УДК 519.234.3 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2
MSC 62F03, 62G10, 62G20

О равномерной состоятельности непараметрических критериев типа Неймана*

М. С. Ермаков[1,2], *Д. Ю. Капаца*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Для цитирования: *Ермаков М. С., Капаца Д. Ю.* О равномерной состоятельности непараметрических критериев типа Неймана // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 212–225.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.203

В работе рассматривается задача проверки гипотезы согласия на основе тестовой статистики, являющейся линейной комбинацией квадратов оценок коэффициентов Фурье разложения в ряд Фурье плотности распределения. Такими статистиками, например, являются тестовые статистики критерия Неймана и тестовая статистика, являющаяся $\mathbb{L}_2$-нормой ядерной оценки плотности. Мы доказываем теорему об асимптотической нормальности тестовой статистики при справедливости как гипотезы, так и альтернатив. На этой основе мы находим условия равномерной состоятельности непараметрических множеств альтернатив, заданных как в терминах функций распределения, так и плотности распределения. Результаты о равномерной состоятельности непараметрических множеств альтернатив, заданных в терминах функций распределения, можно рассматривать как утверждение, показывающее, в какой мере метод расстояний, основанный на данной тестовой статистике, осуществляет различимость гипотезы и альтернатив. В данном случае полученные условия равномерной состоятельности близки к необходимым. Для последовательности плотностей распределения, сближающихся с гипотезой в $\mathbb{L}_2$-метрике и рассматриваемых как альтернативы, мы находим необходимые и достаточные условия ее состоятельности. Этот результат получен в терминах понятия наибольших множеств, описание которых для данных тестовых статистик приведено в настоящей публикации.

Ключевые слова: непараметрическая проверка гипотез, критерии согласия, тест Неймана, состоятельность, непараметрическое множество альтернатив, проверка гипотез о плотности распределения.

1. Введение. Задача проверки адекватности выбора статистической модели встречается практически в каждом статистическом исследовании реальных данных. Обычно она решается применением статистических критериев проверки непараметрических гипотез. Поскольку альтернативы для непараметрического критерия совершенно неизвестны, естественно исследовать вопрос о состоятельности всех альтернатив, отличных от гипотезы. Таким образом, встает задача описать все состоятельные для критерия альтернативы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00273).

Данную задачу мы исследуем для проверки гипотезы согласия о функции распределения и плотности распределения, когда тестовой статистикой является линейная комбинация квадратов оценок коэффициентов Фурье разложения в ряд по ортонормированному базису функции плотности распределения. Мы указываем необходимые и достаточные условия равномерной состоятельности множеств альтернатив, заданных в терминах плотностей распределения, а также условия, близкие к необходимым, когда множества альтернатив задаются в терминах функций распределения.

Для наиболее распространенных непараметрических критериев равномерная состоятельность непараметрических множеств альтернатив довольно хорошо изучена, когда рассматривается определение равномерной состоятельности, в котором считается, что вероятности ошибок второго рода должны стремиться к нулю с ростом объема выборки [1–3]. Если альтернативы являются параметрическими [1, 4–6] или имеется априорная информация об их гладкости [2, 7], также могут быть получены во многом исчерпывающие результаты об их состоятельности.

В работе [8] получены необходимые и достаточные условия равномерной состоятельности непараметрических множеств альтернатив для наиболее распространенных непараметрических критериев. Один из рассмотренных классов непараметрических критериев имеет тестовые статистики, задаваемые как линейные комбинации квадратов оценок коэффициентов Фурье ортогонального разложения в ряд Фурье сигнала. Эта задача рассматривалась для обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме. Цель настоящей работы — исследовать, насколько можно перенести результаты для данного класса непараметрических критериев на задачу проверки гипотезы согласия о функции распределения и о плотности распределения. Отметим, что такие непараметрические критерии естественно называть критериями типа Неймана [4, 9, 10].

Пусть дано измеримое пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — σ-алгебра подмножеств в $\mathcal{X}$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие вероятностную меру $\mathbf{P}$, заданную на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Обозначим через $\mathcal{P}$ — множество всех вероятностных мер на $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Мы рассматриваем задачу проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0 \ : \ \mathbf{P} \ = \ \mathbf{P}_0 \in \mathcal{P} \tag{1}$$

против альтернатив

$$\mathbb{H}_n \ : \ \mathbf{P} = \mathbf{P}_n \ \in \Psi_n \subset \mathcal{P}. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathbb{L}_2$ множество всех измеримых функций $f \, : \, \mathcal{X} \to \mathbb{R}^1$ таких, что

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{X}} f^2 \, d\,\mathbf{P}_0 < \infty.$$

Предположим, что $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{L}_2$, $\varphi_0(x) \ \equiv \ 1$. Определим последовательность функционалов $T_n(\mathbf{P})$, заданных на множестве всех вероятностных мер $\mathcal{P}$:

$$T_n(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_j^2 \theta_j^2,$$

где $\theta_j \ = \ \int_{\mathcal{X}} \varphi_j \, d\,\mathbf{P}$ и $\varkappa_j^2$ — убывающая последовательность коэффициентов, $1 \le j < \infty$.

Мы будем предполагать, что вероятностные меры $\mathbf{P}_n \in \Psi_n$ абсолютно непрерывны относительно $\mathbf{P}_0$ и допускают представление

$$\frac{d\,\mathbf{P}_n}{d\,\mathbf{P}_0}(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj}\varphi_j(x) \in \mathbb{L}_2, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Обозначим через $\hat{\mathbf{P}}_n$ эмпирическую вероятностную меру, построенную по выборке $X_1, \ldots, X_n$.

