УДК 510.6 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2
MSC 37C25, 55M20

Теорема о неподвижной точке через меру некомпактности для нового вида сжимающих отображений

Ю. Туаль, А. Джейд, Д. Аль-Мутавакиль

Университет Султана Мулай Слимана, Марокко, 23000, Бени-Меллал, 591

Для цитирования: *Туаль Ю., Джейд А., Аль-Мутавакиль Д.* Теорема о неподвижной точке через меру некомпактности для нового вида сжимающих отображений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 270–276. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.208

Статья продолжает недавние исследования авторов о сжимающих отображениях в ограниченном метрическом пространстве, без использования компактности пространства, и классе сжимающих отображений без использования регулярности для произвольной меры некомпактности. В статье используется понятие α-допустимых отображений в банаховых пространствах, вводится понятие T_β-сжимающих отображений и доказываются теоремы о неподвижной точке для такого типа сжатия. Эти теоремы обобщают и улучшают многие известные в литературе результаты. Кроме того, основной результат используется для доказательства существования решения интегрального уравнения Вольтерра при более общих предположениях, чем это делалось ранее.

Ключевые слова: фиксированная точка, мера некомпактности, α-допустимое отображение, T_β-сжимающее отображение, регулярность.

1. Введение. Мера некомпактности — один из самых мощных инструментов теории неподвижной точки. Существуют различные типы определений понятия мер некомпактности на метрических и топологических пространствах, но первоначально мера некомпактности была определена Куратовским [1]. Чтобы ввести меру некомпактности, Куратовский определил для семейства всех ограниченных подмножеств метрического пространства (X, d) следующую функцию:

$$\alpha(\Omega) = \inf \Big\{ \ \varepsilon > 0 \ : \ \Omega \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \ B_k \subset X, \ \mathrm{Diam}\,(B_k) \leq \varepsilon : k = 1, 2, \cdots, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

В 1955 г. Дарбо, используя этот подход, доказал теорему, гарантирующую существование неподвижных точек так называемых уплотняющих операторов [2], и обобщенную теорему Шаудера о неподвижной точке [3]. Позднее, в 1967 г., Садовский [4] доказал теорему о неподвижной точке для уплотняющих операторов, обобщающую теорему Дарбо о неподвижной точке.

С другой стороны, в 2012 г. Самет и др. [5] ввели понятие α-допустимого отображения. Используя это понятие, авторы определили α-ψ-сжимающие отображения и доказали существование неподвижной точки для таких отображений во множестве метрических пространств. Этот результат можно считать одним из важнейших обобщений теоремы Банаха о неподвижной точке. Проводя исследования в том же направлении, но с использованием меры некомпактности, Агаджани и Пурхад [6] доказали существование неподвижной точки для α-допустимых отображений.

В недавней работе [7] авторы получили результат для сжимающих отображений в ограниченном метрическом пространстве (X,d), удовлетворяющих условию $\inf_{x\neq y\in X}\{d(x,y)-d(Tx,Ty)\}>0$, не используя компактность пространства. Другие работы в этом направлении можно найти в [8–14]. Аналогично этим работам, совсем недавно, для произвольной меры некомпактности μ, авторы [15] получили результат для класса сжимающих отображений без использования регулярности при условии

$$\inf\big\{\mu(\Omega)-\mu(T(\Omega)) : \Omega\subset C, \mu(\Omega)>0\big\}>0. \tag{1}$$

Таким образом, возникает вполне естественный вопрос: можем ли мы распространить условие (1) на

$$\inf\big\{\mu(\Omega)-\mu(T(\Omega)) : \Omega\subset C, \mu(\Omega)>0\big\}\geq 0? \tag{2}$$

В настоящей работе, основываясь на понятии α-допустимых отображений, мы вводим понятие T_β-сжимающего отображения в банаховых пространствах, чтобы доказать новую теорему о неподвижной точке для нового типа сжимающих отображений, упомянутого в [2]. В литературе, известной авторам, это первая попытка доказать существование фиксированной точки отображений, удовлетворяющих условию $\mu(T(\Omega))\leq\mu(\Omega)$.

Наконец, в последнем разделе статьи существующий результат для интегрального уравнения Вольтерра рассматривается при новых и слабых условиях.

2. Подготовительный этап. В этом разделе мы приводим некоторые определения и результаты, которые потребуются далее.

Пусть X — банахово пространство, $\mathcal{M}_X$ — семейство всех ограниченных подмножеств, X и $\mathcal{N}_X$ — семейство всех относительно компактных множеств в X. Пусть $\overline{B}$ и $\mathrm{Cov}\,(B)$ — замыкание и замкнутая выпуклая оболочка $B\subset X$ соответственно.

