

## Отделение корней систем нелинейных уравнений. Стохастический подход\*

*С. М. Ермаков*<sup>1</sup>, *С. Н. Леора*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный экономический университет,  
Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. канала Грибоедова, 30–32

**Для цитирования:** *Ермаков С. М., Леора С. Н.* Отделение корней систем нелинейных уравнений. Стохастический подход // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 226–235.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.204>

Работа посвящена актуальной задаче отделения корней нелинейных систем уравнений в случае многих переменных. Использован известный метод сведения задачи решения системы к эквивалентной экстремальной задаче, которую предполагается решать одним из методов стохастической оптимизации. В качестве последнего выбран метод моделирования имитации отжига и его модификация, которые особенно интересны тем, что они допускают эффективную реализацию на квантовых вычислителях. Поскольку квантовые вычислители, основанные на имитации отжига, демонстрируют квантовое превосходство, полученные результаты могут быть полезны при решении систем уравнений на этих вычислителях.

*Ключевые слова:* абсолютный экстремум, имитация отжига, системы уравнений, отделение корней, квантовые вычисления.

**1. Введение.** Решение систем нелинейных уравнений является одной из центральных задач вычислительной математики. При этом почти все методы требуют на первом этапе указать малые, по возможности, окрестности нахождения корней (отделить корни). Если в одномерном случае эта проблема хорошо изучена (графические методы, бисекция и др.), то случай многих переменных изучен много хуже, а непосредственное обобщение одномерных приемов приводит, как правило, к экспоненциальному, с ростом размерности, росту вычислительной работы.

В данной работе указана эффективная, в частности и для случая многих переменных, процедура отделения корней нелинейной системы уравнений. Она основана на хорошо известной замене задачи вычисления корней эквивалентной экстремальной задачей [1] и применением одного из методов случайного поиска глобального экстремума. Таким методом является метод моделирования имитации отжига. В настоящее время он является широко распространенным методом численного определения глобального экстремума функций. Этот метод был предложен из физических соображений в 1983 г. в работе [2], и за прошедшее время им было решено много важных прикладных задач. Интересной его особенностью является то, что он допускает эффективную реализацию на квантово-механических устройствах (D-wave

---

\* Исследование выполнено в рамках проекта Санкт-Петербургского государственного университета, ID: 93024916.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

компьютеры). Именно примеры его применения на этих компьютерах позволили проиллюстрировать возможность квантового превосходства алгоритмов [3].

С математической точки зрения применяемая в работе модификация моделирования имитации отжига использует то обстоятельство, что определенная в области  $D \subset R^n$  функция  $f(x)$ ,  $x \in D$ , удовлетворяющая условию  $0 \leq f(x) \leq M < +\infty$ , позволяет находить точку ее наибольшего значения, моделируя плотность  $f^m(x)/\int_D f^m(x)dx$  при достаточно большом значении степени  $m$ .

Применение метода Метрополиса — Гастингса [4, 5] позволяет при этом обойти трудности, связанные с вычислением интеграла. Из сказанного, кроме того, видно, что метод не требует гладкости  $f(x)$  и эффективно работает, если точка экстремума принадлежит границе  $D$ .

**2. Теоретические основы модификации метода имитации отжига для отделения корней систем уравнений.** Подробное изложение теоретических основ используемой далее модификации имитации отжига можно найти в работе [6]. Ниже приводится лемма, развивающая эту модификацию для отделения корней. В отличие от работы [6] здесь имеется в виду интеграл Римана по области  $D \subset R^n$ .

Пусть  $f(X)$  задана в замкнутой области  $D \subset R^n$ ,  $0 \leq f(X) \leq M < +\infty$  и  $M$  ее наибольшее значение. Обозначим  $Q_1$  как подобласть  $D$ :

$$Q_1 = \{X : f(X) = M\} \quad (1)$$

и через  $F_m(X)$  — плотность распределения случайного вектора  $\Xi_m$

$$F_m(X) = \frac{f^m(X)}{\int_D f^m(X)dX}. \quad (2)$$

**Лемма.** В предположении, что мера множества  $Q_1$  положительна, вероятность  $P_m = P\{\Xi_m \in Q_1\}$  при  $m \rightarrow \infty$  стремится к 1.