В качестве тестовой статистики возьмем

$$T_n(\hat{\mathbf{P}}_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \hat{\theta}_{nj}^2,$$

где $\hat{\theta}_{nj} = \int_{\mathcal{X}} \varphi_j\, d\,\hat{\mathbf{P}}_n$.

Мы отдельно рассмотрим случай, когда $\varkappa_{nj}^2 = 0$ для $j > k_n$ (см. Замечание 2), $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$, и когда все коэффициенты $\varkappa_{nj}^2$ отличны от нуля. Примером тестовых статистик, имеющих бесконечное число ненулевых коэффициентов $\varkappa_{nj}^2$, являются тестовые статистики Бикеля — Розенблатта [8]. Если $\varkappa_{n1}^2 = \ldots = \varkappa_{nk_n}^2 = 1$ и $\varkappa_{n,k_n+1}^2 = 0$, то тестовая статистика T_n является тестовой статистикой критерия Неймана [4, 9, 10].

В настоящей работе решается вопрос переноса на данную постановку задачи результатов работы [8] с использованием в какой-то мере техники и результатов работы [7].

Мы показываем равномерную состоятельность множеств альтернатив:

$$\Upsilon_n(b) = \{\mathbf{P} \,:\, n^2 T_n(\mathbf{P}) > b > 0, \;\; \mathbf{P} \in \mathcal{P}_{1n}\}.$$

Множества $\mathcal{P}_{1n}$ выбраны так, что коэффициенты Фурье плотностей любых последовательностей вероятностных мер $\mathbf{P}_n$ из множеств $\mathcal{P}_{1n}$ удовлетворяют определенным условиям убывания при стремлении их индексов к бесконечности. Грубо говоря, нами получено описание состоятельности множеств альтернатив, у которых $\mathbb{L}_2$-нормы хвостов разложения плотностей в ряд Фурье, начинающихся с некоторого заданного индекса k_n, имеют порядок не больше, чем $\mathbb{L}_2$-нормы начальной части их разложения в ряд Фурье, получаемой до индекса k_n. Равномерная состоятельность множеств альтернатив $\Upsilon_n(b)$ показывает, насколько естественен метод расстояний для данной тестовой статистики.

В работе помимо этого получены необходимые и достаточные условия состоятельности последовательностей простых альтернатив, плотности распределения которых имеют заданную скорость сходимости к гипотезе в $\mathbb{L}_2$-норме. Ясно, что равномерная состоятельность любой последовательности множеств альтернатив, сближающихся с гипотезой в $\mathbb{L}_2$-норме, может быть описана через состоятельность последовательностей простых альтернатив, принадлежащих этим множествам. Так же, как и в [8], описание таких последовательностей простых альтернатив получено с помощью задания наибольших множеств для этой задачи.

По существу, результаты о равномерной состоятельности, полученные в терминах метода расстояний, т. е. множеств Υ_n, представляют собой распространение результатов [7] на более широкие множества альтернатив, во многом аналогичные [11].

Эти результаты позволяют практически автоматически перенести на данную постановку задачи результаты [8]. Мы получаем необходимые и достаточные условия состоятельности последовательностей простых альтернатив, сближающихся с гипотезой в $\mathbb{L}_2$-норме, когда эти простые альтернативы являются плотностями распределения.

Мы будем использовать буквы c и C, а также эти буквы с различными индексами для обозначения различных положительных постоянных. Обозначим $1_{\{A\}}$ — индикатор события A. Обозначим через $[a]$ целую часть вещественного числа a. Для любых двух последовательностей чисел a_n и b_n, $a_n \asymp b_n$ означает, что найдутся такие c и C, что $c < a_n/b_n < C$ для всех n, и $a_n = o(b_n)$ означает $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Наконец, $a_n = O(b_n)$ означает, что найдется такое C, что $a_n/b_n < C$ для всех n.

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

функцию стандартного нормального распределения.

Для любого $P_0 > 0$ определим множество

$$\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0) = \Big\{ f : f = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \varphi_j,\ \sup_{\lambda>0} \lambda^{2s} \sum_{j>\lambda} \theta_j^2 \le P_0,\ \theta_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}. \tag{3}$$

При определенных ограничениях на базис φ_j, $1 \le j < \infty$, функциональное пространство

$$\mathbb{B}^s_{2\infty} = \Big\{ c + f : f = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \varphi_j,\ \sup_{\lambda>0} \lambda^{2s} \sum_{j>\lambda} \theta_j^2 < \infty,\ \theta_j \in \mathbb{R}^1,\, c \in \mathbb{R}^1 \Big\}$$

является пространством Бесова $\mathbb{B}^s_{2\infty}$ (см. [12]). В частности, $\mathbb{B}^s_{2\infty}$ является пространством Бесова, если φ_j, $1 \le j < \infty$ — тригонометрический базис.

2. Тестовые статистики, являющиеся квадратичной формой оценок коэффициентов Фурье. ***2.1. Состоятельность критериев.*** Для критерия K_n обозначим $\alpha(K_n)$ его вероятность ошибки первого рода и $\beta(K_n, \mathbf{P})$ — его вероятность ошибки второго рода при альтернативе $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$.

Мы скажем, что последовательность альтернатив $\mathbf{P}_n$ *состоятельна*, если для любого α, $0 < \alpha < 1$ для последовательности критериев, $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(K_n, \mathbf{P}_n) < 1 - \alpha. \tag{4}$$

Скажем, что последовательность альтернатив $\mathbf{P}_n$ *несостоятельна*, если для каждой последовательности критериев K_n, порожденных тестовой статистикой T_n, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} (\alpha(K_n) + \beta(K_n, \mathbf{P}_n)) \ge 1. \tag{5}$$

Для критериев K_n, $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$, $0 < \alpha < 1$, обозначим $\beta(K_n, \Psi_n) = \sup_{\mathbf{P}\in\Psi_n} \beta(K_n, \mathbf{P})$.