Определение 1. *Отображение $\mu:\mathcal{M}_X\to[0,+\infty[$ называется мерой некомпактности, определенной на X, если оно имеет следующие свойства:*

(i) семейство $\ker\mu=\{B\in\mathcal{M}_X:\mu(B)=0\}$, непустое, и $\ker\mu\subset\mathcal{N}_X$;

(ii) $A\subset B\Rightarrow\mu(A)\leq\mu(B)$;

(iii) $\mu(B)=\mu(\overline{B})=\mu(\mathrm{Cov}\,(B))$;

(iv) $\mu(\lambda A+(1-\lambda)B)\leq\lambda\mu(A)+(1-\lambda)\mu(B)$ для всех $\lambda\in[0,1]$ и $A,\ B\in\mathcal{M}_X$;

(v) если $\{B_n\}$ представляет собой убывающую последовательность непустых, замкнутых и ограниченных подмножеств X с $\lim\mu(B_n)=0$, то $B_\infty=\cap_n B_n\neq\emptyset$.

Определение 2 ([16]). *Пусть μ — мера некомпактности в банаховом пространстве X. Мера μ однородна, если $\mu(\lambda A)=|\lambda|\mu(A)$ для $\lambda\in\mathbb{R}$. Если мера μ удовлетворяет условию $\mu(A+B)\leq\mu(A)+\mu(B)$, то она называется субаддитивной. Однородная и субаддитивная мера μ называется сублинейной.*

Определение 3 ([16]). *Говорят, что мера некомпактности μ обладает свойством максимума, если $\mu(A\cup B)=\max\{\mu(A),\mu(B)\}$.*

Определение 4 ([16]). *Сублинейная мера некомпактности μ, обладающая свойством максимума и такая, что $\ker\mu=\mathcal{N}_X$, называется регулярной мерой.*

Определение 5 ([6]). *Пусть заданы отображения* $T : C \subset X \to X$ *и* $\alpha : \mathcal{M}_X \to [0, +\infty)$.

Мы говорим, что T α*-допустимо, если*

$$\alpha(\Omega) \geq 1 \Rightarrow \alpha(\operatorname{Cov} T\Omega) \geq 1 \quad \text{для всех } \Omega \subset C,\ \Omega \in \mathcal{M}_X,\ T(\Omega) \in \mathcal{M}_X. \tag{3}$$

Лемма 1 ([6]). *Пусть* C *— ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства* X *и* $T : C \to C$ *— непрерывное и* α*-допустимое отображение такое, что* $\alpha(C) \geq 1$ *и*

$$\alpha(\Omega)\mu(T\Omega) \leq k\mu(\Omega) \quad \text{для всех } \Omega \subset C,$$

где $0 \leq k < 1$. *Тогда* T *имеет неподвижную точку.*

Теорема 1 (Шаудер [3]). *Пусть* C *— замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства* X. *Тогда каждое компактное непрерывное отображение* $T : C \to C$ *имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Теорема 2 (Дарбо, 1955 [17]). *Пусть* C *— непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства* X *и пусть* $T : C \to C$ *— непрерывное отображение. Предположим, что существует константа* $k \in [0, 1)$ *такая, что*

$$\mu(T(\Omega)) \leq k\mu(\Omega)$$

для любого подмножества Ω *в* C. *Тогда* T *имеет хотя бы одну неподвижную точку, где* μ *— произвольная мера некомпактности.*

Теорема 3 (Садовский [4]). *Предположим, что* C *— непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства* X *и* $T : C \to C$ *— непрерывное отображение. Если для любого непустого подмножества* Ω *в* C *с* $\mu(\Omega) > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mu(T(\Omega)) < \mu(\Omega),$$

где μ *— регулярная мера некомпактности в* X, *то* T *имеет хотя бы одну фиксированную точку в* C.

3. Основные результаты. Вначале введем определение и докажем лемму.

Определение 6. *Пусть* C *— ограниченное замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства* X *и* $T : C \to C$ *— отображение.* T *называется* T_β*-сжимающим отображением, если*

$$\inf \left\{ \mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0 \right\} > 0, \tag{4}$$

где β *— функция, удовлетворяющая неравенству*

$$\beta(\Omega) \leq 0 \Rightarrow \beta(\operatorname{Cov} T\Omega) \leq 0 \quad \text{для всех } \Omega \subset C,\ \Omega \in \mathcal{M}_X,\ T(\Omega) \in \mathcal{M}_X. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если* μ *— мера некомпактности, то* $\nu = e^\mu - 1$ *— мера некомпактности.*

Доказательство. Мы имеем $\nu(B) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(B) = 0$ для всех $B \in \mathcal{M}_X$. Так как функция exp непрерывная, неубывающая и выпуклая, то ν удовлетворяет всем свойствам меры некомпактности. $\square$

Основной результат статьи заключается в следующем.