**Доказательство.** Пусть  $Q_2 = D \setminus Q_1$ , так что  $D = Q_1 \cup Q_2$ ,  $Q_1 = \{X : f(X) = M\}$ .

Если

$$f_1(X) = \begin{cases} M, & X \in Q_1, \\ 0, & X \in Q_2, \end{cases}$$

$$f_2(X) = \begin{cases} f(X), & X \in Q_2, \\ 0, & X \in Q_1, \end{cases}$$

то

$$f^m(X) = (f_1(X) + f_2(X))^m = f_1^m(X) + f_2^m(X) = M^m + f_2^m(X) =$$

$$= M^m(1 + (f_2(X)/M)^m),$$

причем  $f_2(X)/M < 1$ .

$$P\{\Xi_m \in Q_1\} = \int_{Q_1} F_m(X)dX = \frac{M^m}{\int_D f^m(X)dX} = \frac{1}{1 + \int_D (f_2(X)/M)^m dX}.$$

Но  $\int_D f_2^m(X)/M^m dX \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , что и доказывает лемму.  $\square$

Пусть теперь задана система уравнений

$$g_j(X) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

и требуется найти ее решение.

Эквивалентная задача — найти минимум функции:

$$\hat{G}(X) = \sum_{j=1}^n g_j^2(X) \cdot a_j^2, a_j \neq 0 \quad (3)$$

или максимум функции:

$$G(X) = \frac{1}{b^2 + \sum_{j=1}^n g_j^2(X) \cdot a_j^2}, b \neq 0, \quad (4)$$

здесь  $b$  и  $a_j$  — произвольные константы.

Введем в рассмотрение функцию ( $0 < \varepsilon < 1$ ):

$$G_\varepsilon(X) = \begin{cases} 1/b^2 - \varepsilon, & G(X) > 1/b^2 - \varepsilon, \\ G(X), & G(X) \leq 1/b^2 - \varepsilon. \end{cases} \quad (5)$$

В предположении, что мера множества, где  $G_\varepsilon = 1/b^2 - \varepsilon$ , положительна, можно применить доказанную лемму.

Моделируя плотность  $F_m(X)$ , видим, что при фиксированном  $\varepsilon$  и  $m \rightarrow \infty$  все реализации вектора  $\Xi_m$ , согласно лемме, будут попадать во множество  $Q_1$ , что позволяет, регулируя значения  $m$  и  $\varepsilon$ , отделять корни системы  $g_j(X) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Таким образом, решается задача отделения простых корней. Кратные корни будут также отделяться, но не будет известно, что они кратные и какова их кратность.

При этом очевидно, что при относительно большом  $\varepsilon$  и фиксированном, но, может быть, небольшом  $m$  вероятность  $P_m$  будет близка к единице, в то время как при  $\varepsilon$  малых близость  $P_m$  к единице будет обеспечиваться ростом  $m$ .

При сравнительно небольших  $m$  процедура отделения корней может быть улучшена с помощью методов кластерного анализа.

**3. Численный эксперимент.** Далее приводятся численные эксперименты по отделению корней систем нелинейных уравнений. Наша цель — показать на некоторых примерах основные преимущества модифицированного метода имитации отжига для отделения корней. Будут рассмотрены три нелинейные системы: система второго порядка с хорошо отделяемыми корнями, система второго порядка с плохо отделяемыми корнями, а также нелинейная система шестого порядка с большим количеством корней.

Процедура отделения корней проводится в два этапа: моделирование исходного массива точек, использующего модифицированный метод имитации отжига, и кластеризация.