Скажем, что множества альтернатив Ψ_n равномерно состоятельны, если

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(K_n, \Psi_n) < 1 - \alpha. \tag{6}$$

Множества альтернатив Ψ_n равномерно состоятельны, если только множества Ψ_n не содержат несостоятельной подпоследовательности простых альтернатив $\mathbf{P}_{n_k} \in \Psi_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности n_k, $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Аналогичное обозначение $\beta(K_n, f)$ мы будем использовать, когда альтернативой является функция $f(x) = p(x) - 1$, определяемая по плотности распределения $p(x) = \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}_0}(x)$. Соответственно мы будем использовать и аналогичные определения состоятельности для данной постановки задачи.

2.2. Условия. Приведем последовательно условия на последовательности $\varkappa^2_{nj}$, рассматриваемые семейства ортонормированных функций, а также на коэффициенты Фурье разложения плотностей $p(x)$.

K1. Для любого n последовательность $\varkappa^2_{nj}$ является убывающей.

K2. Существуют такие константы C_1 и C_2, что для любого n

$$C_1 < A_n = n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa^4_{nj} < C_2. \tag{7}$$

K3. Существуют C_1 и $\lambda > 1$, такие, что для любого $\delta > 0$ и n имеет место

$$\varkappa^2_{n,[(1+\delta)k_n]} < C_1(1+\delta)^{-\lambda} \varkappa^2_n, \tag{8}$$

где $k_n = \sup\left\{k : \sum_{j<k} \varkappa^2_{nj} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa^2_{nj} < \infty\right\}$.

K4. Для любого $c > 1$ существует C такое, что $\varkappa^2_{n,[ck_n]} \geqslant C\varkappa^2_n = C\varkappa^2_{n1}$ для всех n.

K5. Имеет место $k_n = o(n^{2/3})$ при $n \to \infty$.

Также приведем условие на семейство ортонормированных функций.

Ф1. Найдется такая постоянная $C > 0$, что $|\varphi_j(x)| < C$ для всех $j = 1, 2, \dots$ и $x \in \mathcal{X}$.

Далее будут приведены два условия на коэффициенты Фурье плотностей вероятностных мер $\boldsymbol{P}_n$.

Предполагается, что любая последовательность параметров $\{\theta_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ плотностей вероятностных мер $\boldsymbol{P}_n \in \mathcal{P}_{1n}$ удовлетворяет одному из двух следующих условий.

T1. Существует такое $C > 0$, что

$$\sum_{j > Ck_n} \theta^2_{nj} = O\left(\sum_{j=1}^{Ck_n} \theta^2_{nj}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

T2. Существует такое $C > 0$, что

$$\sum_{j > Ck_n} \theta^2_{nj} = O(n^{-1} k_n^{1/2}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Замечание 1. *Если выполнены K1–K5, одно из условий T1 или T2, и* $B_n(\theta_n) \doteq n^2 T_n(\mathbf{P}_n)$ *не стремится к бесконечности при* $n \to \infty$, *то*

$$\sum_{j=1}^{Ck_n} \theta^2_{nj} \asymp n^{-1} k_n^{1/2} = o(n^{-2/3}).$$

2.3. Асимптотическая нормальность и состоятельность тестовых статистик. Определим критерии проверки гипотез

$$K_n(X^{(n)}) = \mathbf{1}_{\left(n\,T_n(\hat{\mathbf{P}}_n) - n\,\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 > (2A_n)^{1/2} x_\alpha\right)},$$

где x_α задается уравнением $\Phi(x_\alpha) = 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия К1–К5 и Ф1. Тогда для последовательности критериев K_n имеют место $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$ и*

$$\beta(K_n, \mathbf{P}_n) = \Phi(x_\alpha - n^2 T_n(\mathbf{P}_n)(2A_n)^{-1/2})(1 + o(1)) \tag{9}$$

для любой последовательности вероятностных мер $\mathbf{P}_n$, удовлетворяющих Т1 или Т2.

Следствие 1. *Последовательность альтернатив $\Upsilon_n(b)$ является равномерно состоятельной при любом $b > 0$.*

Следствие 2. *Пусть дана последовательность вероятностных мер $\mathbf{P}_n$ таких, что*

$$\left\| \frac{d\,\mathbf{P}_n}{d\,\mathbf{P}_0} - 1 \right\| \asymp n^{-1/2} k^{1/4}.$$

Тогда последовательность простых альтернатив $\mathbf{P}_n$ состоятельна, если и только если $n^2 T_n(\mathbf{P}_n) > b$ для некоторого $b > 0$ при всех $n > n_0$.

Замечание 2. *Пусть $\varkappa_{nj}^2 > 0$ для $j \le l_n$, и пусть $\varkappa_{nj}^2 = 0$ для $j > l_n$, где $l_n = o(n^{2/3})$ при $n \to \infty$. Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что она остается справедливой для этой задачи, если условие К3 заменить на:*

К6. *Для любого c, $0 < c < 1$, найдется c_1 такое, что $\varkappa_{n,[cl_n]}^2 \ge c_1 \varkappa_{n1}^2$ для всех n.*

При этом во всех соответствующих доказательствах мы полагаем $\varkappa_n^2 = \varkappa_{n1}^2$ и $k_n = l_n$.

