ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2023
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Особенности разложения кратных стохастических интегралов Стратоновича с применением функций Уолша и Хаара

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)
e-mail: rkoffice@mail.ru

Аннотация. Рассматривается проблема среднеквадратической сходимости аппроксимаций кратных стохастических интегралов Стратоновича на основе метода обобщенных кратных рядов Фурье при использовании функций Уолша и Хаара. Показано, что при их выборе для разложения кратных стохастических интегралов доказательство среднеквадратической сходимости подпоследовательности частичных сумм ряда, которая формируется вполне естественным для этих функций образом, не требует явного выполнения каких-либо дополнительных условий, кроме условия существования кратного стохастического интеграла Стратоновича.
Ключевые слова: кратный стохастический интеграл Стратоновича, повторный стохастический интеграл Стратоновича, винеровский процесс, разложение в ряд, функции Уолша, функции Хаара.

1. Введение

В самых разных областях при исследовании процессов, которые описываются стохастическими дифференциальными уравнениями, возникает необходимость в моделировании повторных стохастических интегралов. Они являются неотъемлемой частью численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, имеющих равный единице или больший единицы порядок сильной сходимости. Чем выше порядок сходимости численного метода, тем выше кратность используемых повторных стохастических интегралов [1, 2]. В общем случае возможно только их приближенное моделирование, хотя некоторые типы повторных стохастических интегралов можно моделировать точно с поправкой на точность применяемых генераторов случайных чисел.

Алгоритмы приближенного моделирования повторных стохастических интегралов довольно просты в реализации, но теоретическое обоснование, лежащее в основе этих алгоритмов, может оказаться нетривиальным. При разложении повторных стохастических интегралов с помощью метода обобщенных кратных рядов Фурье (не обязательно по тригонометрической системе) один из самых сложных моментов состоит в доказательстве среднеквадратической сходимости частичных сумм ряда к повторному стохастическому интегралу [3, 4]. Для интегралов, понимаемых в смысле Ито, это оказалось более простой задачей нежели для интегралов, которые трактуются в смысле Стратоновича [5, 6]. В общем случае можно рассматривать кратные стохастические интегралы.

В этой работе показано, что при выборе таких ортонормированных систем функций, как функции Уолша и Хаара, для представления кратных или повторных стохастических интегралов на основе обобщенных кратных рядов Фурье доказательство среднеквадратической сходимости подпоследовательности частичных сумм ряда, которая формируется вполне естественным для указанных базисных систем образом, не требует явного выполнения какихлибо дополнительных условий, кроме условия существования кратного или повторного стохастического интеграла Стратоновича, понимаемого согласно определению из [7, 8].

2. Предварительные сведения

Пусть задан линейный оператор ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)}\colon L_2(\mathbb{T}^k) \to \mathcal{L}_2$, ставящий в соответствие функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ кратный стохастический интеграл Стратоновича по винеровским процессам (интеграл кратности k):

$$
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} f(\cdot) = \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \ldots, t_k) \circ dW_{j_1}(t_1) \circ \ldots \circ dW_{j_k}(t_k),
$$

где $j_1, \ldots, j_k = 1, 2, \ldots, s$; $\mathbb{T} = [t_0, T]$; $W_1(\cdot), \ldots, W_s(\cdot)$ — независимые стандартные винеровские процессы, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathrm{P})$. Здесь $L_2(\mathbb{T}^k)$ — пространство квадратично интегрируемых функций k переменных [9], а $\mathcal{L}_2$ — пространство гильбертовых случайных величин [10].