Основное преимущество модифицированного метода имитации отжига состоит в том, что с помощью только двух параметров,  $\varepsilon$  и  $m$ , можно сформировать множество кластеров для отделения корней.

Вычисления проводились с помощью программного обеспечения пакета *R*. Были использованы пакеты «GenSA» (имитация обжига) для генерации исходных данных [7] и «Cluster» (кластеризация) [8].

Программа моделирования имитации отжига потребовала небольшой модификации.

**3.1. Нелинейная система, простые корни.** Рассмотрим решение нелинейной системы:

$$\begin{cases} g_1(x, y) = y - \sin(x^2), \\ g_2(x, y) = y - 0.5x - 0.2. \end{cases} \quad (6)$$

Система имеет пять простых корней, корни хорошо отделимы, что легко показать графически. Рассмотрим далее решение с помощью модифицированного метода имитации отжига. Перейдем от задачи поиска минимума функции (1):

$$\hat{H}(x, y) = (y - \sin(x^2))^2 + (y - 0.5x - 0.2)^2 \quad (7)$$

к задаче поиска максимума функции (2):

$$H(x, y) = \frac{1}{1 + (y - \sin(x^2))^2 + (y - 0.5x - 0.2)^2}. \quad (8)$$

Построим функцию  $H_\varepsilon(x, y)$  согласно (5), здесь  $b^2 = 1$ ,

$$H_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} 1 - \varepsilon, & H(x, y) > 1 - \varepsilon, \\ H(x, y), & H(x, y) \leq 1 - \varepsilon. \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим класс функций  $F(m, H(x, y))$ , где  $m$  — параметр, а  $H(x, y)$  — это функция, глобальные экстремумы которой должны быть найдены:

$$F(m, H(x, y)) = \frac{H_\varepsilon^m(x, y)}{\int_D H_\varepsilon^m(x, y) dx dy}. \quad (10)$$

Как было доказано в работе [6], абсолютные экстремумы функции (10) при  $m \rightarrow \infty$  будут равномерно распределены на множестве  $M_\varepsilon = \{(x, y) : H_\varepsilon(x, y) = 1 - \varepsilon\}$ .

Использование модифицированного алгоритма предполагает задание последовательности двух основных параметров  $(\varepsilon_k, m_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . При каждом  $\varepsilon_k$  и  $m_k$  моделируется  $(H_{\varepsilon_k}(x, y))^{m_k}$  с целью формирования множества глобальных экстремумов  $M_k$ . Здесь  $\varepsilon_k$  — убывающая последовательность, а  $m_k$  — возрастающая.

Из доказательства леммы легко заключить, что при большом  $m$  и малом  $\varepsilon$  мера множества, где  $F(m, H(x, y))$ , может быть очень малой. Это приводит к тому, что снижается эффективность метода Метрополиса — Гастингса, возрастает его трудоемкость. Поэтому следует довольствоваться умеренными значениями  $m$  и  $\varepsilon$  и переходить к кластерным статистическим методам.

На вход кластерного анализа подается множество глобальных экстремумов  $M_k$  для заданных  $\varepsilon_k$  и  $m_k$ . Особенность кластеризации для рассматриваемой задачи состоит в том, что количество кластеров должно быть равно количеству корней системы на заданном множестве  $D$ . Для разбиения на кластеры использовался метод  $k$ -средних пакета «Cluster», минимизирующий суммарное квадратическое отклонение точек кластеров от центров этих кластеров. Центры полученных кластеров можно рассматривать как начальные приближения корней исходной системы (6).

Для оценки качества кластеризации использовался силуэтный анализ [9]. Проводилась серия кластеризаций с различным числом кластеров: от 2 до  $K$ . Для каждого кластера серии определялся коэффициент силуэта, затем вычислялся введенный Кауфманом [9] силуэтный коэффициент  $S$  как максимальное значение усредненных значений силуэтов по всем кластерам. Чем ближе силуэтный коэффициент к единице, тем успешнее кластеризация.