Приводимые ниже теоремы 2–5 также остаются справедливыми для $l_n \asymp n^{2-4r}$, $1/3 < r < 1/2$. Теорема 5 при этом справедлива со следующим изменением: достаточно взять $C_1(\varepsilon) < 1$.

3. Необходимые и достаточные условия состоятельности, когда альтернативы являются плотностями распределения из $\mathbb{L}_2$. Введем обозначение $f(x) = p(x) - 1$, где $p(x) = \frac{d\,\mathbf{P}}{d\,\mathbf{P}_0}(x)$, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$. При этом предполагается, что $p(x) \in \mathbb{L}_2$.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$\bar{\mathbb{H}}_0 \,:\, f(x) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{10}$$

против последовательности простых альтернатив

$$\bar{\mathbb{H}}_n \,:\, f = f_n, \qquad cn^{-r} \le \|f_n\| \le Cn^{-r}, \qquad 1/3 < r < 1/2, \tag{11}$$

где $0 < c < C < \infty$.

Мы будем использовать понятия состоятельности, введенные в разделе 2.1. Если последовательность альтернатив f_n состоятельна и $\|f_n\| \asymp n^{-r}$, то мы будем говорить, что последовательность альтернатив f_n является n^{-r}-состоятельной (см. [8, 13]). Аналогичное определение мы будем использовать и для несостоятельных последовательностей.

3.1. Определение наибольших множеств. Пусть $\Xi \subset \mathbb{L}_2(0,1)$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\Xi$. Обозначим $U = \{f : \|f\|_\Xi \le P_0,\ f \in \Xi\}$, $P_0 > 0$, шар в Ξ. По теореме 3.1 в [8] мы можем считать, что множество U — компакт в $\mathbb{L}_2$.

Определим подпространства Π_i, $1 \le i < \infty$, по индукции.

1. Обозначим $d_1 = \max\{\|f\|,\ f \in U\}$ и обозначим e_1 функцию $e_1 \in U$ — такую, что $\|e_1\| = d_1$. Обозначим Π_1 линейное подпространство, порожденное вектором e_1.

2. Обозначим $d_i = \max\{\rho(f, \Pi_{i-1}), f \in U\}$, где $\rho(f, \Pi_{i-1}) = \min\{\|f - g\|, g \in \Pi_{i-1}\}$. Пусть e_i, $e_i \in U$ — такая функция, что $\rho(e_i, \Pi_{i-1}) = d_i$.

Пусть Π_i — линейное подпространство, порожденное функциями $e_1, \ldots, e_i$.

Для любой функции $f \in \mathbb{L}_2(0,1)$ зададим проекцию f_{Π_i} функции f на подпространство Π_i и обозначим $\tilde{f}_i = f - f_{\Pi_i}$.

Шар U является *наибольшим множеством* для тестовой статистики T_n и функциональное пространство Ξ является *наибольшим пространством*, если выполнены следующие два утверждения:

i) любая подпоследовательность альтернатив $f_{n_j} \in U$, $cn_j^{-r} < \|f_{n_j}\| < Cn_j^{-r}$, $n_j \to \infty$ при $j \to \infty$, является состоятельной для подпоследовательности выборок $X_1, \ldots, X_{n_j}$;

ii) для любого $f \in \mathbb{L}_2(0,1)$, $f \notin \Xi$, найдутся последовательности i_n, j_{i_n}, $i_n \to \infty$, $j_{i_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, такие, что $cj_{i_n}^{-r} < \|\tilde{f}_{i_n}\| < Cj_{i_n}^{-r}$ и подпоследовательность альтернатив $\tilde{f}_{i_n}$ несостоятельна для последовательности выборок $X_1, \ldots, X_{j_{i_n}}$.

Отметим, что ii) проверяется только для тех функций f, для которых $1 + \tilde{f}_i$ являются плотностями для всех $i > i_0$. Отметим также, что в доказательстве теорем базис φ_j, $1 \le j < \infty$, совпадает с функциями e_j.

3.2. Структура состоятельных последовательностей простых альтернатив. Результаты приведены в терминах коэффициентов Фурье функций $f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj}\varphi_j$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия K1–K5 и Ф1. Последовательность альтернатив* f_n, $cn^{-r} \le \|f_n\| \le Cn^{-r}$, *состоятельна, если и только если найдутся* c_1, c_2 *и* n_0 *такие, что имеет место соотношение*

$$\sum_{|j|<c_2k_n} |\theta_{nj}|^2 > c_1 n^{-2r} \tag{12}$$

для всех $n > n_0$.

Доказательство теорем этого раздела базируется на теореме 1 и повторяет один в один рассуждения доказательств аналогичных теорем из [8]. Мы опустим эти доказательства.

Обозначим $s = \frac{r}{2-4r}$. Тогда $r = \frac{2s}{1+4s}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия K1–K5 и Ф1. Тогда тела* $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$, *являются наибольшими множествами для тестовых статистик* $T_n(\hat{\mathbf{P}}_n)$.