Пусть $\{\Delta_l\}_{l=1}^m$ — это разбиение отрезка $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{T} = \bigcup_{l=1}^m \bar{\Delta}_l, \quad \Delta_{l'} \cap \Delta_{l''} = \varnothing \quad \forall\, l', l'' \in \{1, \ldots, m\}\colon l' \neq l'',$$

где $\Delta_l = [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l)$, $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_m = T$. Кроме того, $\chi_\Delta(\cdot)$ — характеристическая функция множества:

$$\chi_\Delta(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} 1, & (t_1, \ldots, t_k) \in \Delta, \\ 0, & (t_1, \ldots, t_k) \notin \Delta, \end{cases} \quad \Delta \subseteq \mathbb{T}^k,$$

для которой верно соотношение $\chi_{\Delta_{i_1} \times \ldots \times \Delta_{i_k}}(t_1, \ldots, t_k) = \chi_{\Delta_{i_1}}(t_1) \ldots \chi_{\Delta_{i_k}}(t_k)$ с учетом определения:

$$\chi_\Delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta, \\ 0, & t \notin \Delta, \end{cases} \quad \Delta \subseteq \mathbb{T}.$$

Кратным стохастическим интегралом Стратоновича от элементарной функции вида

$$f(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{l_1, \ldots, l_k = 1}^m a_{l_1 \ldots l_k} \chi_{\Delta_{l_1} \times \ldots \times \Delta_{l_k}}(t_1, \ldots, t_k), \quad a_{l_1 \ldots l_k} \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

называется случайная величина

$${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \ldots j_k)} f(\cdot) = \sum_{l_1, \ldots, l_k = 1}^m a_{l_1 \ldots l_k} W_{j_1}(\Delta_{l_1}) \ldots W_{j_k}(\Delta_{l_k}), \tag{2}$$

где

$$W_j(\Delta) = {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j)} \chi_\Delta(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta(t) dW_j(t).$$

Для измеримой функции $f(\cdot)$ кратный стохастический интеграл Стратоновича относительно разбиения $\{\Delta_l\}_{l=1}^m$ определяется как интеграл (2) от элементарной функции $\bar{f}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m}(\cdot)$, полученной из $f(\cdot)$ с помощью усреднения [7, 8]:

$$\bar{f}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m}(t_1, \ldots, t_k) = \frac{1}{\operatorname{mes} \Delta} \int_\Delta f(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k,$$

$$(t_1, \ldots, t_k) \in \Delta = \Delta_{l_1} \times \ldots \times \Delta_{l_k},$$

где $\operatorname{mes}\Delta$ — мера Лебега множества Δ. Он обозначается ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1\ldots j_k)}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m} f(\cdot)$.

Кратным стохастическим интегралом Стратоновича от функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ называется среднеквадратический предел последовательности случайных величин ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1\ldots j_k)}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m} f(\cdot)$ при условии

$$\max_{1\leqslant l\leqslant m} \operatorname{mes}\Delta_l \to 0 \quad (m \to \infty),$$

если этот предел существует и не зависит от выбора возрастающей последовательности разбиений $\{\Delta_l\}_{l=1}^m$ отрезка $\mathbb{T}$:

$${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1\ldots j_k)}_{\mathbb{T}} f(\cdot) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1\ldots j_k)}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m} f(\cdot).$$

Одна из форм представления кратного стохастического интеграла Стратоновича — это представление в виде ряда:

$${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1\ldots j_k)}_{\mathbb{T}} f(\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} F_{i_1\ldots i_k} \zeta^{(j_1)}_{i_1} \ldots \zeta^{(j_k)}_{i_k}, \tag{3}$$

где $F_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения функции $f(\cdot)$ относительно выбранной базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$, или более строго — относительно базисной системы $\{q(i_1,\cdot) \otimes \ldots \otimes q(i_k,\cdot)\}_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$:

$$\begin{aligned} F_{i_1\ldots i_k} &= \big(q(i_1,\cdot) \otimes \ldots \otimes q(i_k,\cdot), f(\cdot)\big)_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \\ &= \int_{\mathbb{T}^k} q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k) f(t_1,\ldots,t_k)\,dt_1\ldots dt_k, \end{aligned}$$