Теорема 4. *Пусть C — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства X и $T : C \to C$ — непрерывное T_β-сжимающее отображение такое, что $\beta(C) \leq 0$ и*

$$\beta(B) \leq \inf\big\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\big\},$$

для всех $B \subset C$, где μ — произвольная мера некомпактности.

Тогда T имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Доказательство. Пусть

$$A = \inf\big\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\big\}.$$

Тогда

$$\mu(T(\Omega)) - \beta(\Omega) \leq \mu(\Omega) - A,$$

для всех $\Omega \subset C$, где $\mu(\Omega) > 0$.

Следовательно,

$$\alpha(\Omega)\exp(\mu(T(\Omega))) \leq k\exp(\mu(\Omega)),$$

где $k = \exp(-A) < 1$ и $\alpha(\Omega) = \exp(-\beta(\Omega))$.

Тогда

$$\alpha(\Omega)\nu(T(\Omega)) \leq k\nu(\Omega),$$

где ν — мера некомпактности, рассмотренная в лемме 2.

Согласно лемме 1, получаем, что T имеет хотя бы одну неподвижную точку. $\square$

Следствие ([15]). *Пусть C — непустое ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество банахова пространства X и $T : C \to C$ — непрерывное отображение такое, что*

$$\inf\big\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\big\} > 0.$$

Тогда T имеет хотя бы одну неподвижную точку, где μ — произвольная мера некомпактности.

4. Приложение. В этом разделе мы исследуем условие существования решения интегрального уравнения Вольтерра. С этой целью рассмотрим $X = \mathcal{C}([0,\tau],\mathbb{R})$ — пространство всех непрерывных функций из $[0,\tau]$ в $\mathbb{R}$ с $\tau > 0$. Заметим, что X является банаховым пространством с учетом стандартной нормы $||x|| = \max_{t\in[0,\tau]}|x(t)|$.

Пусть B — замкнутый промежуток в $\mathbb{R}$. Обозначим через $C = \mathcal{C}([0,\tau], B)$ пространство всех непрерывных функций из $[0,\tau]$ в B.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра:

$$x(t) = \int_0^t k(s, x(s))ds, \tag{6}$$

где $x \in C$ и $k : [0,\tau] \times B \to B$ — непрерывное отображение.

Пусть μ — мера некомпактности, определяемая следующим образом (см. [16]):

$$\mu(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} ||x||, \tag{7}$$

для всех $\Omega \in \mathcal{M}_X$.

Зададим функцию θ в виде

$$\begin{array}{rcl} \theta : [0, \tau] & \to & \mathbb{R} \\ \theta(t) & = & 0. \end{array}$$

Заметим, что μ — сублинейная мера некомпактности с максимальным свойством и $\ker \mu = \{\theta\} \neq \mathcal{N}_X$, поэтому μ не является регулярным.

Рассмотрим оператор $T : C \mapsto C$, определенный следующим образом:

$$T(x)(t) = \int_0^t k(s, x(s)) ds. \tag{8}$$

Таким образом, (6) имеет решение тогда и только тогда, когда T имеет хотя бы одну неподвижную точку.

При сделанных предположениях сформулируем следующую теорему.

Теорема 5. *Если существует $A > 0$ такое, что*

$$|k(t, x(t))| \leq \frac{1}{\tau}(|x(t)| - A), \tag{9}$$

для всех $t \in [0, \tau]$ и $x \in C$, то нелинейное интегральное уравнение (6) имеет решение.

Доказательство. Пусть $t \in [0, \tau]$, $\Omega \subset C \setminus \{\theta\}$ и $x \in \Omega$.

Рассмотрим функцию

$$\beta(\Omega) = \begin{cases} A, \text{ если } \Omega = \{\theta\}, \\ 0, \text{ если иначе}, \end{cases}$$

для всех $\Omega \subset C$.

Понятно, что функция β удовлетворяет условию (5).

Теперь имеем

$$\begin{aligned} |T(x)(t)| &\leq \int_0^t |k(s, x(s))| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (|x(s)| - A) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (||x|| - A) ds \leq \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} ||x|| + \beta(\Omega) - A \end{aligned}$$

и

$$||Tx|| \leq \sup_{x \in \Omega} ||x|| + \beta(\Omega) - A. \tag{10}$$

Следовательно,

$$\mu(T\Omega) \leq \mu(\Omega) + \beta(\Omega) - A. \tag{11}$$

Таким образом,
$$\mu(\Omega) - \mu(T\Omega) + \beta(\Omega) \geq A, \tag{12}$$
откуда следует
$$\inf\left\{\mu(\Omega) - \mu(T(\Omega)) + \beta(\Omega) : \Omega \subset C, \mu(\Omega) > 0\right\} \geq A \geq \beta(B), \tag{13}$$
для всех $B \subset C$.