Для множеств $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$ с удаленным малым $\mathbb{L}_2$-шаром асимптотически минимаксные тестовые статистики были найдены в [14].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия К1–К5 и Ф1. Тогда последовательность альтернатив* f_n, $cn^{-r} \le \|f_n\| \le Cn^{-r}$, *состоятельна, если и только если найдется наибольшее множество* $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$, $P_0 > 0$, *и последовательность* $f_{1n} \in \mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$, $c_1 n^{-r} \le \|f_{1n}\| \le C_1 n^{-r}$, *такая, что* f_{1n} *ортогональна* $f_n - f_{1n}$, *т. е. имеет место*

$$\|f_n\|^2 = \|f_{1n}\|^2 + \|f_n - f_{1n}\|^2. \tag{13}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия К1–К5 и Ф1. Тогда на рассматриваемую постановку задачи переносятся утверждения теорем 4.6–4.10 и 6.2 в [8].*

При этом в аналоге теоремы 4.6 мы рассматриваем только последовательности альтернатив f_n, *удовлетворяющие следующему условию.*

B. *Существует* c_0 *такое, что для всех* $c > c_0$ *функции*

$$1 + f_{cn} = 1 + \sum_{|j|>ck_n} \theta_{nj}\varphi_j \quad \textit{и} \quad 1 + f_n - f_{cn} = 1 + \sum_{|j|<ck_n} \theta_{nj}\varphi_j$$

являются плотностями распределения.

Мы применяем определение чисто состоятельных последовательностей только для последовательностей f_n, *удовлетворяющих* B.

4. Доказательство теоремы 1. Теорема 1 следует из лемм 1 и 2, приведенных ниже. Эти леммы являются аналогами лемм 2.8 и 2.9 в [7], где аналогичные утверждения доказаны для более узких множеств альтернатив. Доказательства лемм 1 и 2 в основном повторяют доказательства лемм 2.8 и 2.9 в [7]. Поэтому будут приведены только те фрагменты, где оценки отличны. Нам будет удобно использовать несколько другое обозначение:

$$B_n(\boldsymbol{\theta}_n) := n^2 T_n(\mathbf{P}_n) = n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj}^2 \varkappa_{nj}^2.$$

Лемма 1 (Об оценках)**.** *Пусть выполнены условия К1–К5, Т1 или Т2, и Ф1. Тогда*

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}[T_n(\hat{\mathbf{P}}_n)] = B_n(\boldsymbol{\theta}_n) + o(B_n(\boldsymbol{\theta}_n)), \tag{14}$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}_n}[T_n(\hat{\mathbf{P}}_n)] = 2A_n + o(B_n^2(\boldsymbol{\theta}_n)). \tag{15}$$

Лемма 2 (Об асимптотической нормальности)**.** *Пусть выполнены условия К1–К5, Т1 или Т2, и Ф1. Пусть* $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}_n}[T_n(\hat{\mathbf{P}}_n)] = O(A_n)$, $B_n(\boldsymbol{\theta}_n) \asymp A_n$. *Тогда* $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}_n}$ — *распределения тестовых статистик*

$$\left(nT_n(\hat{\mathbf{P}}_n) - n\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 - B_n(\boldsymbol{\theta}_n) \right) (2A_n)^{-1/2}$$

сходятся к стандартному нормальному распределению.

4.1. Предварительные вычисления. Для натуральных чисел j, k, l обозначим:

$$(1)_{jk} := \int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_k(x)\,dx; \quad (1)_{jkl} := \int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx. \tag{16}$$

Заметим, что $(1)_{jk} = 0$ при $j \neq k$ и $(1)_{jk} = 1$ при $j = k$. Непосредственными вычислениями получаем

$$\mathbf{E}_\theta \left[\varphi_j(X_1)\varphi_k(X_1)\right] = (1)_{jk} + \sum_{l=1}^{\infty} \theta_{nl}(1)_{jkl}.$$

Приведем далее несколько оценок, которые следуют из условий K1–K5 и T1–T2:

$$k_n = o(n^{2/3}), \tag{17}$$

$$\varkappa_n^2 \asymp k_n^{-1/2} n^{-1}, \tag{18}$$

$$k_n \varkappa_n = o(1), \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \asymp \sum_{j=1}^{ck_n} \varkappa_{nj}^2 \asymp k_n \varkappa_n^2 \asymp k_n^{1/2} n^{-1}, \tag{20}$$

$$n^2 \varkappa_n^2 \|\boldsymbol{\theta}_n\|^2 \asymp B_n(\boldsymbol{\theta}_n), \tag{21}$$

$$\varkappa_n^2 \|\boldsymbol{\theta}_n\|^2 \leq n^{-2}(B_n(\boldsymbol{\theta}_n) + O(1)). \tag{22}$$

Отметим, что оценка (21) справедлива при выполнении условия T1, а оценка (22) — при выполнении условия T2.

4.2. Оценки для математического ожидания и дисперсии тестовой статистики. Имеем

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} \left[T_n(\hat{\mathbf{P}}_n)\right] = n(n-1) \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2. \tag{23}$$

По аналогии с работой [7] (см. доказательство леммы 2.8) запишем

$$n^2 T_n(\hat{\mathbf{P}}_n) - n^2 \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} \left[T_n(\hat{\mathbf{P}}_n)\right] = J_{1n} + 2J_{2n}, \text{ где}$$

$$J_{1n} := 2 \sum_{1 \leq s < s_1 \leq n} H_n(X_s, X_{s_1}), \tag{24}$$

$$H_n(X_s, X_{s_1}) := \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 (\varphi_j(X_s) - \theta_{nj})(\varphi_j(X_{s_1}) - \theta_{nj}), \tag{25}$$

$$J_{2n} := (n-1) \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \theta_{nj} \left(\sum_{s=1}^{n} \varphi_j(X_s) - n\theta_{nj} \right). \tag{26}$$

Оценим $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}_n}(T_n(\hat{\mathbf{P}}_n))$.