а $\zeta^{(j_1)}_{i_1}, \ldots, \zeta^{(j_k)}_{i_k}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство формулы (3) нетривиально. Для кратности $k \leqslant 6$ и функций $f(\cdot)$ специального вида, который достаточен для приложений к численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений, а также при выборе в качестве базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ полиномов Лежандра или тригонометрических функций этот результат доказан в [3, 4]. В [6] предложены дополнительные условия на функцию $f(\cdot)$, связанные с существованием сверток коэффициентов разложения по парам индексов, отвечающих равным значениям $j_1, \ldots, j_k$. Эти свертки должны задавать функцию с интегрируемым квадратом, которая получается из $f(\cdot)$ после применения оператора нахождения интегрального следа по соответствующим парам аргументов функции $f(\cdot)$, ограничений на базис при этом нет.

Можно предложить вариант использования в качестве базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ функций Уолша или Хаара, при котором нетрудно показать идентичность интегральной суммы вида (2) при равномерном разбиении отрезка $\mathbb{T}$ и частичной суммы ряда из правой части формулы (3) при определенном выборе верхнего предела суммирования, что обусловлено известным фактом: любая частичная сумма разложения функции $f(\cdot)$ по функциям Уолша или Хаара — это элементарная функция (1), для которой кратный стохастический интеграл Стратоновича всегда определен. При таком варианте не требуется постулировать отмеченные выше дополнительные условия, по крайней мере в явном виде, а исходить только из существования кратного стохастического интеграла Стратоновича в смысле определения, приведенного выше.

3. Блочно-импульсные функции, функции Уолша и Хаара

Пусть $\{\hat{\Pi}(l,\cdot)\}_{l=0}^{m-1}$ — блочно-импульсные функции (нормированные характеристические функции множеств Δ_{l+1}, соответствующих разбиению отрезка $\mathbb{T}=[t_0,T]$ при $t_0=0$):

$$\hat{\Pi}(l,t)=\frac{1}{\sqrt{h}}\begin{cases}1, & t\in[lh,(l+1)h),\\ 0, & t\notin[lh,(l+1)h),\end{cases}\quad \text{или}\quad \hat{\Pi}(l,t)=\frac{1}{\sqrt{h}}\,\chi_{[0,T)}\left(\frac{t}{h}-l\right). \qquad (4)$$

Функцию $\hat{\Pi}(m-1,\cdot)$ целесообразно доопределить в точке $t=T$ таким образом, чтобы она была непрерывна слева.

Блочно-импульсные функции ортогональны, поскольку имеют попарно непересекающиеся носители, и нормированы в пространстве $L_2(\mathbb{T})$, однако не образуют полной системы, т.е. не являются базисом $L_2(\mathbb{T})$. Тем не менее, подобные системы функций могут эффективно применяться в различных приближенных методах, включая проекционно-сеточные спектральные методы [11, 12]. Кроме того, через них удобно выражать функции Уолша:

$$\hat{W}(i,t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{T}}, & i=0,\\ \sqrt{\dfrac{1}{T}}\displaystyle\prod_{\{k\colon\,\gamma_k=1\}}R(k,t), & i=1,2,\dots,\end{cases} \qquad (5)$$

где $\gamma_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu+1$, — коэффициенты в двоичном представлении числа $i = \gamma_1 2^0 + \gamma_2 2^1 + \ldots + \gamma_{\nu+1} 2^\nu$, $\nu = \lfloor \log_2 i \rfloor$ — наибольшая степень в этом двоичном представлении, $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа, $R(k, \cdot)$ — функции Радемахера:

$$R(k,t) = \operatorname{sign}\left[\sin\left(\frac{2^k \pi t}{T}\right)\right], \quad \text{или} \quad R(k,t) = (-1)^{\lfloor \frac{2^k t}{T} \rfloor},$$