Зафиксируем значение параметра  $m_k = 1$  и выполним моделирование для убывающей последовательности  $\varepsilon_k = \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-10}\}$ .

На рис. 1 приведены результаты моделирования для некоторых значений  $\varepsilon_k$ . Маркеры на рисунках соответствуют корням системы, которые были найдены альтернативным методом для сравнения.

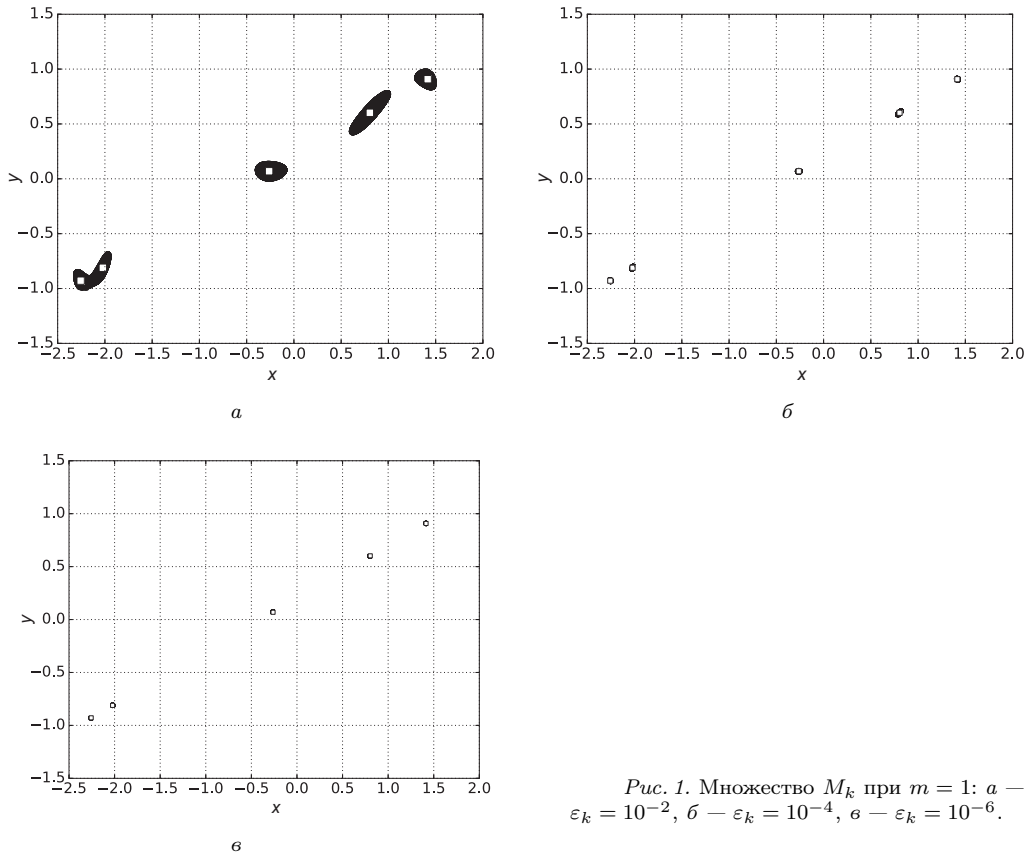


Рис. 1. Множество  $M_k$  при  $m = 1$ : а —  $\varepsilon_k = 10^{-2}$ , б —  $\varepsilon_k = 10^{-4}$ , в —  $\varepsilon_k = 10^{-6}$ .

Результаты расчетов приведены в табл. 1, где  $K$  — число кластеров, соответствующих максимальному значению силуэтного коэффициента  $S$  для множества глобальных экстремумов  $M_k$ ,  $R$  — максимальный радиус кластеров,  $P$  — количество точек в множестве  $M_k$ .