4.3. Оценка $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}\left[J_{1n}^2\right]$. Для любых j, j_1 обозначим

$$N(j, j_1) := N(j, j_1, \theta_n) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} \left[(\varphi_j(X_1) - \theta_{nj})(\varphi_{j_1}(X_1) - \theta_{nj_1})\right] - (1)_{jj_1} =$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} \theta_{nl}(1)_{jj_1 l} - \theta_{nj}\theta_{nj_1} =: L_1(j, j_1) - L_2(j, j_1). \tag{27}$$

Аналогично [7] имеем

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}\left[J_{1n}^2\right] = M_1 + 2M_2 + M_3, \tag{28}$$

где

$$M_1 := 2n(n-1)\sum_{j,j_1=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \varkappa_{nj_1}^2 (1)_{jj_1}^2, \tag{29}$$

$$M_2 := 2n(n-1)\sum_{j,j_1=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \varkappa_{nj_1}^2 (1)_{jj_1} N(j,j_1), \tag{30}$$

$$M_3 := 2n(n-1)\sum_{j,j_1=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \varkappa_{nj_1}^2 N^2(j,j_1). \tag{31}$$

Также найдем $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}\left[J_{2n}^2\right]$ по аналогии с [7]:

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}\left[J_{2n}^2\right] = n(n-1)^2\sum_{j,j_1=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \varkappa_{nj_1}^2 \theta_{nj}\theta_{nj_1}\left((1)_{jj_1} + \sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}(1)_{jj_1l} - \theta_{nj}\theta_{nj_1}\right). \tag{32}$$

Используя неравенство Коши, получаем $M_2^2 \le M_1 M_3$. Поэтому остается оценить M_1 и M_3.

Аналогично [7] получаем

$$M_1 = 2n(n-1)\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa_{nj}^4 = 2A_n(1+o(1)). \tag{33}$$

Оценки M_3 или полностью аналогичны оценкам соответствующего слагаемого в [7], или проводятся аналогично доказательству леммы 3. Мы их опустим. В результате получается

$$M_3 = o(B_n^2(\boldsymbol{\theta}_n)). \tag{34}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия К1–К5, Ф1, а также одно из условий Т1 или Т2. Тогда*

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}\left[J_{2n}^2\right] = o(B_n^2(\boldsymbol{\theta}_n)). \tag{35}$$

Доказательство. Мы оценим только слагаемое, содержащее $\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}(1)_{jj_1l}$. Оценка остальных или аналогична этому, или совпадает с оценкой таких же слагаемых в [8]. Используя неравенство Коши, а также равномерную ограниченность ортонормированного семейства функций φ_j, имеем

$$n^3\sum_{j,j_1}^{\infty}\varkappa_{nj}^2\varkappa_{nj_1}^2\theta_{nj}\theta_{nj_1}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}(1)_{jj_1l}\right) \le$$

$$\le n^3\sum_{j,j_1=1}^{\infty}\varkappa_{nj}\theta_{nj}\varkappa_{nj}\varkappa_{nj_1}\theta_{nj_1}\varkappa_{nj_1}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{\infty}(\varphi_j\varphi_{j_1})_l^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le Cn^3\sum_{j,j_1=1}^{\infty}\varkappa_{nj}\theta_{nj}\varkappa_{nj}\varkappa_{nj_1}\theta_{nj_1}\varkappa_{nj_1}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}^2\right)^{1/2} =$$

$$= Cn^3 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \varkappa_{nj_1}^2 \theta_{nj_1}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \varkappa_{nj_1}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \theta_{nl}^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq CnB_n(\boldsymbol{\theta}_n) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2\right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \theta_{nl}^2\right)^{1/2} \leq CnB_n(\boldsymbol{\theta}_n) k_n \varkappa_n^2 \left(\sum_{l=1}^{\infty} \theta_{nl}^2\right)^{1/2}. \quad (36)$$

Для продолжения данной цепочки надо разобрать два случая — выполнение каждого из условий T1 и T2.

• *случай T1:* используем оценку (21):

$$(36) \leq CnB_n(\boldsymbol{\theta}_n) k_n \varkappa_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2\right)^{1/2} \leq Ck_n \varkappa_n B_n^{3/2}(\boldsymbol{\theta}_n) \asymp$$

$$\asymp n^{-1/2} k_n^{1/2} B_n^{3/2}(\boldsymbol{\theta}_n) = o(B_n^{3/2}(\boldsymbol{\theta}_n)); \quad (37)$$

• *случай T2:*

$$(36) = CnB_n(\boldsymbol{\theta}_n) k_n \varkappa_n \left(\varkappa_n^2 \sum_{j=1}^{ck_n} \theta_{nj}^2 + \varkappa_n^2 \sum_{j=ck_n}^{\infty} \theta_{nj}^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq Ck_n \varkappa_n (B_n^{3/2}(\boldsymbol{\theta}_n) + O(B_n^{3/2}(\boldsymbol{\theta}_n))) = o(B_n^{3/2}(\boldsymbol{\theta}_n)). \quad (38)$$

Из совокупности оценок и вытекает утверждение леммы. □

4.4. Асимптотическая нормальность статистики $T_n(\hat{\mathbf{P}}_n)$***.*** Для доказательства асимптотической нормальности (см. теорему 1 из [15]) необходимо показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \mathbf{E}_\theta \left[V_n^2(X_1, X_2)\right] + n^{-1} \mathbf{E}_\theta \left[H_n^4(X_1, X_2)\right] \right\} \times \left(\mathbf{E}_\theta \left[H_n^2(X_1, X_2)\right]\right)^{-2} = 0, \quad (39)$$

где

$$V_n(x, y) = \mathbf{E}_\theta \left[H_n(X_1, x) H_n(X_1, y)\right]. \quad (40)$$

Одним из условий является конечность $n^2 \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} \left[H_n^2(X_1, X_2)\right] < C < \infty$. Используем оценку (35):