Положим $m = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$, и выразим функции Уолша (5) с номерами $i = 0, 1, \ldots, m-1$ через блочно-импульсные функции (4) [11, 13, 14]. Пусть

$$\Delta^{(0)} = 1, \quad \Delta^{(k+1)}_{2i,j} = \Delta^{(k+1)}_{2i+1,j} = \Delta^{(k+1)}_{2i,2^k+j} = -\Delta^{(k+1)}_{2i+1,2^k+j} = \Delta^{(k)}_{ij},$$
$$i, j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

тогда матрица

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{m}} \Delta^{(n)} \tag{6}$$

задает коэффициенты линейных комбинаций блочно-импульсных функций (4), определяющих функции Уолша (5):

$$\hat{W}(i,t) = \sum_{l=0}^{m-1} \Xi_{il} \hat{\Pi}(l,t). \tag{7}$$

Блочно-импульсные функции могут применяться и для выражения функций Хаара:

$$\hat{X}(i,t) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{1}{T}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2^n}{T}}, \quad \dfrac{2kT}{2^{n+1}} \leqslant t < \dfrac{(2k+1)T}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{\dfrac{2^n}{T}}, \quad \dfrac{(2k+1)T}{2^{n+1}} \leqslant t < \dfrac{2(k+1)T}{2^{n+1}}, \\ 0, \quad \dfrac{2lT}{2^{n+1}} \leqslant t < \dfrac{(2l+1)T}{2^{n+1}}, \end{array} \right\} \begin{array}{c} i = 2^n + k = 1, 2, \ldots, \\ n = 0, 1, 2, \ldots, \\ k, l = 0, 1, \ldots, 2^n - 1, \\ k \neq l. \end{array} \tag{8}$$

Несложно сформировать матрицу Υ, задающую коэффициенты линейных комбинаций блочно-импульсных функций (4), которые определяют функции Хаара (8) с номерами $i = 0, 1, \ldots, m-1$ [14]:

$$\Upsilon_{0j} = \sqrt{m}, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\Upsilon_{i+2^k, j+i\,2^{-k}m} = \begin{cases} \sqrt{2^k m}, & j < 2^{-k-1}m, \\ -\sqrt{2^k m}, & j \geqslant 2^{-k-1}m, \end{cases} \tag{9}$$
$$i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^{-k}m - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где указаны только ненулевые элементы матрицы Υ. Следовательно,

$$\hat{X}(i,t) = \sum_{l=0}^{m-1} \Upsilon_{il} \hat{\Pi}(l,t). \tag{10}$$

4. Основной результат

Не ограничивая общности рассуждений, положим $t_0 = 0$. Далее зафиксируем число $m = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$, и зададим равномерное разбиение отрезка $\mathbb{T} = [0, T]$:

$$\begin{gathered} \Delta_l = [\vartheta_{l-1}, \vartheta_l), \quad \vartheta_0 = t_0 = 0, \quad \vartheta_l = lh \quad (\operatorname{mes} \Delta_l = h), \\ l = 1, 2, \ldots, m, \quad h = T/m. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1 \ldots j_k)}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m} f(\cdot) = \\ &= \frac{1}{h^k} \sum_{l_1, \ldots, l_k = 1}^{m} \int_{\Delta_{l_1} \times \ldots \times \Delta_{l_k}} f(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k \, W_{j_1}(\Delta_{l_1}) \ldots W_{j_k}(\Delta_{l_k}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^k}} \sum_{l_1, \ldots, l_k = 0}^{m-1} \tilde{F}_{l_1 \ldots l_k} W_{j_1}(\Delta_{l_1+1}) \ldots W_{j_k}(\Delta_{l_k+1}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{l_1 \ldots l_k} &= \frac{1}{\sqrt{h^k}} \int_{\Delta_{l_1} \times \ldots \times \Delta_{l_k}} f(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k = \\ &= \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \ldots, t_k) \hat{\Pi}(l_1, t_1) \ldots \hat{\Pi}(l_k, t_k) dt_1 \ldots dt_k. \end{aligned}$$