Таблица 1. Результаты расчетов при фиксированном параметре  $m = 1$

$\varepsilon_k$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$
$K$	2	4	5	5	5	5	5	5	4	0
$S$	0.53	0.78	0.91	0.97	0.99	1.0	1.0	1.0	0.92	0
$R$	0.41	0.25	7e-02	2e-02	9e-03	2e-03	8e-04	2e-04	9e-05	0
$P$	185658	63227	29922	20090	15833	8276	1349	118	13	1

Рассмотрим влияние параметра  $\varepsilon$  на отделение корней. Большое значение  $\varepsilon$  может значительно улучшить показатель попаданий исходных точек в множество  $M_\varepsilon$ , но слишком большой  $\varepsilon$  может привести к невозможности отделения всех корней.

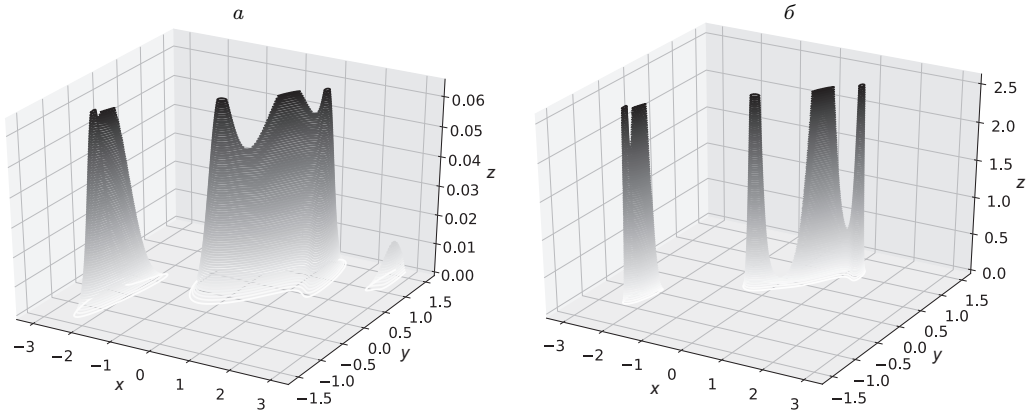


Рис. 2. График функции  $F(m, H(x, y))$  :  $m = 10$ (а),  $m = 30$  (б).

Таблица 2. Результаты расчетов при фиксированном параметре  $\varepsilon = 10^{-3}$

$m$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$K$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$S$	0.98	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
$R$	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$P$	15010	10993	8676	7212	6169	5342	4713	4240	3828	3504

Так, при  $\varepsilon = 10^{-2}$  формируется только четыре кластера, как это видно из рис. 1, а. При дальнейшем уменьшении  $\varepsilon$  количество кластеров стабилизируется и формируется предельное множество  $M_\varepsilon$ , содержащее пять кластеров. Затем количество кластеров опять начнет уменьшаться, так как частота попаданий точек в кластер тоже станет меньше.

Расчеты в табл. 1 указывают, что оптимальное разбиение состоит из пяти кластеров, максимальное достижимое значение  $\varepsilon = 10^{-8}$ , при количестве расчетных точек  $p = 10^6$ . Для большей точности корней потребуется генерация дополнительных точек.

Теперь зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-3}$ . В табл. 2 приведены результаты расчетов для возрастающей последовательности  $m_k = 1, 10, 20, \dots, 100$ . Количество расчетных точек  $p$  оставим прежним.

Как показывают расчеты, с ростом  $m$  качество отделения корней для системы (6) повышается незначительно, так как при  $\varepsilon = 10^{-3}$  корни уже достаточно хорошо отделены. Для двумерной задачи возможна визуализация, которая дает наглядное представление распределения корней для системы в зависимости от значения  $m$ . Графики для ряда значений  $m$ , представленные на рис. 2, наглядно это демонстрируют.