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} \left[H_n^2(X_1, X_2)\right] = n^{-2} \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} \left[J_{1n}^2\right] + o(n^{-2} A_n) \asymp n^{-2}. \quad (41)$$

Вычислим и оценим:

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} \left[H_n^4(X_1, X_2)\right] = \sum_{j, j_1, j_2, j_3 = 1}^{\infty} \varkappa_{nj}^2 \varkappa_{nj_1}^2 \varkappa_{nj_2}^2 \varkappa_{nj_3}^2 \times$$

$$\times \left(\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n} \left[(\varphi_j(X_1) - \theta_{nj})(\varphi_{j_1}(X_1) - \theta_{nj_1})(\varphi_{j_2}(X_1) - \theta_{nj_2})(\varphi_{j_3}(X_1) - \theta_{nj_3})\right]\right)^2.$$

Далее задача состоит в оценке большого числа слагаемых данного выражения. Они оцениваются либо той техникой, что приведена в [7], либо используя технику доказательства леммы 3. Приведем одну из оценок, где используется техника доказательства леммы 3. Применяя неравенство Коши, получаем

$$\sum_{j,j_1,j_2,j_3=1}^{\infty}\varkappa_{nj}^2\varkappa_{nj_1}^2\varkappa_{nj_2}^2\varkappa_{nj_3}^2\left(\int_0^1\varphi_j(x)\varphi_{j_1}(x)\varphi_{j_2}(x)\varphi_{j_3}(x)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}\varphi_l(x)\right)dx\right)^2\le$$

$$\le C\varkappa_n^2\sum_{j,j_1,j_2=1}^{\infty}\varkappa_{nj}^2\varkappa_{nj_1}^2\varkappa_{nj_2}^2\|\varphi_j\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}\|^2\int_0^1\left(\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}\varphi_l(x)\right)^2dx\asymp\varkappa_n^8k_n^3\|\boldsymbol{\theta}_n\|^2; \quad (42)$$

используя условия T1 или T2, действуя по аналогии с (37) и (38), получим

$$\text{при T1: } \asymp n^{-2}\varkappa_n^6k_n^3B_n(\boldsymbol{\theta}_n)\asymp n^{-5}k_n^{3/2}B_n(\boldsymbol{\theta}_n)=O(n^{-4});$$

$$\text{при T2: } \le Cn^{-2}\varkappa_n^6k_n^3(B_n(\boldsymbol{\theta}_n)+O(1))\asymp n^{-5}k_n^{3/2}B_n(\boldsymbol{\theta}_n)=O(n^{-4}).$$

В частности, оценка $\mathbf{E}_0\left[H_n^4(X_1,X_2)\right]\asymp\varkappa_n^8k_n^3\asymp n^{-4}k_n$ доказывается аналогично [7], и ее доказательство опускается.

В итоге после оценивания всех слагаемых имеем

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}\left[H_n^4(X_1,X_2)\right]\le Cn^{-4}k_n, \quad (43)$$

откуда

$$n^{-1}\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}\left[H_n^4(X_1,X_2)\right]=o(n^{-4}).$$

Оценки слагаемых $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_n}\left[V_n^2\right]$ для

$$V_n(x,y)=$$

$$=\sum_{j,j_1=1}^{\infty}\varkappa_{nj}^2\varkappa_{nj_1}^2(\varphi_j(x)-\theta_{nj})(\varphi_{j_1}(y)-\theta_{nj_1})\left((1)_{jj_1}+\underbrace{\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}(1)_{jj_1l}}_{=:L_1}-\underbrace{\theta_j\theta_{nj_1}}_{=:L_2}\right) \quad (44)$$

проводятся более менее единообразно, и из тех, которые не были оценены в [7], мы приведем оценку только одного из них, которая наглядно демонстрирует соответствующую технику:

$$\sum_{j,j_1,j_2,j_3=1}^{\infty}\varkappa_{nj}^2\varkappa_{nj_1}^2\varkappa_{nj_2}^2\varkappa_{nj_3}^2(1)_{jj_1}(1)_{j_2j_3}(1)_{jj_2}\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}(1)_{j_1j_3l}=\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa_{nj}^8\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}(1)_{jjl}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa_{nj}^8\sum_{l=1}^{\infty}\theta_{nl}\int_0^1\varphi_j^2(x)\varphi_l(x)\,dx=\|\boldsymbol{\theta}_n\|\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa_j^8\|\varphi_j^2\|\le C\|\boldsymbol{\theta}_n\|\varkappa_n^6\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa_{nj}^2\|\varphi_j^2\|\le$$

$$\le C\|\boldsymbol{\theta}_n\|\varkappa_n^8k_n\le Cn^{-9/2}k_n^{1/2}B_n^{1/2}(\boldsymbol{\theta}_n)=o(n^{-4}). \quad (45)$$

После построения всех оценок имеем

$$\mathbf{E}_\theta V_n^2(X_1,X_2)\le Cn^{-6}k_n^3=o(n^{-4}). \quad (46)$$

Из представленных выше оценок следует утверждение леммы 2.

Литература

1. Lehmann E. L., Romano J. P., Casella G. *Testing statistical hypotheses.* Vol. 3. Springer (2005).

2. Ingster Y. I., Suslina I. A. *Nonparametric goodness-of-fit testing under Gaussian models.* Vol. 169. Springer Science and Business Media (2003).

3. Giné E., Nickl R. *Mathematical foundations of infinite-dimensional statistical models.* Cambridge University Press (2021).

4. Kendall M. G., Stuart A. The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2. Inference and Relationship. *The Annals of Mathematical Statistics* **35** (3), 1371–1380 (1964).