Нетрудно получить формулу для нахождения коэффициентов разложения функции $f(\cdot)$ по функциям Уолша (5), используя соотношение (7):

$$\begin{aligned} F_{i_1 \ldots i_k} &= \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \ldots, t_k) \hat{W}(i_1, t_1) \ldots \hat{W}(i_k, t_k) dt_1 \ldots dt_k = \\ &= \sum_{l_1, \ldots, l_k = 0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1} \ldots \Xi_{i_k l_k} \int_{\mathbb{T}^k} f(t_1, \ldots, t_k) \hat{\Pi}(l_1, t_1) \ldots \hat{\Pi}(l_k, t_k) dt_1 \ldots dt_k = \end{aligned}$$

$$= \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1} \ldots \Xi_{i_k l_k} \tilde{F}_{l_1\ldots l_k}, \quad i_1,\ldots,i_k = 0,1,2,\ldots$$

Матрица Ξ определяет ортогональное преобразование, т.е. $\Xi^{-1} = \Xi^{\mathrm{т}}$, поэтому для произвольного $j \in \{1,\ldots,s\}$ можно воспользоваться следующим представлением:

$$\frac{W_j(\Delta_{l+1})}{\sqrt{h}} = \sum_{i=0}^{m-1} \Xi_{il} \zeta_i^{(j)}, \quad l = 0,1,\ldots,m-1, \tag{12}$$

в котором случайные величины $\zeta_i^{(j)}$ являются независимыми и имеют стандартное нормальное распределение (ортогональное преобразование сохраняет норму и скалярное произведение, в данном случае ковариации, а для нормально распределенных случайных величин из некоррелированности следует независимость). С учетом формул (7) и (12) имеем

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1\ldots j_k)}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m} f(\cdot) &= \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{m-1} \tilde{F}_{l_1\ldots l_k} \frac{W_{j_1}(\Delta_{l_1+1})}{\sqrt{h}} \ldots \frac{W_{j_k}(\Delta_{l_k+1})}{\sqrt{h}} = \\
&= \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{m-1} \tilde{F}_{l_1\ldots l_k} \sum_{i_1=0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \sum_{i_k=0}^{m-1} \Xi_{i_k l_k} \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{m-1} \left(\sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1} \ldots \Xi_{i_k l_k} \tilde{F}_{l_1\ldots l_k} \right) \xi_{i_1}^{(j_1)} \ldots \xi_{i_k}^{(j_k)} = \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{m-1} F_{i_1\ldots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)} = {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j_1\ldots j_k)}_{\mathbb{T}} f^{(m)}(\cdot),
\end{aligned}$$

где

$$f^{(m)}(\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{m-1} F_{i_1\ldots i_k} \hat{W}(i_1,\cdot) \otimes \ldots \otimes \hat{W}(i_k,\cdot).$$

Можно предложить обратную цепочку преобразований, дающую тот же результат. Согласно свойствам стохастического интеграла

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}^{W(j)}_{\mathbb{T}} \hat{W}(i,\cdot) &= \int_{\mathbb{T}} \hat{W}(i,t) dW_j(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \Xi_{il} \int_{\mathbb{T}} \hat{\Pi}(l,t) dW_j(t) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{l=0}^{m-1} \Xi_{il} \int_{\mathbb{T}} \chi_{\Delta_{l+1}}(t) dW_j(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{l=0}^{m-1} \Xi_{il} W_j(\Delta_{l+1}),
\end{aligned}$$

следовательно, принимая во внимание мультипликативность кратного стохастического интеграла Стратоновича [8], имеем

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} f^{(m)}(\cdot) = {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{m-1} F_{i_1\ldots i_k} \hat{W}(i_1,\cdot)\otimes\ldots\otimes\hat{W}(i_k,\cdot) = \\
&\quad = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{m-1} F_{i_1\ldots i_k}\, {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1)}\hat{W}(i_1,\cdot)\ldots {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_k)}\hat{W}(i_k,\cdot) = \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{h^k}} \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{m-1} F_{i_1\ldots i_k} \sum_{l_1=0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1} W_{j_1}(\Delta_{l_1+1})\ldots \sum_{l_k=0}^{m-1} \Xi_{i_k l_k} W_{j_k}(\Delta_{l_k+1}).
\end{aligned}
$$