**3.2. Системы с плохо отделяемыми корнями. Масштабирование модели.** Рассмотрим систему гиперболических функций с плохо отделяемыми корнями:

$$\begin{cases} g_1(x, y) = x^2 + 5y^2 - 2.1x - y - 4.875, \\ g_2(x, y) = 2x^2 - y^2 - 4.2x + 0.2y + 3.4. \end{cases} \quad (11)$$

Для очень близких корней классический метод имитации отжига часто не позволяет отделить корни. Используя модифицированный имитационный отжиг, отделение корней можно регулировать параметрами  $m$  и  $\varepsilon$ .

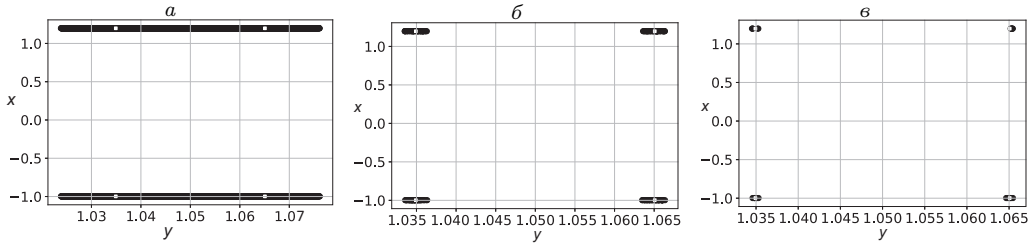


Рис. 3. Множество  $M_k$  при  $m = 1$ : а —  $\varepsilon_k = 10^{-6}$ , б —  $\varepsilon_k = 10^{-8}$ , в —  $\varepsilon_k = 10^{-9}$ .

Данная система имеет четыре корня. Это точки пересечения эллипса с гиперболой.

Зафиксируем  $m = 1$ . Для последовательности  $\varepsilon_k = \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-10}\}$  проведем расчеты. Результаты расчетов приведены на рис. 3.

Теперь зафиксируем  $\varepsilon = 10^{-6}$  и выполним расчеты для возрастающей последовательности  $m_k = 1, 10, 20, \dots, 120$ . Результаты разбиения на кластеры при фиксированных значениях  $m = 1$  и  $\varepsilon = 10^{-6}$  приведены в табл. 3, где  $K$  — количество кластеров. При росте  $m$  отделение корней значительно улучшается.

Таблица 3. Результаты кластеризации при фиксированных параметрах  $m$  и  $\varepsilon$

$\varepsilon_k$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$
$K$	2	2	2	2	2	2	4	4	4	0
$m_k$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$K$	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4

На рис. 3 видно, что область расположения корней узкая и длинная, это может затруднить отделение корней. При некоторых параметрах формируются только два кластера.

Другой подход для улучшения отделения корней — использование масштабирования. По переменной  $y$  корни хорошо отделяются, а по переменной  $x$  корни различаются со второго знака после запятой. В этом случае мы можем решить систему  $f(x/10, y)$ , выполнив замену переменной. В табл. 4 приведены результаты масштабирования гиперболической системы при фиксированном параметре  $m = 1$ . Таким образом, центры полученных кластеров дают хорошее начальное приближение для корней системы, даже без использования масштабирования.

Таблица 4. Результаты масштабирования гиперболической системы

Масштабирование, $x$	Без масштабирования, $x$	$y$
10.350335	1.035505	-0.997932
10.350217	1.034569	1.197932
10.651704	1.065150	-0.997932
10.650104	1.065224	1.197932

В табл. 5 приведены (для сравнения) значения корней системы, полученных при различных параметрах моделирования. Здесь  $(x_1, y_1)$  — корни, найденные альтернативным методом,  $(x_2, y_2)$  — координаты центров кластеров, полученных при фиксированном  $m = 1$ ,  $(x_3, y_3)$  — координаты центров кластеров, полученных при фиксированном  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Для системы (11) центры полученных кластеров дают хорошее начальное приближение для поиска корней системы при заданных параметрах.