5. Shorack G. R., Wellner J. A. *Empirical processes with applications to statistics.* New York, Wiley-Interscience (1986).

6. Durbin J. *Distribution theory for tests based on the sample distribution function.* Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (1973).

7. Ermakov M. Minimax nonparametric testing of hypotheses on the distribution density. *Theory of Probability and Its Applications* **39** (3), 396–416 (1995).

8. Ermakov M. On uniform consistency of nonparametric tests I. *Journal of Mathematical Sciences* **258** (6), 802–837 (2021).

9. Bera A. K., Ghosh A. Neyman's smooth test and its applications in Econometrics. *Statistics Textbooks and Monographs* **165**, 177–230 (2002).

10. Neyman J. Smooth test for goodness of fit. *Scandinavian Actuarial Journal* **1937** (3/4), 149–199 (1937).

11. Ermakov M. Minimax detection of a signal in the heteroscedastic Gaussian white noise. *Journal of Mathematical Sciences* **137** (1), 4516–4524 (2006).

12. Rivoirard V. Maxisets for linear procedures. *Statistics and probability letters* **67** (3), 267–275 (2004).

13. Tsybakov A. B. *Introduction to nonparametric estimation.* Vol. 3. Springer (2009).

14. Ermakov M. On asymptotically minimax nonparametric detection of signal in Gaussian white noise. *Journal of Mathematical Sciences* **251** (1), 78–87 (2020).

15. Hall P. Central limit theorem for integrated square error of multivariate nonparametric density estimators. *Journal of multivariate analysis* **14** (1), 1–16 (1984).

Статья поступила в редакцию 8 июня 2022 г.;
доработана 5 сентября 2022 г.;
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

Контактная информация:

Ермаков Михаил Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; erm2512@gmail.com
Капаца Дейвид Юрьевич — студент; davidkapatsa@gmail.com

On uniform consistency of Neyman's type nonparametric tests*

M. S. Ermakov[1,2], *D. Yu. Kapatsa*[1]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, Bolshoy pr., V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Ermakov M. S., Kapatsa D. Yu. On uniform consistency of Neyman's type nonparametric tests. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 212–225. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.203 (In Russian)

The goodness-of-fit problem is explored, when the test statistic is a linear combination of squared Fourier coefficients' estimates coming from the Fourier decomposition of a probability density. Common examples of such statistics include Neyman's test statistics and

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00273).

test statistics, generated by $\mathbb{L}_2$-norms of kernel estimators. We prove the asymptotic normality of the test statistic for both the null and alternative hypothesis. Using these results we deduce conditions of uniform consistency for nonparametric sets of alternatives, which are defined in terms of distribution or density functions. Results on uniform consistency, related to the distribution functions, can be seen as a statement showing to what extent the distance method, based on a given test statistic, makes the hypothesis and alternatives distinguishable. In this case, the deduced conditions of uniform consistency are close to necessary. For sequences of alternatives — defined in terms of density functions — approaching the hypothesis in $\mathbb{L}_2$-metric, we find necessary and sufficient conditions for their consistency. This result is obtained in terms of the concept of maxisets, the description of which for given test statistics is found in this publication.

Keywords: nonparametric hypothesis testing, goodness of fit tests, Neyman's test, consistency, nonparametric set of alternatives, density hypothesis testing.

References

1. Lehmann E. L., Romano J. P., Casella G. *Testing statistical hypotheses.* Vol. 3. Springer (2005).
2. Ingster Y. I., Suslina I. A. *Nonparametric goodness-of-fit testing under Gaussian models.* Vol. 169. Springer Science and Business Media (2003).
3. Giné E., Nickl R. *Mathematical foundations of infinite-dimensional statistical models.* Cambridge University Press (2021).
4. Kendall M. G., Stuart A. The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2. Inference and Relationship. *The Annals of Mathematical Statistics* **35** (3), 1371–1380 (1964).
5. Shorack G. R., Wellner J. A. *Empirical processes with applications to statistics.* New York, Wiley-Interscience (1986).
6. Durbin J. *Distribution theory for tests based on the sample distribution function.* Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (1973).
7. Ermakov M. Minimax nonparametric testing of hypotheses on the distribution density. *Theory of Probability and Its Applications* **39** (3), 396–416 (1995).
8. Ermakov M. On uniform consistency of nonparametric tests I. *Journal of Mathematical Sciences* **258** (6), 802–837 (2021).
9. Bera A. K., Ghosh A. Neyman's smooth test and its applications in Econometrics. *Statistics Textbooks and Monographs* **165**, 177–230 (2002).
10. Neyman J. Smooth test for goodness of fit. *Scandinavian Actuarial Journal* **1937** (3/4), 149–199 (1937).
11. Ermakov M. Minimax detection of a signal in the heteroscedastic Gaussian white noise. *Journal of Mathematical Sciences* **137** (1), 4516–4524 (2006).
12. Rivoirard V. Maxisets for linear procedures. *Statistics and probability letters* **67** (3), 267–275 (2004).
13. Tsybakov A. B. *Introduction to nonparametric estimation.* Vol. 3. Springer (2009).
14. Ermakov M. On asymptotically minimax nonparametric detection of signal in Gaussian white noise. *Journal of Mathematical Sciences* **251** (1), 78–87 (2020).
15. Hall P. Central limit theorem for integrated square error of multivariate nonparametric density estimators. *Journal of multivariate analysis* **14** (1), 1–16 (1984).

Received: June 8, 2022
Revised: September 5, 2022
Accepted: November 17, 2022

Authors' information:

Mikhail S. Ermakov — erm2512@gmail.com
David Yu. Kapatsa — davidkapatsa@gmail.com