Остается поменять порядок суммирования и учесть, что

$$
\tilde{F}_{l_1\ldots l_k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1}\ldots \Xi_{i_k l_k} F_{i_1\ldots i_k}, \quad l_1,\ldots,l_k = 0,1,2,\ldots,
$$

так как $\Xi^{-1} = \Xi^{\mathrm{т}}$, поэтому

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} f^{(m)}(\cdot) = \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{h^k}} \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{m-1} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1}\ldots \Xi_{i_k l_k} F_{i_1\ldots i_k} \right) W_{j_1}(\Delta_{l_1+1})\ldots W_{j_k}(\Delta_{l_k+1}) = \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{h^k}} \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{m-1} \tilde{F}_{l_1\ldots l_k} W_{j_1}(\Delta_{l_1+1})\ldots W_{j_k}(\Delta_{l_k+1}) = \\
&\quad = \frac{1}{h^k} \sum_{l_1,\ldots,l_k=1}^{m} \int_{\Delta_{l_1}\times\ldots\times\Delta_{l_k}} f(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\, W_{j_1}(\Delta_{l_1})\ldots W_{j_k}(\Delta_{l_k}) = \\
&\quad = {}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m}^{W(j_1\ldots j_k)} f(\cdot).
\end{aligned}
$$

Далее предположим, что функция $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^k)$ такова, что существует интеграл ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} f(\cdot)$, т.е. существует среднеквадратический предел последовательности случайных величин ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m}^{W(j_1\ldots j_k)} f(\cdot)$ и он не зависит от выбора возрастающей последовательности разбиений $\{\Delta_l\}_{l=1}^m$ отрезка $\mathbb{T}$, а значит существует предел последовательности случайных величин ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\{\Delta_l\}_{l=1}^m}^{W(j_1\ldots j_k)} f(\cdot)$ при условии (11), где $m = 2^n \to \infty$, но эта последовательность эквивалентна последовательности ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1\ldots j_k)} f^{(m)}(\cdot)$, отвечающей представлению (3).

Все приведенные в этом разделе формулы можно записать, применяя функции Хаара (8) и соответствующую им матрицу Υ. Полученный результат справедлив для кратных стохастических интегралов не только по винеровским, но и по пуассоновским процессам [8], поскольку в выкладках специфика именно винеровских процессов не используется, а важна лишь независимость приращений случайных процессов, относительно которых определен кратный стохастический интеграл.

5. Дополнение

Простые формулы, связывающие блочно-импульсные функции с функциями Уолша и Хаара, позволяют решить еще одну важную задачу в контексте применения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Если ориентироваться на методы, основанные на разложениях Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича [1], то необходимо знать коэффициенты разложения функции

$$\Bbbk(t_1,\ldots,t_k) = 1(t_k - t_{k-1})\ldots 1(t_2 - t_1) = \\ = \begin{cases} 1, & t_1 < \ldots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{13}$$

относительно выбранной базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Для унифицированных разложений Тейлора – Ито и Тейлора – Стратоновича [2] требуется рассматривать дополнительные весовые функции (мономы), но оба подхода в итоге обеспечивают один и тот же результат.

Алгоритмы вычисления коэффициентов разложения этих функций — важная составная часть как общей теории, так и пакета программ, реализующих численные методы. Функции Уолша и Хаара по точности аппроксимации проигрывают полиномам Лежандра или косинусоидам, но сопоставимы с тригонометрическими функциями, включающими косинусоиды. А главное, что их применение позволяет сравнивать точность аппроксимации повторных стохастических интегралов с методом численного интегрирования, используя при этом одну и ту же методику расчета именно за счет идентичности интегральной суммы вида (2) и частичной суммы ряда из правой части формулы (3) при оговоренных выше условиях.