Таблица 5. Результаты отделения корней гиперболической системы

Корни	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$
1	1.034924	-0.997932	1.035087	-0.997934	1.032617	-0.997946
2	1.034924	1.197932	1.035087	1.197931	1.036310	1.197937
3	1.065076	-0.997932	1.034924	1.197932	1.065151	-0.997952
4	1.065076	1.197932	1.035087	1.197931	1.065382	1.197920

Таким образом, выбор основных параметров, которые используются в модифицированном методе имитации отжига, может быть дополнен выбором удачного масштабирования и использованием кластеризации.

**3.3. Многомерная система нелинейных уравнений.** Рассмотрим нелинейную систему, которая имеет 64 корня:

$$g_i(X) = \sum_{j=1}^6 a_{i,j} x_j^2 + \vec{b}_i, i = 1, 2, \dots, 6, \quad (12)$$

$$a_{i,j} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\vec{b}_i = (1.8 \quad 2.05 \quad 2.0 \quad 1.95 \quad 1.9 \quad 1.85) \quad (14)$$

Решение системы должно быть таким:  $\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm \sqrt{0.5}$ ,  $2^6 = 64$ , всего 64 корня.

Поскольку каждое решение симметрично, достаточно рассмотреть корни с положительными координатами. Здесь будем рассматривать исходную нелинейную систему (12), чтобы показать, что все 64 корня системы можно найти, используя модифицированный алгоритм.

Зафиксируем параметр  $\varepsilon_k = 0.00001$  и будем изменять  $m$ . Расчеты показали, что корни отделяются по мере роста  $m$ . При  $m_k = 25$  можно получить хорошие результаты. Количество исходных точек  $p$  также влияет на точность. При указанных параметрах множество  $M_k$  состоит из 64 кластеров:

$$b = 1, \varepsilon = 0.00001, m = 25, p = 10000000. \quad (15)$$

Приведем некоторые результаты расчетов в табл. 6.

Предельное множество состоит из 640 точек, которые образуют 64 кластера.

Таблица 6. Результаты отделения корней многомерной системы

Номер кластера	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$
1	-1.002354	0.998669	-1.005317	0.991725	-0.997220	-0.713027
2	-0.998913	-1.004592	-0.992659	1.005808	-0.995405	-0.714347
3	-0.992711	1.003100	-0.998924	-1.000868	-1.000525	-0.712992
4	1.003590	1.000243	0.982742	1.021915	0.981446	0.717876



**4. Заключение.** Таким образом, в работе было показано, что обобщение метода имитации отжига, полученное в работе [6], может быть использовано в задаче автоматического отделения корней системы нелинейных уравнений. Также могут быть указаны начальные приближения для применения методов Ньютона и его модификаций. Теоретической основой указанных методов является доказанная лемма, а также методы изменения масштаба и кластеризации. Приведенные численные примеры свидетельствуют о перспективности разработанных стохастических методов.

Авторы благодарят магистранта кафедры статистического моделирования Хэ Пина, принимавшего участие в отдельных этапах выполнения работы.

## Литература

1. Полак Э. *Численные методы оптимизации. Единый подход*, пер. с англ. Москва, Мир (1974).
2. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. Optimization by Simulated annealing. *Science* **220** (4598), 671–680 (1983).
3. Stella L. Studies of Classical and Quantum Annealing. *Ph. D. thesis, SISSA, Trieste* (2005). Available at: <https://web.archive.org/web/20060516151710/> (дата обращения: 21.02.2023).
4. Hastings W. K. Monte Carlo Sampling Methods Using Marcov Chains and Their Applications. *Biometrika* **57**, 97–100 (1970).
5. Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E. Equations of state calculations by fast computing machines *J. Chem. Phys.* **21**, 1087–1091 (1953).
6. Ермаков С. М., Куликов Д. В., Леора С. Н. К анализу метода имитации отжига в многоэкстремальном случае. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 2, 220–226 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.205>
7. Gubian S., Xiang Y., Suomela B., Hoeng J. Package GenSA (2022). Available at: <https://ran.r-projet.org/web/packages/GenSA/GenSA.pdf> (accessed: February 21, 2023).
8. Maehler M., Rousseeuw P., Struyf A., Hubert M., Hornik K., Studer M., Roudier P., Gonzalez J., Kozłowski K., Shubert E., Murphy K. Package luster (2022). Available at: <https://ran.r-projet.org/web/packages/luster/luster.pdf> (accessed: February 21, 2023).
9. Kaufman L., Rousseeuw P. J. *Finding groups in data: an introduction to cluster analysis*. Wiley (2009).

