a liquid environment using nonlinear self-excited coupled-microcantilevers. *Journal of Microelectromechanical Systems* **99**, 1–6 (2018). <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2018.2866877>
4. Mustafazade A., Pandit M., Zhao C., Sobreviela G., Du Z., Steinmann P., Zou X., Howe R. T., Seshia A. A. A vibrating beam MEMS accelerometer for gravity and seismic measurements. *Sci. Rep.* **10**, 10415 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41598-020-67046-x>
5. Rand R. H., Holmes P. J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **15** (4–5), 387–399 (1980).
6. Wei X., Xu L., Jian Z., Huan R. MEMS based ultra-high order frequency multiplication utilizing superharmonic synchronization effect. *Sensors and Actuators A: Physical* **332**, 113152 (2021).
7. Chakraborty T., Rand R. H. The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **23** (5–6), 369–376 (1988).
8. Wirkus S., Rand R. The dynamics of two coupled van der Pol oscillators with delay coupling. *Nonlinear Dynamics* **30** (3), 205–221 (2002).
9. Kovaleva M. A., Manevitch L. I., Pilipchuk V. N. Non-linear beatings as non-stationary synchronization of weakly coupled autogenerators. *Problems of Nonlinear Mechanics and Physics of Materials*. Cham, Springer, 53–83 (2019).
10. Shiroky I. B., Gendelman O. V. Modal synchronization of coupled bistable van der Pol oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals* **143**, 110555 (2021).

11. Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A. MATCONT: a Matlab package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM Transactions on Mathematical Software* **29** (2), 141–164 (2003). <https://doi.org/10.1145/980175.980184>

12. Yang J., Zhong J., Chang H. A closed-loop mode-localized accelerometer. *Journal of Microelectromechanical Systems* **27** (2), 210–217 (2018).

13. Kang H., Yang J., Chang H. A closed-loop accelerometer based on three degree-of-freedom weakly coupled resonator with self-elimination of feedthrough signal. *IEEE Sensors Journal* **18** (10), 3960–3967 (2018).

14. Zhang H. M., Yuan W. Z., Li B. Y., Hao Y. C., Kraft M., Chang H. L. A novel resonant accelerometer based on mode localization of weakly coupled resonators. In: *18<sup>th</sup> International Conference: on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems*. Transducers-2015. Anchorage, Alaska, USA, June 21–25, 2015, 1073–1076 (2015).

Статья поступила в редакцию 5 июля 2022 г.;  
доработана 16 ноября 2022 г.;  
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

#### Контактная информация:

*Индейцев Дмитрий Анатольевич* — д-р физ.-мат. наук, проф. (1948–2022)

*Игумнова Василиса Сергеевна* — аспирант; [igumnovavs@mail.ru](mailto:igumnovavs@mail.ru)

*Лукин Алексей Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, доц.; [lukin\\_av@spbstu.ru](mailto:lukin_av@spbstu.ru)

*Попов Иван Алексеевич* — ведущий инженер; [popov\\_ia@spbstu.ru](mailto:popov_ia@spbstu.ru)

*Штукин Лев Васильевич* — канд. физ.-мат. наук, доц.; [shtukin\\_lv@spbstu.ru](mailto:shtukin_lv@spbstu.ru)

## Differential resonant MEMS accelerometer: Synchronization characteristics of weakly coupled microbeam sensing elements\*

*D. A. Indeitsev*<sup>† 1,2</sup>, *V. S. Igumnova*<sup>1</sup>, *A. V. Lukin*<sup>1</sup>, *I. A. Popov*<sup>1</sup>, *L. V. Shtukin*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,

29, ul. Politekhnicheskaja, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute of Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,  
61, Bolshoi pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

**For citation:** Indeitsev D. A., Igumnova V. S., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Differential resonant MEMS accelerometer: Synchronization characteristics of weakly coupled microbeam sensing elements. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 289–304. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.210> (In Russian)

This work is devoted to studying the conditions and scenarios for synchronizing oscillations of weakly coupled microbeam elements of a differential resonant MEMS accelerometer operating in the dual-loop self-oscillator mode. The model of a system of two Van der Pol self-oscillators with a nonlinear elastic coupling between moving elements, obtained using the Galerkin method, was studied using the multiscale method. The modes of beats and synchronization of oscillations of two resonators are found analytically and numerically, and the boundary between these modes in the space of system parameters is determined. Along with a local bifurcation analysis of the considered stationary regimes, a global analysis of the evolution and branching of limit cycles in the space of slow variables was also carried out, which made it possible to detect zones of coexistence of stable synchronization and beat regimes with their basins of attraction. The influence of the factor of the designed or

---

\*The research is funded by Russian Science Foundation grant no.21-71-10009, <https://rscf.ru/en/project/21-71-10009/>.

technologically determined non-identity of the design of two resonators on the location of the parametric zones of synchronization and beats is studied.

*Keywords:* resonant accelerometer, weakly coupled systems, synchronizing oscillations, Van der Pol oscillator.

Received: July 5, 2022

Revised: November 16, 2022

Accepted: November 17, 2022

Authors' information:

*Dmitriy A. Indeitsev* (1948–2022)

*Vasilisa S. Igumnova* — igumnovavs@mail.ru

*Alexei V. Lukin* — lukin\_av@spbstu.ru

*Ivan A. Popov* — popov\_ia@spbstu.ru

*Lev V. Shtukin* — shtukin\_lv@spbstu.ru

## ХРОНИКА

21 сентября 2022 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступили кандидаты физ.-мат. наук Г. В. Павилайнен и В. Ю. Сахаров (СПбГУ) с докладом на тему «Математическое моделирование и расчет железобетонных большепролетных пологих оболочек».

Краткое содержание доклада:

Представлена ретроспектива развития теории оболочек и анализ применения технической теории оболочек академика В. В. Новожилова и теории пологих оболочек В. С. Власова к решению инженерных задач по строительству железобетонных сооружений с применением большепролетных пологих оболочек. Рассмотрены контактные задачи между оболочками двойкой кривизны и сжато-изогнутыми опорами, приведены результаты теоретических расчетов и решения в ЭВМ-постановке. Предлагается обзор реализованных проектов разных лет по строительству сооружений с применением оболочек двойкой кривизны. Дается оценка развития теории оболочек представителями школы В. В. Новожилова разных поколений.