Покажем, каким образом могут быть вычислены коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1\ldots i_k}$ функции (13), если в качестве базисной системы $\{q(i,\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ применять функции Уолша (5). Выберем число $m = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$, обозначим

$h = T/m$ и найдем величины

$$\tilde{\mathbb{K}}_{l_1 \dots l_k} = \int_{\mathbb{T}^k} \hat{\Pi}(l_1, t_1) \dots \hat{\Pi}(l_k, t_k) \Bbbk(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$
$$l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $\{\hat{\Pi}(l, \cdot)\}_{l=0}^{m-1}$ — блочно-импульсные функции (4).

Если $l_1 < \dots < l_k$, то $\tilde{\mathbb{K}}_{l_1 \dots l_k} = \sqrt{h^k}$, поскольку $\mathrm{Q}_{l_1 \dots l_k}$ — носитель функции $\hat{\Pi}(l_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{\Pi}(l_k, \cdot)$:

$$\mathrm{Q}_{l_1 \dots l_k} = \operatorname{supp} \hat{\Pi}(l_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{\Pi}(l_k, \cdot),$$

содержится в множестве $\{(t_1, \dots, t_k) \colon \Bbbk(t_1, \dots, t_k) = 1\}$, — это объем $(k+1)$-мерного параллелепипеда $\mathrm{Q}_{l_1 \dots l_k} \times [0, 1/\sqrt{h^k}]$. Если не выполняется хотя бы одно из неравенств $l_1 \leqslant l_2$, $l_2 \leqslant l_3$, $\dots$, $l_{k-1} \leqslant l_k$, то $\tilde{\mathbb{K}}_{l_1 \dots l_k} = 0$, поскольку $\mathrm{Q}_{l_1 \dots l_k}$ содержится в множестве $\{(t_1, \dots, t_k) \colon \Bbbk(t_1, \dots, t_k) = 0\}$. Более интересный случай соответствует выполнению хотя бы одного из равенств $l_1 = l_2$, $l_2 = l_3$, $\dots$, $l_{k-1} = l_k$. Опуская для краткости зависимость от $l_1, \dots, l_k$, обозначим через L множество $\{l_1, \dots, l_k\}$, а через $\bar{L}$ мультимножество $(l_1 \dots l_n)$, т.е. множество, которое в отличие от L может содержать одинаковые элементы, $\#(l, \bar{L})$ — кратность элемента l в мультимножестве $\bar{L}$. Тогда величина $\tilde{\mathbb{K}}_{l_1 \dots l_k}$, равная объему многогранной области, содержащейся в $(k+1)$-мерном параллелепипеде $\mathrm{Q}_{l_1 \dots l_k} \times [0, 1/\sqrt{h^k}]$, определяется соотношением

$$\tilde{\mathbb{K}}_{l_1 \dots l_k} = \sqrt{h^k} \left(\prod_{l \in L} \#(l, \bar{L})! \right)^{-1}.$$

Далее остается воспользоваться связью (7) между блочно-импульсными функциями (4) и функциями Уолша (5), тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} &= \big(\hat{W}(i_1, \cdot) \otimes \dots \otimes \hat{W}(i_k, \cdot), \Bbbk(\cdot) \big)_{L_2(\mathbb{T}^k)} = \\ &= \int_{\mathbb{T}^k} \hat{W}(i_1, t_1) \dots \hat{W}(i_k, t_k) \Bbbk(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_k = 0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1} \dots \Xi_{i_k l_k} \int_{\mathbb{T}^k} \hat{\Pi}(l_1, t_1) \dots \hat{\Pi}(l_k, t_k) \Bbbk(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k}$ функции $\Bbbk(\cdot)$ по функциям Уолша имеют вид

$$\mathbb{K}_{i_1 \dots i_k} = \sum_{l_1, \dots, l_k = 0}^{m-1} \Xi_{i_1 l_1} \dots \Xi_{i_k l_k} \tilde{\mathbb{K}}_{l_1 \dots l_k}. \tag{14}$$