Статья поступила в редакцию 8 июня 2022 г.;  
доработана 17 ноября 2022 г.;  
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

Контактная информация:

Ермаков Сергей Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; [sergej.ermakov@gmail.com](mailto:sergej.ermakov@gmail.com)  
Леора Светлана Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; [leora2008@mail.ru](mailto:leora2008@mail.ru)

## Separation of the roots of the systems of nonlinear equations. Stochastic approach\*

*S. M. Ermakov*<sup>1</sup>, *S. N. Leora*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University of Economics,

30–32, nab. kanala Griboedova, St. Petersburg, 191023, Russian Federation

**For citation:** Ermakov S. M., Leora S. N. Separation of the roots of the systems of nonlinear equations. Stochastic approach. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 226–235.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.204> (In Russian)

---

\*This paper was supported by Saint Petersburg State University, project ID: 93024916.

The work is devoted to the actual problem of separating the roots of nonlinear systems of equations in the case of many variables. The well-known method of reducing the problem of solving the system to an equivalent extremal problem, which is supposed to be solved by one of the methods of stochastic optimization. The annealing simulation modeling method and its modification are chosen, which are especially interesting in that they allow efficient implementation on quantum computers. Since quantum computers based on simulated annealing demonstrate quantum superiority, the results obtained can be useful in solving systems of equations on these computing systems.

*Keywords:* absolute extremum, simulated annealing, systems of equations, root separation, quantum computing.

## References

1. Polak E. *Computational methods in optimization: A unified approach*. New York, London: Academic Press Publ. (1971) [Rus. ed.: Polak E. *Chislennyye metody optimizatsii. Edinyi podkhod*. Moscow, Mir Publ. (1974).
2. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. Optimization by Simulated annealing. *Science* **220** (4598), 671–680 (1983).
3. Stella L. Studies of Classical and Quantum Annealing. *Ph. D. thesis, SISSA*, Trieste. 2005. Available at: <https://web.archive.org/web/20060516151710/> (accessed: February 21, 2023).
4. Hastings W. K. Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika* **57**, 97–100 (1970).
5. Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E. Equations of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.* **21**, 1087–1091 (1953)
6. Ermakov S. M., Kulikov D. V., Leora S. N. Towards the analysis of the simulated annealing method in the multiextremal case. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 2, 220–226 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.205> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **50**, iss. 2, 132–137 (2017) <https://dx.doi.org/10.3103/S1063454117020042>].
7. Gubian S., Xiang Y., Suomela B., Hoeng J. Package GenSA (2022). Available at: <https://ran.r-project.org/web/packages/GenSA/GenSA.pdf> (accessed: February 21, 2023).
8. Maehler M., Rousseeuw P., Struyf A., Hubert M., Hornik K., Studer M., Roudier P., Gonzalez J., Kozłowski K., Shubert E., Murphy K. Package luster (2022). Available at: <https://ran.r-project.org/web/packages/luster/luster.pdf> (accessed: February 21, 2023).
9. Kaufman L., Rousseeuw P. J. *Finding groups in data: an introduction to cluster analysis*. Wiley (2009).

Received: June 8, 2022

Revised: November 17, 2022

Accepted: November 17, 2022

## Authors' information:

Sergei M. Ermakov — [sergej.ermakov@gmail.com](mailto:sergej.ermakov@gmail.com)

Svetlana N. Leora — [leora2008@mail.ru](mailto:leora2008@mail.ru)