Согласно теореме 4 заключаем, что оператор T имеет хотя бы одну неподвижную точку. $\square$

Литература/References

1. Kuratowski K. Sur les espaces complets. *Fundam. Math.* **15** (1930), 301–309.

2. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. *Fund. Math.* **3**, 133–181 (1922).

3. Schauder J. Der fixpunktsatz in funktionalräumen. *Studia Math.* **2**, 171–180 (1930).

4. Sadovskii B. N. A fixed point principle. *Functional Analysis and Its Applications* **1**, 74–76 (1967).

5. Samet B., Vetro C., Vetro P. Fixed point theorems for $\alpha{-}\psi$-contractive type mappings. *Nonlinear Analysis* **75** (4), 2154–2165 (2012). https://doi.org/10.1016/j.na.2011.10.014

6. Aghajani A., Pourhad E. Application of measure of noncompactness to l_1-solvability of finite systems of second order differential equations. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **22** (1), 105–118 (2015). https://doi.org/10.36045/bbms/1426856862

7. Touail Y., El Moutawakil D., Bennani S. Fixed point theorems for contractive selfmappings of a bounded metric space. *Journal of Function Spaces* **2019**, Article ID 4175807 (2019).

8. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point results for new type of multivalued mappings in bounded metric spaces with an application. *Ricerche di Matematica* **71**, 315–323 (2022). https://doi.org/10.1007/s11587-020-00498-5

9. Touail Y., El Moutawakil D. New common fixed point theorems for contractive self mappings and an application to nonlinear differential equations. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **12** (1), 903–911 (2021). https://doi.org/10.22075/ijnaa.2021.21318.2245

10. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems for new contractions with application in dynamic programming. *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 1, 206–212 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121020126

11. Touail Y., El Moutawakil D. Some new common fixed point theorems for contractive self mappings with applications. *Asian-European Journal of Mathematics* 2250080 (2021). https://dx.doi.org/10.1142/s1793557122500802

12. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems on orthogonal complete metric spaces with an application. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications* **12** (2), 1801–1809. https://doi.org/10.22075/ijnaa.2021.23033.2464 (2021).

13. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. New contribution in fixed point theory via an auxiliary function with an application. *Ricerche di Matematica* (2021). https://doi.org/10.1007/s11587-021-00645-6

14. Touail Y. On multivalued $\perp_\psi F$-contractions on generalized orthogonal sets with an aplication to integral inclusions, probl. *Anal. Issues Anal.* **11** (29), no. 3, 109–124 (2022). https://doi.org/10.15393/j3.art.2022.12030

15. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. Fixed point results for condensing operators via measure of non-compactness. *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, 347–352 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063454122030153

16. Banas J., Goebel K. *Measures of non-compactness in Banach Spaces.* New York, Marcel Dekker (1980).

17. Darbo G. Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **24**, 84–92 (1955).

Статья поступила в редакцию 20 июня 2022 г.;
доработана 7 ноября 2022 г.;
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

Контактная информация:

Туаль Юсеф — аспирант; youssef9touail@gmail.com
Джейд Амине — аспирант; aminejaid1990@gmail.com
Аль-Мутавакиль Дрисс — проф.; d.elmoutawakil@gmail.com

Fixed point theorem via measure of non-compactness for a new kind of contractions

Y. Touail, A. Jaid, D. El Moutawakil

Sultan Moulay Slimane University, 591, Beni-Mellal, 23000, Morocco

For citation: Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. Fixed point theorem via measure of non-compactness for a new kind of contractions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 270–276.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.208 (In Russian)

In this paper, we will use the notion of α-admissible mappings in Banach spaces, to introduce the concept of T_β-contractive mappings and establish a fixed point theorem for this type of contractions. Our theorems generalize and improve many results in the literature. Moreover, we apply the main result to prove the existence of a solution for Volterra-integral equation, under more general assumptions than previously made.

Keywords: fixed point, measure of non-compactness, α-admissible, T_β-contractive mapping, regularity.

Received: June 20, 2022
Revised: November 7, 2022
Accepted: November 17, 2022

Authors' information:

Youssef Touail — youssef9touail@gmail.com
Amine Jaid — aminejaid1990@gmail.com
Driss El Moutawakil — d.elmoutawakil@gmail.com