Поступая аналогично, на основе соотношения (10), связывающего блочно-импульсные функции (4) и функции Хаара (8), находим коэффициенты разложения $\mathbb{K}_{i_1\ldots i_k}$ функции $\mathbb{k}(\cdot)$ по функциям Хаара:

$$\mathbb{K}_{i_1\ldots i_k} = \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{m-1} \Upsilon_{i_1 l_1}\ldots\Upsilon_{i_k l_k}\tilde{\mathbb{K}}_{l_1\ldots l_k}. \tag{15}$$

Напомним, что элементы квадратных матриц Ξ и Υ размеров $m\times m$, которые используются в формулах (14) и (15), задаются выражениями (6) и (9) соответственно. В формулах (14) и (15) достаточно ограничиться суммированием при условии $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_k$.

Здесь значения индексов $i_1,\ldots,i_k$ ограничены величиной $m-1$, но это несущественно, поскольку нет ограничений сверху на величину m.

Список литературы

[1] *Kloeden, P.E., Platen, E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1995.

[2] *Kuznetsov, D.F.* Strong approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals based on generalized multiple Fourier series. Application to numerical solution of Itô SDEs and semilinear SPDEs // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2023. № 1. — С. A.1–A.947.

[3] *Kuznetsov, D.F.* A new approach to the series expansion of iterated Stratonovich stochastic integrals of arbitrary multiplicity with respect to components of the multidimensional Wiener process // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2022. № 2. — С. 83–186.

[4] *Kuznetsov, D.F.* A new approach to the series expansion of iterated Stratonovich stochastic integrals of arbitrary multiplicity with respect to components of the multidimensional Wiener process. II // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2022. № 4. — С. 135–194.

[5] *Рыбаков, К.А.* Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. № 3. — С. 109–140.

[6] *Рыбаков, К.А.* Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Стратоновича // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. № 4. — С. 81–115.

[7] *Delgado, R.* Multiple Ogawa, Stratonovich and Skorohod anticipating integrals // Stochastic Analysis and Applications. — 1998. Vol. 16. No. 5. — P. 859–872.

[8] *Farré, M.*, *Jolis, M.*, *Utzet, F.* Multiple Stratonovich integral and Hu–Meyer formula for Lévy processes // Ann. Probab. — 2010. Vol. 38. No. 6. — P. 2136–2169.

[9] *Колмогоров, А.Н.*, *Фомин, С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

[10] *Гихман, И.И.*, *Скороход, А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.

[11] *Лапин, С.В.*, *Егупов, Н.Д.* Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.

[12] *Рыбин, В.В.* Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ, 2013.

[13] *Голубов, Б.И.*, *Ефимов, А.В.*, *Скворцов, В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Наука, 1987.

[14] *Рыбаков, К.А.* Расчет спектральных характеристик оператора интегрирования дробного порядка относительно функций Уолша и Хаара // Вестник ДГУ. Серия 1. Естественные науки. — 2020. Т. 35. Вып. 3. — С. 17–23.

Features of the expansion of multiple stochastic Stratonovich integrals using Walsh and Haar functions

K. A. Rybakov

Moscow Aviation Institute
(National Research University)

e-mail: rkoffice@mail.ru

Abstract. The problem of the root-mean-square convergence for approximations of multiple stochastic Stratonovich integrals based on the generalized multiple Fourier series method using Walsh and Haar functions is considered. It is shown that when they are chosen to expand multiple stochastic integrals, the proof of the root-mean-square convergence of a subsequence of series partial sums, which is formed in a way that is quite natural for these functions, does not require the explicit fulfillment of any additional conditions, except for the condition of the existence of the multiple stochastic Stratonovich integral.

Key words: multiple stochastic Stratonovich integral, iterated stochastic Stratonovich integral, Wiener process, series expansion, Walsh functions, Haar functions.